

*Пінчук О. П. Математичне моделювання як стрижень загальнопредметної компетентності учнів (на прикладі навчання фізики) / О. П. Пінчук // Наук. часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 3. Викладання фізики і математики у вищій та середній школі. – №4. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2008.– С.67 – 72.*

УДК 371.3 + 519.876.5 + 533.73

*Пінчук О.П.*

*Інститут інформаційних технологій і засобів навчання*

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК СТРИЖЕНЬ  
ЗАГАЛЬНОПРЕДМЕТНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ (НА ПРИКЛАДІ  
НАВЧАННЯ ФІЗИКИ)

У сучасній світовій педагогіці одним з актуальних напрямків визнано спрямування системи шкільної освіти на ефективну підготовку учнів до включення в реально існуючу систему радикальних економічних і технологічних перетворень, формування нових сфер діяльності. Наслідком розвитку цього напрямку педагогіки стала розробка так званого компетентнісного підходу.

У розробленому та прийнятому 2003 року документі Державних стандартів базової та повної середньої освіти [1] є спроби закласти досягнення учнями компетентностей в основу змісту освітніх галузей. Деякі автори навчальних програм для загальноосвітніх закладів також використовують поняття компетентності: життєвої, загально-предметної, загальнокультурної, ключової, предметної та інших. Наприклад, у програмі “Математика, 5–12 кл.” [2] зазначено, що одним із головних завдань курсу математики в старшій школі є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності. «Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою».

У критеріях оцінювання навчальних досягнень учнів з фізики програми “Фізика. Астрономія, 7–12 кл.” [2] наголошується, що навчання фі-

зики у кінцевому результаті має «не тільки дати суму знань, а й сформува-ти достатній рівень компетенції. Тому складовими навчальних досягнень учнів з курсу фізики є не лише володіння навчальним матеріалом та здатність його відтворювати, а й уміння та навички знаходити потрібну інформацію, аналізувати її та застосовувати в стандартних і нестандартних ситуаціях у межах вимог навчальної програми до результатів навчання».

Нажаль, цілісного системного і взаємоузгодженого підходу до систематизації понять компетентності, компетенції, загальнопредметних та інших компетентностей не запропоновано.

Сьогодні компетентнісний підхід до формування змісту середньої освіти у досвіді зарубіжних країн ретельно проаналізований та описаний, зокрема в статтях Овчарук О.В. [3] та Пометун О.І. [4]. Бачимо, що означення, перелік та систематизація компетентностей визначається різними країнами неоднаково і є предметом постійних дискусій, віддзеркалюючи історичний та культурний спадок кожного суспільства.

Більшість українських педагогів погодилася з трактуванням *компетентності* як інтегрованої характеристики особистості, яка має бути сформована у процесі навчання і містити знання, вміння, ставлення, досвід діяльності та поведінкові моделі особистості [5]. У сучасній педагогіці підсилюється актуальність подальших теоретичних розробок компетентнісного підходу та його реалізації у навчанні.

Відразу зазначимо, що математична компетентність може розглядатися як складова професійної компетентності спеціаліста (інженера, учителя математики, економіста, хіміка тощо). Від того, наскільки сформована та розвинена ця складова, залежить успіх та перспективність професійної діяльності людини. Розвиток математичної компетентності спеціалістів різного фаху є цікавим напрямком наукових досліджень, проте не є завданням нашої доповіді.

Математична компетентність є однією з особистісних характеристик

інтелектуального розвитку дитини. Отже можна розглядати процес її формування у відповідності до віку дитини (рівня освіти): у дошкільнят, учнів початкової, основної або старшої школи. Наприклад, Зайцевою Л.І. [6] розроблена модель та методика поетапного формування елементарної математичної компетентності старших дошкільників. Зміст елементарної математичної компетентності автор визначає як комплексну характеристику математичного розвитку дитини, що включає сформованість елементарних математичних знань та вміння застосовувати ці знання у різних життєвих ситуаціях, розвиток пізнавального інтересу, загальнонавчальних умінь. Термін «елементарна» вводиться як ознака віку, «...оскільки дошкільник тільки починає оволодівати математичними знаннями».

Особливості формування математичної компетентності дітей різних вікових груп, зокрема середнього та старшого шкільного віку залишаються сьогодні мало вивченими.

