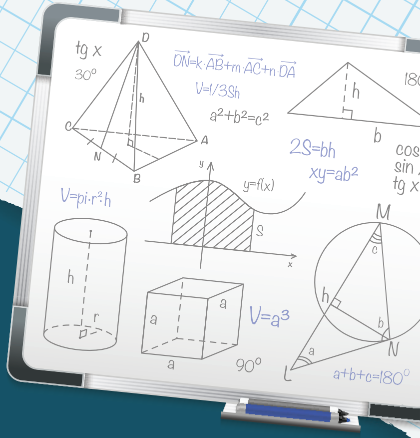
ОСВІТА
ВИДАВНИЧИЙ ДІМ

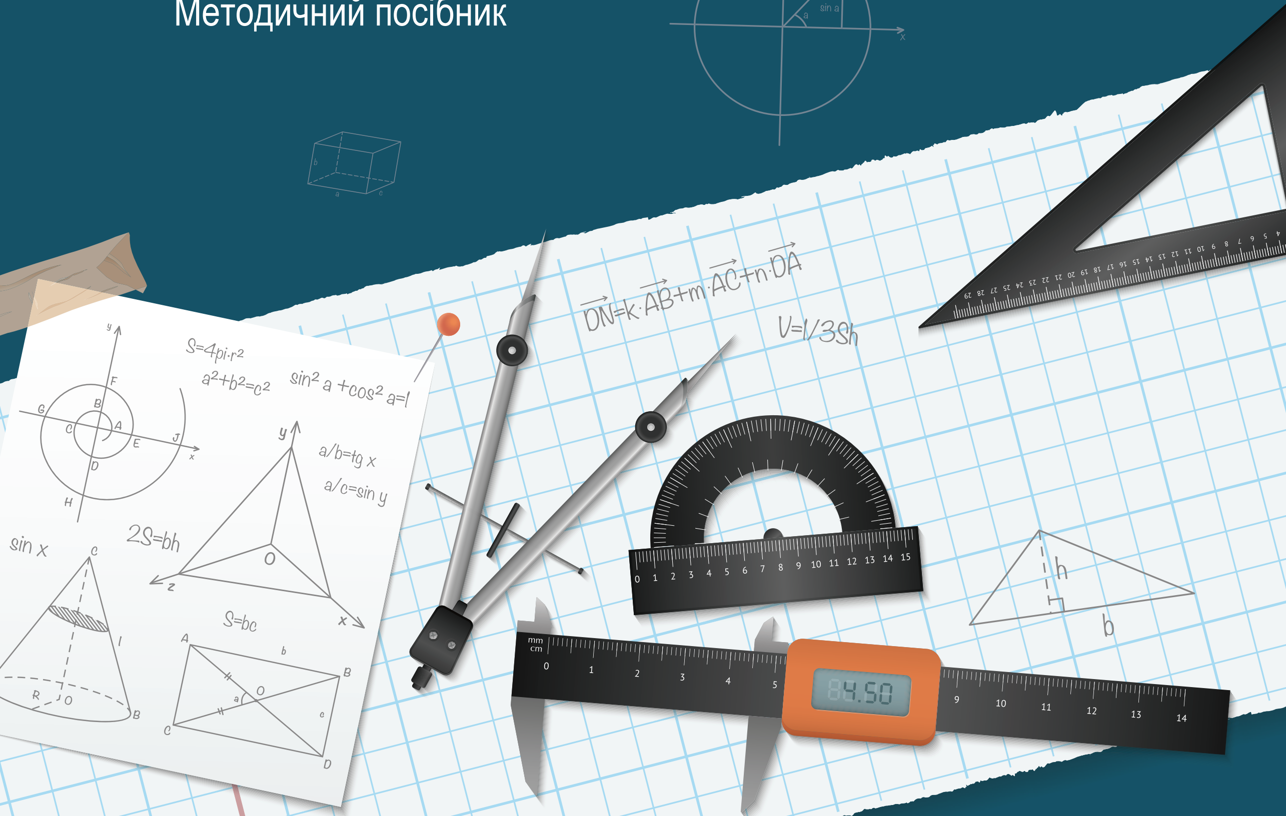
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ НАПН УКРАЇНИ · INSTITUTE OF PEDAGOGY OF THE NAES OF UKRAINE



Бурда М.І., Васильєва Д.В.,
Вашуленко О.П., Волошена В.В.,
Тарасенкова Н.А.

Прикладна спрямованість навчання математики в гімназії

Методичний посібник



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК
ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ

**Бурда М. І., Васильєва Д. В.,
Вашуленко О. П., Волошена В. В., Тарасенкова Н. А.**

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ГІМНАЗІЇ

Методичний посібник

Київ
Видавничий дім «Освіта»
2024

УДК 53(079.1)*7/9кл.
П75

Рекомендовано до друку
вченою радою Інституту педагогіки НАПН України
(*протокол № 13 від 18 грудня 2023 р.*)

Р е ц е н з е н т и

Годованюк Т., проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, доктор педагогічних наук, професор;

Сільвестрова І., директор Ліцею № 142 м. Києва, вчитель математики

П75 **Прикладна** спрямованість навчання математики в гімназії : Методичний посібник / Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В., Вашуленко О. П., Тарасенкова Н. А. [Електронне видання]. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. — 161 с.

ISBN 978-966-983-496-6 (ел.)

Пропонований посібник присвячено проблемі реалізації прикладної спрямованості навчання математики в гімназії. Розглянуто: пріоритети розвитку шкільної математичної освіти відповідно до концепції Нової української школи, психолого-дидактичні та методичні засади реалізації прикладної спрямованості навчання, особливості методики практико-орієнтованого навчання, вимоги до результатів навчання математики та їх реалізація.

Розглядаються сучасні форми, методи і засоби навчання алгебри та геометрії з урахуванням умов воєнного і повоєнного стану, а також методичні рекомендації щодо організації дистанційного та змішаного навчання.

Рекомендовано вчителям закладів загальної середньої освіти, методистам, науковцям, а також викладачам дисциплін циклу професійної методичної підготовки майбутніх учителів математики в класичних та педагогічних університетах.

УДК 53(079.1)*7/9кл.

ISBN 978-966-983-496-6 (ел.)