У досвіді країн, які реалізують компетентнісний підхід [7], та досвіді вітчизняної системи освіти можна спостерігати спільні тенденції у спробах розробити певну систему компетентностей на різних рівнях змісту: надпредметні, загальнопредметні та спеціальнопредметні. Наприклад, Раков С.А. [8] розглядає математичну компетентність з точки зору її місця в ієрархічній структурі, рівні якої складають ключові, загальногалузеві та предметні компетентності. Оскільки математика є предметом і освітньою галуззю одночасно, то вона займає «особливе положення» в цій структурі. «Математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень» [8]. Математична компетентність розглядається в якості предметної та загальногалузевої одночасно. Особливий наголос в реалізації компетентнісного підходу в навчанні математиці автор робить на викорис-

танні комп'ютерних математичних систем як засобів комп'ютерного моделювання з метою проведення експериментів.

Як предметна розглядається математична компетентність в дослідженні Ходирєвої Н.Г. [9] Автор визначає математичну компетентність як «системну властивість особи, що виражається в наявності глибоких міцних знань з математики, в умінні застосовувати ці знання в нових ситуаціях, у здатності досягати значущих результатів і якості математичної діяльності». Математична компетентність передбачає наявність високого рівня знань і досвіду самостійної діяльності на основі цих знань.

Наша стаття присвячена визначенню місця та шляхів формування математичної компетентності в системі загальної компетентності учня основної школи. В своєму дослідженні ми розвиваємо думку про «особливе положення» математичної компетентності на різних рівнях змісту освіти.

У переліку ключових компетентностей Лісабонської конференції 2001р. перші позиції займають базові компетентності у галузі математики, природничих наук та технологій. Під ключовими компетентностями розуміють специфічні здібності, які кожен громадянин повинен мати можливість розвивати. Вони необхідні для застосування і професійного зростання, подальшого навчання, соціального та персонального розвитку. Ключові компетентності застосовні крізь всі предметні області [10]. Серед таких компетентностей часто називають – «застосування числових та інформаційних технологій».

Наприклад, в Англії: застосування чисел (робота з числом, числові технології) та інформаційні технології визнані ключовими компетенціями. Іспанія: розвиток здібностей до формального абстрактного мислення є складовою когнітивної компетентності. Нідерланди: кваліфікації числення (оцінювати и вимірювати, ефективна і швидка арифметика, використання правил арифметики, арифметика у думці). У Шотландії виділяють числення (використовувати графічну інформацію, використовувати числа).

Використовуючи багаторічний досвід європейських країн, в яких «робота з числом» (або «робота з знаковими системами», або «математична грамотність») займають перше місце у списку ключових компетентностей, робимо висновок про доцільність розгляду процесу формування і розвитку математичної компетентності поза рамками відповідного навчального предмету.

Вивчення математики вдосконалює загальну культуру мислення, привчає до логічних міркувань, надає можливість ефективно осмислювати і досліджувати задачі, що виникають в різних галузях науки, сферах суспільного та особистого життя. Таким чином, математичні знання та вміння набувають загальнопредметного характеру для нематематичних дисциплін.

Математична компетентність передбачає вміння бачити математику в реальному житті та застосовувати для розв'язання проблем різного походження. Наприклад, автором даної статті у навчальному посібнику „Математика в економіці” [11] на рівні, доступному школярам, демонструється, як за допомогою математичного апарату створюють математичну модель та аналізують завдання різних областей економіки, як найважливіші поняття економіки стають конкретними прикладами стандартних понять математики (вектор, множина, функціональна залежність, відсоток, похідна тощо). У посібнику використані задачі, що вимагають створення математичної моделі того чи іншого соціально-економічного явища. Розв'язування задач спрямоване на формування аналітичності, системності та критичності мислення, які необхідні для повноцінного функціонування людини у сучасному соціально-економічному суспільстві, для динамічної адаптації в умовах сучасності.

За допомогою загальнопредметного змісту навчальні предмети об'єднуються в єдине ціле. Елементи загальнопредметного змісту визначають системоутворюючу основу загальної освіти, як за вертикаллю окремих шаблів навчання, так і на рівні горизонтальних міжпредметних

зв'язків. Математичні знання, процес їх засвоєння та застосування в навчальному процесі можуть бути стрижнем для взаємозв'язку знань та умінь різних дисциплін, компетенцій та компетентності особистості.