Зміст

Передмова 4

Розділ 1. **Загальні питання прикладної спрямованості навчання математики в гімназії** 7

1.1. Пріоритети розвитку шкільної математичної освіти відповідно до концепції Нової української школи 7

1.2. Психолого-дидактичні та методичні засади реалізації прикладної спрямованості навчання математики 17

1.3. Особливості методики практико-орієнтованого навчання математики 29

1.4. Практико-орієнтоване навчання математики в умовах воєнного і повоєнного стану 41

Література до розділу 1 61

Розділ. 2. **Вимоги до результатів навчання математики в гімназії** . 64

2.1. Компетентнісний потенціал шкільної математики . . . 64

2.2. Результати навчання математики та їх оцінювання . . 79

Література до розділу 2 95

Розділ 3. **Методика практико-орієнтованого навчання геометрії в гімназії** 96

3.1. Стан розроблення проблеми в освітніх системах різних країн 97

3.2. Практико-орієнтоване вивчення геометричних понять 100

3.3. Реалізація змістово-методичної лінії практико-орієнтованого навчання 109

3.4. Розвиток просторового мислення учнів під час навчання геометрії 124

Література до розділу 3 129

Розділ 4. **Методика практико-орієнтованого навчання алгебри** . . 131

4.1. Включення в зміст навчання 7–9 класів тем, що посилюють прикладну спрямованість шкільного курсу алгебри 132

4.2. Формулювання реальних життєвих ситуацій перед введенням алгебраїчних понять 145

4.3. Використання реальних прикладів і ситуацій під час розв'язування абстрактних алгебраїчних задач . 147

4.4. Розв'язування прикладних задач, обговорення та дослідження різних практичних ситуацій засобами алгебри 149

4.5. Посилення міжпредметних зв'язків алгебри з іншими предметами 156

Література до розділу 4 160

Передмова

Проблема шкільної математичної освіти набула особливого значення у зв'язку з новим соціальним замовленням щодо мети, завдань і змісту навчання відповідно до Закону України «Про повну загальну середню освіту» (Указ Президента України від 13.03.2020 р.), Концепції реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року (Постанова КМ України від 14.12.2016 р. № 988-р), Державного стандарту базової середньої освіти (Постанова КМ України від 30.09.2020 р. № 898), Концепції національно-патріотичного виховання в системі освіти України (Наказ МОН України від 06.06.2022 р. № 527), Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) (Розпорядження КМ України від 05.08.2020 р. № 960-р). Лейтмотивом освіти стають формування математичної та інших ключових компетентностей, потрібних для успішної самореалізації в суспільстві; пріоритет соціально-мотиваційних факторів і загальнолюдських цінностей; методологічна переорієнтація освіти на особистість, найповнішу реалізацію здібностей, інтелектуального, духовного і творчого потенціалу молодої людини, на вироблення стійких механізмів самонавчання, самовиховання та саморозвитку. Центрованість навчального процесу на особистість учня вимагає нових підходів до його організації. У методичному посібнику обґрунтовано, що їх істотними ознаками мають бути особистісно орієнтований, компетентнісний та діяльнісний підходи до навчання математики; прикладна орієнтація змісту математики, що передбачає інтегративні засади його добору; укрупнення навчального матеріалу; посилення діяльнісної і творчої складових у змісті освіти, його соціальної ефективності; забезпечення пріоритету розвивальної функції навчання математики; запровадження різних рівнів змісту й вимог до його засвоєння, нових педагогічних технологій, зокрема інформаційних; диференціації навчання (за змістом, рівнями, темпом) з оптимальним поєднанням комплексних і окремих методичних цілей, макро- і мікроструктури навчального процесу.

Нові, надзвичайно актуальні суспільні та освітні запити зумовлені російсько-українською війною. Пріоритетною проблемою методики практико-орієнтованого навчання математики є розроблення змісту, організаційних форм, методів, прийомів і засобів навчання в умовах воєнного й повоєнного стану. Національна рада з відновлення України від наслідків війни відповідно до Указу Президента від 21 квітня 2022 року № 266/2022 розробила план заходів із післявоєнного відновлення та розвитку України, перелік пропозицій щодо пріоритетних реформ і стратегічних ініціатив, реалізація яких є необхідною для ефективної роботи та відбудови України у воєнний і післявоєнний періоди (https://www.kmu.gov.ua/storage/app/sites/1/recoveryrada/ua/education-and-science.pdf). Комплекс заходів із розділу «Освіта і наука» (напрям «Загальна середня освіта») спрямовано на перегляд змісту освітнього процесу, підвищення якості та доступності освіти, синхронізації її з освітнім простором Європейського Союзу. Розвиток системи освіти має фокусуватися на основних компетентностях та інноваціях задля повномасштабного впровадження реформи НУШ й адаптації навчання до сучасних потреб суспільства. Передбачається оновлення освітніх програм, інтеграція здоров'язбережувальної та національно-патріотичної складової у зміст навчальних предметів; впровадження STEM-освіти; реалізація проєктів, спрямованих на психологічне і ментальне здоров'я та безпеку життєдіяльності, що дасть змогу формувати в учнів необхідні для життя компетентності. Усе це стосується й математичної освітньої галузі.

У посібнику особлива увага приділяється компенсації освітніх втрат із математики, зумовлених функціонуванням системи освіти, організацією освітнього процесу й особливостями навчальної діяльності учнів в умовах війни. За цих обставин важливими формами навчання, зокрема математики, є дистанційна та змішана, оскільки їх виважене поєднання дає змогу суттєво мінімізувати освітні втрати. У цьому посібнику подано рекомендації щодо організації таких форм навчання.

У період війни, яку Російська Федерація розв'язала і веде проти України, виникає нагальна необхідність переосмислення зробленого і здійснення системних заходів, спрямованих на посилення національно-патріотичного виховання дітей і молоді. У Концепції національно-патріотичного виховання в системі освіти України та Заходів щодо реалізації Концепції до 2025 року [18] визначено мету та виховні завдання, принципи виховання та шляхи їх реалізації в освітньому процесі, зокрема з математики. Важливою складовою патріотичного виховання, яка в часи воєнного стану набуває пріоритетного значення, є військово-патріотичне виховання, орієнтоване на формування в молодого покоління готовності до захисту України, бажання здобувати військові професії та проходити службу в Збройних Силах України.

Шкільна освіта розглядається як інтегрований результат навчання, що забезпечує набуття ключових компетентностей, здатність успішно діяти в навчальних і реальних життєвих ситуаціях. У процесі вивчення шкільних предметів і застосування набутих знань учні мають використовувати загальні методи та прийоми діяльності. Одне із завдань освіти — створити необхідні умови для їх формування. Особлива роль у розв'язанні цього завдання належить математиці, оскільки: 1) вона є наукою про математичні моделі, які застосовуються в різних освітніх галузях; 2) математична та інші ключові компетентності взаємопов'язані; 3) математика, на відміну від інших предметів, передбачає спеціальне ознайомлення із загальними методами та прийомами. Тому в навчанні математики має бути реалізовано метапредметний підхід (*з грец.* мета — понад), спрямований як на успішне засвоєння навчального матеріалу, так і на вироблення вмінь застосовувати його під час вивчення інших шкільних предметів і розв'язування завдань із різних галузей діяльності. Тобто в процесі навчання має забезпечуватись оволодіння учнями та ученицями загальними методами і прийомами інтелектуальної та практичної діяльності. Це є важливою умовою вироблення вмінь самостійно опановувати математику, розробляти стратегії та плани дій для розв'язання проблем. Нова мета шкільної математичної освіти акцентується на формуванні математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя. З огляду на це важливою вимогою до шкільних засобів навчання є метапредметний підхід у відборі навчального матеріалу.

Тому *першочергове завдання в навчанні математики в гімназії* — створення нових практико-орієнтованих методик і технологій, використання яких підвищить навчальні досягнення учнів, посилить їх креативність і критичне мислення, допоможе вчителям організувати якісне навчання математики та психологічну підтримку учнів, забезпечить відповідність результатів навчання сучасним освітнім і суспільним запитам, зумовленим російсько-українською війною та потребами повоєнної відбудови нашої держави. Методичний посібник складається із чотирьох розділів, кожен із яких поділено на окремі пункти. Поданий матеріал супроводжується конкретними прикладами організації навчання математики в гімназії, які вчителі зможуть використовувати в реальному освітньому процесі.

Розділ 1. Загальні питання прикладної спрямованості навчання математики в гімназії

1.1. Пріоритети розвитку шкільної математичної освіти відповідно до концепції Нової української школи

(*М. Бурда, Н. Тарасенкова*)

Розв'язання важливих освітніх завдань сьогодення передбачає проєктування (відображення) крізь призму психолого-дидактичних закономірностей тих факторів, які впливають на формування змісту шкільного курсу математики й визначають методологічні підходи в навчанні математики.

Одним із таких факторів є *значення математичної освіти для життєдіяльності особистості* в сучасному суспільстві. Воно зумовлено тим, що математична освіта молодого покоління — індикатор готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні та впровадженні нових технологій і сучасної техніки, у тому числі й військової, у сприйманні наукових і технічних ідей. Зростає роль практико-орієнтованої математичної підготовки в економіці, будівництві, управлінні та суспільних процесах, що надзвичайно важливо у воєнний час і в період відбудови держави. Отже, від якості математичної освіти залежить науковий, технічний, технологічний, економічний і оборонний потенціал держави.

Математична освіта — важлива складова загальноосвітньої підготовки. Місце математики в системі шкільної освіти визначається її роллю у формуванні навчальних, соціальних, загальнокультурних і життєвих компетентностей, цінностей громадянського суспільства, в особистісному розвитку учнів з орієнтацією на продовження навчання, у формуванні критичного мислення, розвитку креативності та творчих здібностей учнів.

Математика — один із базових предметів загальної середньої освіти, який забезпечує успішне вивчення інших дисциплін, насамперед природничо-наукового циклу. Це пояснюється розширенням предмета сучасної математики, адже вона є не лише галуззю знань, але й потужним методом наукового пізнання в інших науках. Водночас відбулася якісна зміна цього методу: не від реальних експериментальних даних до їх математичного вираження, а від математичних форм до їх реальних еквівалентів. Якщо раніше застосування математичного методу в інших науках зводилося переважно до статистичної обробки емпіричних даних, то нині йдеться про математичний аналіз структури основних об'єктів вивчення і створення та дослідження відповідних математичних моделей.

Отже, визначаючи обсяг і рівень математичної підготовки учнів гімназії, доцільно враховувати насамперед її роль у розвитку та повноцінній діяльності особистості в основних сферах суспільного життя.

Урахування соціальних потреб суспільства і цілей, які воно ставить перед навчанням математики, має значний вплив на відбір практико-орієнтованого змісту. Проблема цілей освіти мусить бути одним із засобів конструювання навчального матеріалу й визначення пріоритетів його відбору. Важливо правильно враховувати економічні, соціально-культурні й духовні тенденції розвитку суспільства, оскільки вони зумовлюють спрямованість змісту та співвідношення гуманітарного і природничо-математичного циклу дисциплін у навчальному плані школи.

Добір змісту навчання пов'язаний із відображенням компонентів математичної науки у змісті шкільної математичної освіти та з його психолого-дидактичним обґрунтуванням. У зв'язку із цим актуальними є такі питання:

- урахування тенденцій розвитку математики (генерування знань, посилення функції теорії в науці, інтеграція і диференціація науки);
- відображення математики як діяльності через методологічні знання, методи та способи діяльності, що відповідають логіці пізнання в математиці;
- реалізація в змісті освітнього, розвивального й виховного потенціалу математики;
- орієнтація на інтегровані курси математики;
- пошук нових підходів до інтеграції змісту й реалізації міжпредметних зв'язків як засобу цілісного, системного розуміння та пізнання світу.

Урахування основних видів людської діяльності та її структури й особливостей — важливий фактор формування змісту шкільної математики. Основні сфери суспільного життя (сімейно-побутова, соціально-політична, духовно-культурна, управлінська, матеріального виробництва), в основі яких лежать відповідні види діяльності, потрібно педагогічно переосмислити з урахуванням психологічних і навчальних можливостей учнів, згрупувати й відобразити їх у змісті освіти: знаннях про види діяльності, уміннях і навичках їх реалізації, досвіді емоційно-ціннісного ставлення до різних видів дійсності та системи цінностей суспільства.

Традиційний зміст навчання математики, що формувався десятиріччями, досі забезпечував належний рівень математичної підготовки учнів. Проте *зміни в технічній, виробничій, освітній і комунікаційній галузях* ставлять нові вимоги до математичної підготовки та спонукають до перегляду традиційного змісту і з'ясування тенденцій подальшого його розвитку (з обов'язковим дотриманням наступності). Не можна не враховувати й те, що дедалі зростає роль формально-логічного апарату математики, алгоритмів та евристик, математичного моделювання, статистико-ймовірнісних методів в економіці, явищах виробничо-технічного характеру, управлінні високоякісними і високоточними технологічними процесами.