Так, математика дає змогу будувати логічні моделі для дослідження різних фізичних явищ. Це допомагає краще розуміти фізичні процеси, знаходити якісні та кількісні співвідношення між фізичними величинами. Для застосування математичних методів при вивченні різноманітних фізичних проблем необхідно вміти користуватися математичним апаратом, знати межі допустимого використання математичних моделей.

Фізична модель об'єкта приймає зазвичай математичну форму, яка явно проголошує усі припущення, що виділяють головні зв'язки в об'єкті серед другорядних. Результати аналізу такої моделі порівнюються з властивостями об'єкту.

Наведемо приклад. Фундаментальним освітнім об'єктом науки є взаємодія тіл, яку можна описати поняттями сили, імпульсу сили, імпульсу тіла, законами Ньютона та іншими. Проста задача про зміну імпульсу тіла при пружному зіткненні зі стінкою стає основою визначення тиску газу на стінки посудини.

Розглянемо формування і розвиток математичної моделі на прикладі опису середнього тиску газу на стінки посудини та його залежності від об'єму газу  $V$  і температури газу  $T$ .

Покладемо, що

- 1) всі речовини складаються з частинок;
- 2) ці частинки знаходяться в безперервному хаотичному русі;
- 3) між частинками існує взаємодія.

Ці уявлення почали формуватися в глибокій старовині здебільшого у формі філософських міркувань. Тільки після появи «Математичних початків натуральної філософії» (І.Ньютон, 1687) можна було надати їм форму математичної науки, а ці три положення стали основою молекулярно-

кінетичної теорії (МКТ).

Зробимо припущення: у газі

а) всі частинки мають однакову масу  $m$ ,

б) всі частинки мають однакову за абсолютною величиною швидкість  $v$ ,

в) частинки газу – це тверді абсолютно пружні кульки, які взаємодіють тільки при безпосередньому зіткненні, а в одиниці об'єму знаходиться  $n$  таких частинок.

Тоді тиск  $p$  представляється результатом дії сил на стінку, що виникають при зіткненні частинок зі стінкою.

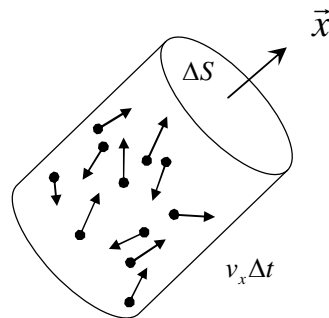
Нехай  $\Delta S$  – площа ділянки поверхні посудини із зовнішньою нормаллю  $\vec{x}$ . При абсолютно пружному зіткненні зі стінкою зміна імпульсу однієї частинки складе

$$\Delta p_{1x} = -2mv_x,$$

що приводить до сили, яка діє на стінку

$$F_{1x} = \frac{2mv_x}{\Delta t},$$

де  $\Delta t$  – час зіткнення.



За час  $\Delta t$  зі стінкою зіткнуться всі частинки, які знаходяться в об'ємі  $v_x \Delta t \cdot \Delta S$  і які рухаються у напрямку ділянки  $\Delta S$ . При хаотичності руху їх число  $Z$  дорівнює половині всіх частинок у цьому об'ємі, тобто

$$Z = \frac{1}{2} n v_x \Delta t \cdot \Delta S.$$

Тоді результуюча сила  $F_x$  від зіткнень частинок газу об стінку дорів-

нює

$$F_x = F_{1x} Z = n \cdot m v_x^2 \cdot \Delta S$$

Оскільки  $v_x^2$  різний у різних частинок, то потрібно його усереднити за напрямом (саме модель показує, що потрібно усереднити!). Через хаотичність руху частинок всі його напрями в газі рівноімовірні.

Тоді з  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  отримуємо  $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$  і маємо

$$p = \frac{F_x}{\Delta S} = \frac{1}{3} n \cdot m v^2$$

Тепер зручно зняти обмеження на постійність швидкості і усереднити  $v^2$ , і середній тиск тоді буде дорівнювати

$$p = \frac{1}{3} n \cdot m \overline{v^2} \quad \text{або} \quad p = \frac{2}{3} n \cdot \overline{E_k}$$

де  $\overline{E_k}$  – середня кінетична енергія руху частинок.

Це основне рівняння МКТ пов'язує макроскопічну характеристику, середній тиск газу, з мікроскопічними – масою частинки, середньою енергією частинки, швидкістю їх руху.