На зміст математики в гімназії впливає і профільне навчання в старшій школі. Тому важливим завданням навчання математики в гімназії є організація *допрофільної підготовки учнів* із метою надання їм допомоги в раціональному виборі майбутнього навчального профілю. Допрофільна підготовка реалізується насамперед запровадженням різних курсів математики (загальноосвітнього, поглибленого, за вибором, факультативного), що стануть базою для успішного вивчення учнями математики як профільного предмета.

Отже, відповідність змісту навчання суспільно-економічним запитам держави має бути основою нової філософії загальної середньої математичної освіти.

Визначаючи *пріоритети розвитку математичної освіти,* необхідно враховувати фактори, які впливають на формування її змісту. Основні з них:

- особистісна орієнтація змісту математичної освіти;
- компетентнісний та діяльнісний підходи до навчання математики;
- посилення прикладної та практичної спрямованості навчання;
- використання в освітньому процесі нових педагогічних технологій.

Особистісна орієнтація змісту математичної освіти передбачає: рівневу і профільну диференціацію навчання, а в гімназії — допрофільну підготовку; рівний доступ до якісної математичної освіти; гуманізацію освіти — створення реальних умов для інтелектуального, соціального й морального розвитку особистості; посилення діяльнісної, ціннісної і творчої складових у змісті математичної освіти. Особистісно орієнтований підхід в освіті розуміється як забезпечення взаємодії у ході навчання, умов для індивідуального розвитку, розкриття здібностей, розуміння себе, становлення суб'єктності учня. Це передбачає звернення до суб'єктних проявів особистості та розуміння її внутрішнього світу. Центральним завданням особистісно орієнтованого навчання є *формування позитивної Я-концепції* учня як системи усвідомлених і неусвідомлених уявлень про себе, на основі якої він будує свою поведінку. Саме тому особливого значення набуває створення під час навчання математики ситуацій успіху — суб'єктивних психічних станів задоволення учня наслідками навчально-пізнавальної діяльності. Успіх, який переживає учень, активізує його приховані можливості, сприяє емоційно-ціннісному ставленню до об'єктів пізнання та реалізації розумових зусиль.

Суб'єктність особистості, індивідуальність учнів виявляються у вибірковості до пізнання світу (змісту, виду й форми його подання, способів оволодіння навчальним матеріалом), у стійкості цієї вибірковості й емоційно-ціннісному ставленні до об'єктів пізнання. В особистісно орієнтованому навчанні зміст, методи і прийоми, засоби й організаційні форми мають спрямовуватися на розкриття і використання суб'єктного досвіду кожного учня та допомогу в становленні особистісно значущих способів пізнання шляхом організації навчально-пізнавальної діяльності. В освітньому процесі опанування суспільно-історичного досвіду, що задається навчанням, повинно відбуватися не за рахунок витіснення індивідуального досвіду учня, а шляхом їх постійного узгодження, використання накопиченого. На цих засадах мають розроблятися в підручниках навчальні тексти та інші компоненти апарату організації засвоєння.

У процесі засвоєння й застосування математичних знань, навичок і вмінь закладаються об'єктивні передумови для *збільшення не тільки суто математичного, а й загальнокультурного потенціалу школярів*, створюються широкі можливості для формування й розвитку мислення, пам'яті, уявлень та уяви учнів, їх наукового світогляду, алгоритмічної, інформаційної та візуальної культури, умінь встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між окремими фактами, обґрунтовувати твердження, математизувати реальні ситуації. За рахунок дидактично виваженої організації навчання математики можна істотно впливати на інтелектуальний розвиток учнів, формувати позитивні риси особистості, розвивати розумову активність, пізнавальну самостійність, саморегуляцію та творчість у навчальній діяльності. Тому зміст навчання має реалізовувати особистісно орієнтовану модель навчання, центровану на особистості учня. Таке навчання орієнтоване *як на власне математичну освіту, так і на освіту за допомогою математики*, на вироблення якостей мислення, необхідних для адаптації та повноцінного функціонування людини в сучасному суспільстві, на засвоєння математичного апарату як засобу визначення і розв'язання реальних проблем дійсності. Крім того, навчання математики мусить *сприяти національно-патріотичному вихованню*, головною домінантою якого є формування в учнів національної самосвідомості, ціннісного ставлення до суспільства, держави й самого себе, виховання любові до рідної землі, природи, українського народу, шанобливого ставлення до його історії, культури, традицій, а також поваги до культури всіх народів, які населяють Україну, усвідомлення єдності власної долі з долею своєї країни та необхідності брати участь у розбудові й захисті своєї держави.

Під час добору змісту навчання необхідно враховувати особливості організації сприймання й опрацювання учнями даних вербального і невербального характеру. А саме:

- під час дії когнітивних подразників спостерігається нестійкість і велика рухливість активаційних процесів;
- характерним є широке одночасне залучення різних зон кори головного мозку на всіх етапах сприйняття й опрацювання даних (сенсорного аналізу, інформаційного синтезу, категоризації стимулу);
- виявляються вищі швидкості опрацювання даних структурами правої півкулі головного мозку;
- провідним здебільшого є наочно-образне мислення, яке наближається до оперування образами-категоріями (відомо, що такі образи значно багатші, ніж сконцентроване в понятті логізоване знання), тим більше тоді, коли словесно-логічне мислення ще не є досконалим, а перебуває у стадії становлення;
- відбувається значне ускладнення пам'яті, водночас обсяг пам'яті вірогідно зростає, а швидкість запам'ятовування зменшується.

Тому важливо формувати в учнів як логічне, так і візуальне мислення, що підтверджується даними комісії Європейського математичного товариства (EMS).

Спираючись на особливості зв'язків між змістом і формою, необхідно враховувати роль діалектичної єдності логічного й візуального в математичній підготовці учнів, завчасно виявляти можливі конфлікти між логічним і візуальним (як об'єктивно зумовлені, так і ні) та дидактично виважено добирати способи їх нівелювання. Задля цього в навчанні слід поєднувати логічну строгість і наочність, зокрема дедукцію й абстрактність навчального матеріалу опирати на наочність і математичну інтуїцію учнів.

Компетентнісний підхід до добору змісту математичної освіти «…передбачає здатність розвивати і застосовувати математичні знання та методи для розв'язання широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини» [16, с. 3]. Відповідно до цього підходу вимоги до обов'язкових результатів навчання математики передбачають, що учень: досліджує проблемні ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; моделює процеси і ситуації, розробляє стратегії та плани дій для розв'язання проблем; критично оцінює процес і результат розв'язання проблем; розвиває математичне мислення для пізнання і перетворення дійсності, володіє математичною мовою.

Виділено складові математичної компетентності.

Уміння:

- оперувати текстовою і числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі;
- установлювати кількісні та просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо);
- вибирати, створювати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати;
- здійснювати прогнози в контексті навчальних і практичних задач;
- доводити правильність тверджень; застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних із реальними об'єктами; використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях.

Ставлення:

- готовність шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів;
- усвідомлення важливості математики як мови науки, техніки й технологій [16].

Крім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування інших ключових компетентностей як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях та бути відповідальним за свої дії на основі набутих знань, умінь і досвіду. Ключові компетентності сприяють виробленню в учнів ціннісних орієнтирів, правильної поведінки щодо енергоресурсів, свого здоров'я, фінансів, навколишнього середовища, стосунків між людьми, усвідомленню значення математичної освіти для успішної життєдіяльності в сучасному суспільстві.

Діяльнісний підхід до навчання математики — необхідна умова практико-орієнтованого навчання. Цей підхід передбачає: постійне залучення учнів до різних видів навчально-пізнавальної діяльності; засвоєння формально-логічних і операційних знань (як треба діяти в конкретних ситуаціях, щоб досягти поставленої мети); оволодіння не лише готовим знанням, але й різними способами міркувань, застосовуваних у математиці; створення методичних ситуацій, які заохочують учнів самостійно відкривати математичні факти. Необхідно, де це можливо, не лише показувати виникнення математичного факту із практичної ситуації, а й ілюструвати його застосування на практиці.

Зміст навчального матеріалу має забезпечувати не екстенсивне, а інтенсивне навчання й самонавчання учнів, перенесення акцентів зі збільшення обсягу інформації, призначеної для засвоєння, на вироблення вмінь використовувати її для досягнення певних цілей, тобто на інтелектуальний розвиток дитини. Знати математику — це вміти її застосовувати (розв'язувати задачі, користуватися математичною мовою, доводити твердження, критично аналізувати свої міркування). З огляду на це навчальний матеріал повинен містити схеми розв'язування задач, загальні підходи до моделювання прикладних ситуацій, відомості про суть задач різних видів, їх склад і структуру. Зміст курсу математики має вміщувати алгоритми й евристики, якими визначається процес переходу від вихідних даних до шуканого результату (алгоритми виконання арифметичних дій, основних побудов, перетворень виразів, обчислень за формулами; евристики розв'язування певних типів задач, доведення теорем, виконання допоміжних побудов тощо); а також завдання на самостійні пошуки алгоритмів і евристик шляхом узагальнення розв'язань певних груп задач. У підручнику доцільно вміщувати поради щодо того, як діяти у тій чи іншій навчальній ситуації, сформульовані у вигляді правил або вказівок. Останні спрямовані на розпізнавання математичних залежностей і застосування понять, теорем або способів розв'язування задач, а також сприяють ефективному виробленню як окремих, так і узагальнених умінь.

Посилення прикладної і практичної спрямованості навчання — це орієнтація змісту, форм, методів і засобів навчання на застосування математики в техніці, технологіях і суміжних науках, у майбутній професійній діяльності та побуті; на розв'язування задач і вироблення вмінь самостійної математичної діяльності, що забезпечує реалізацію компетентнісного підходу до організації освітнього процесу. Прикладна спрямованість змісту математики забезпечить цілісну соціально ефективну математичну підготовку учнів: достатність знань, умінь і навичок для успішного використання їх як під час вивчення теоретичного матеріалу, розв'язування математичних задач і задач практичного змісту, так і для оволодіння іншими предметами в процесі навчання. Не менш важливо формувати спроможність учнів застосовувати й іншу стратегію діяльності в умовах проблемної ситуації, яку людина має в реальному житті, — від «знайти» (потреба, проблема) до добору достатніх даних, які дають змогу розв'язати цю проблему.

Розвиток комп'ютеризації, інформаційних мереж, автоматизованих інформаційних систем висуває специфічні вимоги до стилю мислення людини, а отже і до змісту шкільної математики. Одна з них пов'язана з необхідністю внести до шкільного курсу елементи дискретної математики (питання математичної логіки в їх прикладному аспекті, теорії графів, комбінаторики, системи числення тощо). Уведення елементів дискретної математики дасть змогу, з одного боку, більш результативно опановувати інформатику, а з іншого, — посилити прикладну спрямованість курсу шляхом розширення меж застосування математичних методів у природничих і гуманітарних дисциплінах.

Однак основна проблема полягає в тому, що в природничих і гуманітарних дисциплінах застосовують різні за своєю природою математичні моделі, а також способи побудови й дослідження цих моделей. У природничих дисциплінах провідну роль відіграють кількісні моделі — як результат кількісного вираження реальних процесів. Тоді як у гуманітарних курсах переважають структурні моделі, побудова й дослідження яких потребує залучення нових розділів математики, насамперед елементів дискретної математики. *Отже, вдале поєднання неперервної і дискретної математики має бути визначальною рисою сучасних її курсів.*

Практико-орієнтований зміст математики повинен розкривати її гносеологічне значення. Один зі шляхів — ознайомлення учнів як із поняттям математичної моделі, так і з методом математичного моделювання, вироблення уявлень про роль цього методу в науковому пізнанні та практиці, формування вмінь будувати простіші математичні моделі.

Вивчаючи математику, школярі мають усвідомити, що процес її застосування до розв'язування будь-яких практичних задач розчленовується на такі етапи:

1) формалізація (перехід від ситуації, описаної в задачі, до формальної математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до чітко сформульованої математичної задачі);

2) розв'язування задачі в межах побудованої моделі;

3) інтерпретація одержаного розв'язку задачі в термінах вихідної ситуації.

Зміст математики в гімназії, як правило, не виходить за межі математичної моделі, тобто увага приділяється лише другому етапу — розв'язанню задач, уже сформульованих математичною мовою. Це стосується і задачного матеріалу, який у більшості випадків розвиває суто технічні навички. Однак зміст навчального матеріалу повинен забезпечувати оволодіння учнями математичною культурою такого рівня, коли засвоюються всі три виділені етапи застосування математики до розв'язування задач, які виникають у людській практиці.