Враховуючи, що щільність частинок  $n = \frac{N}{V}$ , де  $N$  – число частинок

газу, запишемо отримане рівняння у формі

$$pV = \frac{2}{3} N \overline{E_k} = \frac{2}{3} \frac{M}{\mu} N_A \overline{E_k}$$

З іншого боку, рівняння стану газу, яке пов'язує тиск  $p$ , об'єм  $V$  і температуру  $T$ , було відомо в якості часткових емпіричних законів, які мали проте певну математичну форму (Р.Бойль (1662) і Е.Маріотт (1676), Ж.Шарль (1787), Ж.Гей-Люссак (1802)). Через так званий об'єднаний газовий закон математична модель газового стану набула форми закону Клапейрона (1834) – Менделєєва (1874)



$$pV = \frac{M}{\mu} RT,$$

де  $M$  - маса всіх частинок газу, а  $\mu$  - його молярна маса,  $R$  – універсальна газова стала.

Об'єднання цих моделей газового стану відбувається введенням зв'язку між  $\bar{E}_k$  і  $T$ , оскільки середня кінетична енергія  $\bar{E}_k$  має основну властивість температури  $T$  – вона однакова для всіх частинок газу, що знаходяться в тепловій рівновазі. Тобто  $\bar{E}_k$  можна прийняти за міру температури газу:

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} kT, \text{ де } k = \frac{R}{N_A} \text{ – постійна Больцмана.}$$

Такі прості міркування привели до правильних співвідношень для газів, що підкоряються закону Клапейрона - Менделєєва (так званим ідеальним газам) і додали фізичний сенс енергетичній тепловій характеристиці – температурі.

Оскільки в математичній моделі обмеження (припущення) носять явний характер (тобто математично визначені), то існує можливість розвитку моделі, пом'якшення або зняття обмежень.

Наприклад:

I. Якщо маємо суміш декількох газів (тобто  $m$  – не постійна,  $M_i$  – маса  $i$ -ї компоненти суміші  $\mu_i$  – її молярна маса), тоді можна припустити, що сили, які діють на стінку посудини при зіткненні частинок певної компоненти, не залежать від сил, з якими діють інші компоненти суміші. Тоді середній тиск дорівнює сумі внесків окремих компонент суміші, які визначаються основним рівнянням МКТ для кожної компоненти (Дж. Дальтон (1801)):

$$pV = \left( \frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} + \dots \right) RT$$

Цей закон, як і припущення, відноситься до розріджених газів.

II. Можна ввести поправки на власний об'єм частинок і врахувати сили тяжіння між ними. Це приводить до рівняння стану «реальніших» газів – рівняння Ван дер Ваальса (1873):

$$\left( p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT,$$

де додаткові припущення «зведені» до постійних величин  $a$  і  $b$ . З'являється також можливість пояснення (опису) явищ перегрітої рідини та перенасиченої пари.

Звичайно, що і ці варіанти моделі є наближеними.

Приведені міркування показують, як математичне моделювання пролизує і пов'язує різні предметні галузі (механіка, термодинаміка, хімія). Слід підкреслити «наскрізну присутність» понять сили, імпульсу та енергії для опису механічних і теплових явищ. Таким чином в математичній моделі відбивається цілісність картини оточуючого світу, якому невідомий поділ на початкові предмети. Математичні моделі є носіями загальнопредметного в пізнанні, тому природно розглядати знання про математичне моделювання, уміння та досвід його використання – стрижнем загальнопредметної компетентності.

Математичне моделювання є одним з основних методів світорозуміння, особливо у пізнанні зв'язків мікросвіту та макросвіту. Адже молекули, атоми та електрони ми ніколи не відчуємо безпосередньо нашими органами чуття. Увесь мікросвіт сприймається і сприйматиметься «через прилад», тобто «у перерахунку» за деякою математичною моделлю. Ми припускаємо наявність мікрочастинок з певними властивостями (масою, розмірами, структурою, зарядом, магнітним моментом тощо). Отримуючи експериментальні (макроскопічні) результати такими, які очікуємо за моделлю, робимо висновок, що наші початкові уявлення (припущення моделі) багато в чому вірні. У протилежному випадку – працюємо над

уточненням або зміною моделі, а отже і наших уявлень про об'єкт.

#### Висновки.

Навчально-виховний процес у загальноосвітній школі повинен бути спрямований, серед іншого, на формування в учнів системи математичних знань і умінь, які повинні розглядатися як невід'ємна складова загальної культури людини, необхідна умова її повноцінного життя у сучасному суспільстві, універсальна мова науки і техніки, ефективний засіб моделювання і дослідження процесів і явищ навколишньої дійсності.