Зазначимо, що це завдання найбільш повно реалізується у процесі розв'язування компетентнісних задач (К-задач) і так званих рафінованих сюжетних задач. У рафінованих сюжетних задачах, які вже стали традиційним елементом задачного блоку шкільних підручників, даних наведено стільки, скільки потрібно, щоб відповісти на запитання задачі. Натомість у компетентнісних задачах може бути як нестача даних (треба добирати з різних джерел), так і надлишок даних (потрібно сортувати, відсіюючи зайві). Також вони можуть містити «шум» — додаткові пізнавальні дані, які є цікавими, але не суттєвими для розв'язання задачі. К-задачі, як правило, формулюються з використанням Я-словника учня або словника його найближчого оточення. Для навчання розв'язування К-задач потрібна нова методика.

Не менш важливими для реалізації поставлених завдань є задачі на оптимізацію. Питання прийняття оптимальних рішень людині доводиться розглядати на різних рівнях: від побутового до проблем управління, транспорту, ефективного використання природних багатств — тобто необхідність розв'язувати оптимізаційні проблеми різної складності так чи інакше постає перед кожним членом суспільства. Дослідження побудованих математичних моделей потребує вмінь знаходити геометричні образи наявних алгебраїчних співвідношень і, навпаки, переходити до алгебраїчних співвідношень від геометричних образів.

Отже, під час визначення стратегічних напрямів удосконалення шкільної математичної освіти пошук шляхів і засобів озброєння учнів уміннями будувати математичні моделі взагалі, а оптимізаційні зокрема, стає актуальним завданням. У зв'язку із цим підручники з математики повинні містити простіші оптимізаційні задачі та основні способи їх розв'язання.

Головним методом математики, що випливає із означення її предмета, є *абстрагування*, що має на меті *створити мисленнєві образи, відповідні практичному досвіду*. Добираючи зміст, важливо правильно абстрагуватися від властивостей реальних предметів, щоб забезпечити мисленнєві переходи від предметів до відповідних наочних образів, і навпаки. Від цього залежить науковість викладу матеріалу і його прикладна спрямованість. Розглянемо шкільну геометрію. Вона вивчає геометричні фігури та їх властивості, усвідомлені шляхом абстрагування від реального змісту предметів, коли до уваги береться лише їх форма й розміри або лише форма (поверхня, площина, лінія, точка). Складність полягає в тому, що результати абстрагування не завжди можна інтерпретувати однозначно. Так, кут визначається як фігура, яка складається з двох променів зі спільним початком. Але таких кутів на практиці й на складніших геометричних фігурах немає. Є кути, утворені двома відрізками зі спільним кінцем (кути трикутника, кут між вусиками кімнатної антени, кут між ребрами піраміди тощо). Тобто мисленнєвий образ кута, який закладено в його означенні, не підкріплюється реально, не має матеріального змісту.

Невирішене питання методики геометрії пов'язане з геометричними величинами. Геометричні фігури можуть мати не лише певні властивості, але й кількісну міру цих властивостей. Довжина, площа, об'єм — це властивості геометричних фігур. Кількісні міри цих властивостей (міри довжини, площі, об'єму) є числовими характеристиками фігур. У змісті геометрії ці поняття не завжди розмежовуються. Візьмімо загальне поняття многокутника. В елементарній геометрії розрізняють два різні поняття, які позначають терміном «многокутник»:

многокутник як певна лінія і многокутник як певна область. Вживаються різні назви цих фігур, наприклад, «одномірний многокутник» і «двомірний многокутник». Перший не має числової характеристики — площі, а другий має. У шкільній геометрії трапляються такі підходи. Дається одне означення многокутника як області: частина площини, обмежена простою замкненою ламаною, разом із цією лінією називається многокутником. Або спочатку дається «каркасне» означення: проста замкнена ламана називається многокутником. Пізніше, перед вивченням площ фігур, робиться уточнення: многокутник розглядатимемо разом із його внутрішньою областю. Це свідчить про те, що розробляючи зміст математики і відображаючи його в навчальних програмах і підручниках, маємо багато запитань, відповіді на які не є однозначними й потребують детального аналізу, експериментальної перевірки та обговорення результатів.

Прикладна спрямованість курсу передбачає не лише правильне розкриття змісту математичних понять, а й виділення конкретних ситуацій і явищ, для опису яких ці поняття застосовуються.

Використання у процесі навчання математики нових педагогічних технологій, зокрема інформаційних, які спрямовано на моделювання освітніх середовищ, їх організаційних, змістових і методичних компонентів, дає змогу посилити самостійність учнів у формуванні компетентностей, викликати інтерес до вивчення математики. Застосування програмно-педагогічних засобів допомагає інтенсифікувати навчання, активізувати навчально-пізнавальну й дослідницьку діяльність учнів. У цьому процесі враховують такі характеристики програмно-педагогічних засобів:

1) *інтегрованість* — застосування тієї самої наочності з різним цільовим призначенням; поєднання наочно-образної інформації зі знаково-символьною, спільний аналіз яких сприяє виробленню евристичних, дослідницьких умінь; підкріплення графічних образів понять і властивостей геометричних фігур їх числовими характеристиками, що дає змогу проводити дослідження;

2) *конструктивність* — перенесення комп'ютерних зображень реальних предметів і їх властивостей на відповідні моделі, де увага приділяється поелементному їх створенню, унаслідок чого учень самостійно формулює означення нових понять, властивості математичних об'єктів чи способи діяльності;

3) *інтерактивність* — використання ППЗ у різних методичних технологіях; підтримання активних методів навчання; моделювання й конструювання математичних об'єктів; логічна організація фрагментів навчального матеріалу;

4) *візуалізація* — унаочнення абстрактних понять, різних граничних переходів шляхом використання відповідних динамічних моделей; різне їх перетворення (переміщення, зміна форми й розмірів, розташування на площині), що сприяє розвитку образного мислення учня/учениці, його/її творчих та евристичних складових.

1.2. Психолого-дидактичні та методичні засади реалізації прикладної спрямованості навчання математики

(*М. Бурда*)

Фактори та пріоритети розвитку шкільної математичної освіти дають змогу з'ясувати *принципи* або психолого-дидактичні й методичні положення, які варто враховувати, добираючи зміст навчального матеріалу з математики.

Принцип соціальної ефективності. Математичні знання мають бути достатніми для продовження освіти. Соціальна ефективність змісту передбачає *реалізацію методичною системою навчання основних функцій математичної освіти:* власне математична освіта; освіта за допомогою математики; спеціалізована — як елемент допрофільної підготовки. Традиційно домінувала перша функція. Це виправдано, оскільки навчання математики має забезпечувати достатньо високий рівень підготовки, необхідний для формування майбутнього науково-технічного, технологічного й гуманітарного потенціалу суспільства. Проте нова соціально-економічна ситуація потребує перегляду значимості цих функцій. Більшу увагу треба приділяти другій функції (освіта за допомогою математики), яка полягає у спрямуванні змісту предмета на вироблення якостей мислення, необхідних для адаптації та повноцінного функціонування людини в суспільстві, на засвоєння математичного апарату як засобу постановлення й розв'язання проблем реальної дійсності. Із цією метою в державних документах (стандарті, навчальних програмах) мають фіксуватися не лише переліки математичних умінь, а й деталізовані рівні математичного розвитку, яких учні мають досягти на другому ступені навчання.

Принцип відповідності. *Компетентнісна орієнтація змісту передбачає врахування структури і рівнів навчальної математичної діяльності учнів*. Зміст навчання й тип мислення взаємозумовлені: рівень змісту (загальноосвітній, поглиблений) проєктує певний тип мислення (переважно емпіричний чи теоретичний) і, навпаки, останній враховується у процесі добору змісту. Мислення учня реалізується в його навчальній діяльності, яка охоплює взаємозв'язані компоненти: 1) мотиваційний (інтереси, потреби, мотиви); 2) змістовий (формально-логічні й операційні знання); 3) процесуально-операційний (методи, способи й орієнтири діяльності); 4) прогностичний (ухвалення рішення, складання програми діяльності, передбачення результату). Залежно від змісту компонентів у навчальній діяльності переважають емпіричні (чуттєво-предметні) або теоретичні (раціональні) узагальнення.

Особливості навчальної діяльності, де домінують емпіричні узагальнення: засвоєння матеріалу шляхом аналізу його чуттєво-предметних властивостей; встановлення родо-видових залежностей у класифікаціях; упорядкування знань на наочно-інтуїтивній основі за зовнішніми ознаками. Послідовність відповідних дій: аналіз одиничного — предметних моделей або уявлень про них; з'ясування особливого — порівняння й виділення спільних ознак, їх узагальнення; формулювання загального у вигляді гіпотези; доведення або спростування гіпотези; усвідомлення відповідного способу діяльності. Така навчальна діяльність може бути результатом вивчення загальноосвітнього курсу математики.

Навчальна діяльність, де домінують теоретичні узагальнення, характеризується: засвоєнням системи узагальнених знань і способів діяльності; відшуканням у математичних фактах істотних зв'язків і відношень шляхом аналітико-синтетичної, рефлексивної діяльності; вираження зв'язків і відношень у вигляді загальних ідей, принципів, понять, які об'єднують матеріал у систему. Послідовність дій і операцій: аналіз одиничного — виділення істотного відношення, необхідного для існування певного математичного факту; з'ясування особливих форм існування істотного відношення і їх моделювання; встановлення єдності істотного відношення і його особливих форм; конструювання способу діяльності. Така навчальна діяльність — результат поглибленого вивчення математики. Наприклад, аналіз виведення площ паралелограма, трикутника і трапеції (одиничного) дає змогу знайти особливе, а потім дійти до загального принципу знаходження площ: фігуру, площу якої потрібно знайти, перетворюємо в таку рівновелику фігуру, площу якої вміємо знаходити. Надалі цей принцип застосовується в різних конкретних випадках.

Таким чином, специфіка одиничного в навчальній діяльності залежить від рівня вивчення математики. На одному рівні це може бути приклад із довкілля, модель, малюнок, а на іншому — зв'язок, відношення, властивість, які необхідні для існування певного математичного об'єкта.

Добираючи зміст навчання, важливо правильно врахувати не лише специфіку одиничного, особливого й загального, але і види зв'язку між ними. Загальне може охоплювати лише свої особливі форми. Так, виходячи із загального поняття «переміщення», отримаємо окремі його види (симетрію, поворот, паралельне перенесення) і відповідні способи діяльності. Загальне не лише охоплює свої особливі форми, але й саме виступає особливою формою. Так, загальне поняття «рівність фігур» має свої особливі прояви (рівність відрізків, кутів, тіл тощо) і виступає особливим видом поняття «подібність фігур».

Навчальні тексти мають відповідати етапам пізнання: від одиничного через особливе до загального й далі, через логічне обґрунтування до практики. Звичайно, співвідношення між окремим і загальним, індуктивним і дедуктивним, емпіричним і теоретичним різне залежно від рівня навчання й особливостей навчальної діяльності учнів. Обидва етапи впливають на розвиток творчості учня, його активність, ініціативу, привчають проводити невеликі дослідження, самостійно відкривати нові математичні факти. Отже, щоб матеріал, який вивчається на загальноосвітньому рівні, став доступнішим, він більшою мірою ніж той, що вивчається на поглибленому рівні, має спиратися на наочність, інтуїцію та життєвий досвід учнів. Вивчення математичних фактів, як правило, розпочинається з аналізу емпіричного досвіду (відповідних прикладів, моделей чи малюнків, які мають виконувати не лише ілюстративну, а й евристичну роль). Це дає змогу з'ясувати істотні ознаки понять, властивості геометричних фігур і на основі цього самостійно сформулювати відповідні твердження. На цьому рівні вивчення математики систематично використовують конструктивні означення, які дають змогу учневі усвідомити процес створення (побудови) відповідного математичного об'єкта. Але у змісті математики, що вивчається на поглибленому рівні, поняття здебільшого визначаються через рід (посилання на більш загальне поняття) і видову відмінність (виділення ознак, що відрізняють нове поняття від інших), сприймання яких вимагає складнішої розумової діяльності. Причому зміст понять розкривається за допомогою означень, а їх обсяг — із залученням класифікацій (поділу понять за певними ознаками). Тобто курси математики повинні мати не лише різну інформаційну ємність і діагностико-прогностичну спрямованість, але й різнитися способами упорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношенням між теоретичними й емпіричними знаннями.