Європейський досвід впровадження компетентнісного підходу в різних системах сучасної освіти, виділення у переліку ключових компетентностей базових компетентностей у галузі математики підтверджує доцільність розгляду математичної компетентності із загальнопредметних позицій.

Компетентнісний підхід до розуміння місця і значення математичного знання є певним розвитком ідей використання міжпредметних зв'язків при вивченні шкільних дисциплін природничо-математичного циклу. Проте, головним стає не сам зв'язок знань з різних предметів та узагальнення певних розділів навчального матеріалу суміжних курсів, а формування пізнавальних ставлень та їх поєднання з практичними навичками, цінностями, емоціями, поведінковими компонентами, знаннями та вміннями, всього того, що можна мобілізувати для активної дії.

Математичні моделі є носіями загальнопредметного в пізнанні, тому природно розглядати знання про математичне моделювання та уміння і досвід його використання – стрижнем загальнопредметної компетентності учнів.

#### Література:

1. Державні стандарти базової і повної середньої освіти // Директор школи. 2003. – №6-7 (246-247). – С.3-17.
2. Навчальні програми для загальноосвітніх навчальних закладів (для 12-річної школи). – Див: [http://www.mon.gov.ua/education/average/new\\_pr](http://www.mon.gov.ua/education/average/new_pr)
3. Овчарук О.В. Розвиток компетентнісного підходу: стратегічні орієнтири міжнародної спільноти // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи. – К. : К.І.С., 2004. – С.6-15.

4. Пометун О.І. Теорія та практика послідовної реалізації компетентнісного підходу в досвіді зарубіжних країн // Компетентнісний підхід у сучасній освіті: світовий досвід та українські перспективи. – К. : К.І.С., 2004. – С.16-25.
5. Пометун О.І. Компетентнісний підхід – найважливіший орієнтир розвитку сучасної освіти // Рідна школа. – 2005. – №1. – С.65-69.
6. Зайцева Л.І. Формування елементарної математичної компетентності в дітей старшого дошкільного віку: Автореф. дис... канд. пед. наук: 13.00.08 / Інститут проблем виховання АПН України. – К., 2005. – 20с.
7. Secondary education in Europe: problems and prospects. – Strasbourg: CE publishing, 1997.
8. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360с.
9. Ходырева Н.Г. Методическая система становления готовности будущих учителей к формированию математической компетентности школьников: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 Волгоград, – 2004. – 179с.
10. Пінчук О.П. До проблем формування ключових компетенцій у старшокласників. Роль математики та інформатики у вирішенні цієї проблеми // Наука і сучасність: Зб. наук. пр. / Нац. пед. ун-т ім. М.П.Драгоманова. – К., Логос, 2002. – Том XXXIII. – С.109-116.
11. Пінчук О.П. Математика в економіці: Навчальний посібник для учнів і вчителів // Математика № 25 (325), 2005. – 55с.

#### Анотація

У статті «Математичне моделювання як стрижень загальнопредметної компетентності учнів (на прикладі навчання фізики)» автор розглядає знання математичного моделювання явищ природи і суспільства, а також уміння застосовувати його в діяльності як найважливішу характеристику загальнопредметної компетентності учнів.

На прикладі вивчення основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії показано, як метод математичного моделювання пронизує різні предметні області, пояснює одні явища і дає можливість описувати нові процеси.

#### Аннотация

В статье «Математическое моделирование как стержень общепредметной компетентности учащихся (на примере обучения физике)» автор рассматривает знание математического моделирования явлений природы и общества, а также умение применять его в деятельности в качестве важнейшей характеристики общепредметной компетентности учащихся.

На примере изучения основного уравнения молекулярно-кинетической теории показано, как метод математического моделирования пронизывает различные предметные области, объясняет одни явления и дает возможность описывать новые процессы.

#### Annotation

In the article the «Mathematical modelling as a core of students' general subject competence (on the example of teaching physics)» the author considers knowledge of mathematical modelling of the phenomena of nature and society, and the ability to apply it in activity as major description of general subject competence of student.

On the example of study of basic equation of the molecular-kinetic theory it is shown how the method of mathematical modelling permeates different subject spheres, explains one phenomenon and enables to describe new processes.