Результативність навчання забезпечується *відповідністю обсягу змісту й навчального часу, відведеному на його засвоєння.* На вивчення математики в 7–9 класах рекомендовано п'ять години на тиждень. Проте навчальний матеріал підручників нерідко залишається переобтяженим. Це призводить до зниження математичної культури учнів, виховного впливу математики на особистість, її ролі в розвитку мислення. У ситуації, що склалася, потрібно зменшити обсяги курсів математики за рахунок якісної переробки змісту, а саме: уникання надмірної строгості викладання (дедукція і абстрактність мають спиратися на наочність та інтуїцію учнів), зменшення обсягу громіздких обчислень і перетворень. Назріла потреба переглянути той матеріал, який не використовується ні для логічного розгортання курсу, ні під час розв'язування задач і не має прикладного спрямування.

Принцип пріоритету розвивальної функції навчання. «Метою математичної освітньої галузі має бути розвиток особистості учня через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті» [16, с. 8].

Розвивальний ефект отримуємо здебільшого на основі вироблення вмінь доводити твердження і розв'язувати задачі, застосовувати методи математики, розуміння аксіоматичної її побудови, суті абстрактних математичних конструкцій. Але потрібно більше враховувати значення математики в діяльності людини сьогодні й особливо в історичному контексті (на її основі започатковувалися і розвивалися інші науки). Доцільно поряд із питаннями, пов'язаними з логічною побудовою курсів, якомога ширше використовувати образно-чуттєвий, естетичний, художньо-графічний, емоційно-ціннісний потенціал математики. Зміст має відображати досвід творчої діяльності та відповідні ціннісні орієнтири (фрагменти історії математики, математичних теорій і методів, долі вчених, які зробили визначні відкриття тощо).

Розвивальну функцію навчання реалізує також *персоніфіковане викладення матеріалу,* тобто подання, де це можливо, математичних фактів із погляду їх історичного становлення й розвитку. Важливу роль у навчанні математики відіграє систематичне використання історичного матеріалу, який підвищує інтерес, заохочує до наукової творчості, пробуджує критичне ставлення до фактів, дає учням уявлення про математику як невід'ємну складову частину загальнолюдської культури. На зрозумілих прикладах слід показувати учням, як розвивалися математичні поняття й відношення, теорії та методи. Ознайомлення учнів з іменами та біографіями видатних учених, які створювали математику, зокрема видатних українських математиків і математикинь, сприятиме національному й патріотичному вихованню.

Принцип наступності. Особливого значення на сьогодні набуває проблема цілісності змісту: спільні наукові підходи до трактування понятійного апарату, дотримання концентричного розвитку змістово-методичних ліній та забезпечення їх наступності на різних етапах навчання. Гострота цієї проблеми зумовлюється насамперед тим, що зміст предметів упроваджується поетапно — початкова школа, гімназія (спочатку 5–6 кл., потім 7–9 кл.), ліцей. Однак без цілісного уявлення про зміст навчання на всіх ступенях школи (хоча б на рівні основних понять і залежностей) може бути порушена його наступність. Адже зміст навчання в гімназії має узгоджуватися зі змістом початкової школи і враховувати тенденції його розвитку у ліцеї. Особливо актуальна наступність під час уведення нових розділів: комбінаторики, елементів теорії ймовірності та математичної статистики. Доповнення курсу математики цими розділами можна лише вітати, оскільки ймовірнісно-статистична грамотність потрібна в повсякденному житті кожної людини. Проте методична система їх вивчення ще не розроблена. Вона може бути ефективною лише за умови створення відповідної змістово-методичної лінії, що розпочинається в початковій школі. У пропедевтичному плані цей матеріал повинен розглядатися в початковій школі й гімназії шляхом збільшення питомої ваги задач комбінаторного, імовірнісного характеру, а також задач із підсиленими логічними елементами, розв'язання яких потребує спеціальних засобів аналізу даних (графіки, матриці, таблиці).

Відповідно до концепції Нової української школи з метою забезпечення наступності в навчанні було розроблено Концепцію математичної освіти 12-річної школи [15]. Вона визначає нову методичну систему навчання (пріоритети розвитку математичної освіти, структуру й базовий зміст шкільного курсу математики, принципи його добору) і дає цілісне уявлення про зміст освіти, що відповідає новій соціальній ситуації. Концепція буде корисною під час підготовки навчально-методичного забезпечення освітнього процесу. Заслуговує на увагу й те, що зміст модельних навчальних програм з алгебри і геометрії для 7–9 класів (автори: Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.) враховує компетентності учнів, здобуті у 5–6 класах, забезпечує наступність у навчанні алгебри й геометрії, а також є достатнім для опанування інших навчальних дисциплін.

Принцип диференційованої реалізованості. Зміст математики розрахований на здійснення двох видів диференціації: 1) за змістом навчального матеріалу (програми й підручники відрізняються обсягом матеріалу, його змістом і впорядкованістю); 2) за рівнями програмових вимог до математичної підготовки учнів / учениць. Перший вид диференціації здійснюється шляхом запровадження чотирьох курсів математики (загальноосвітнього, поглибленого, за вибором, факультативного).

Загальноосвітній курс математики продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початковій школі, розширюючи й доповнюючи їх відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів. У модельних навчальних програмах [23], [24] в основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані певні компетентності як здатності учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях та бути відповідальним за свої дії.

Загальні завданнями шкільної математичної освіти для реалізації зазначеного підходу:

— *розвиток ключових компетентностей* учнів (мислення, насамперед логічного, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, розумової активності, потреби в самоосвіті, здатності до адаптації, ініціативності, творчості, толерантного ставлення до інших, уміння працювати в команді тощо);

— *формування:* ставлення до математики як складової культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в суспільстві; наукового світогляду, загальнолюдських, національних, громадянських цінностей; уявлень про ідеї і методи математики та її роль у пізнанні навколишнього світу;

— *оволодіння системою* предметних математичних компетентностей, необхідних у повсякденному житті та майбутній професійній діяльності, а також достатніх для вивчення інших дисциплін і продовження освіти;

— *вироблення вмінь*: виокремлювати проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; моделювати, розв'язувати та критично оцінювати процес і результат розв'язання; ухвалювати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації;

— *забезпечення* оволодіння математичною мовою, розуміння математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;

— *формування здатності* обґрунтовувати та доводити математичні твердження, оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання та вміння під час вивчення інших навчальних предметів;

— *розвиток умінь* працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, відшукувати й використовувати додаткову навчальну інформацію, критично її оцінювати, виокремлювати головне, аналізувати, робити обґрунтовані висновки.

Крім загальних освітніх завдань, у 7–9 класах реалізуються *специфічні для цього етапу навчання алгебри й геометрії завдання* (табл. 1.2.1)

Таблиця 1.2.1. **Специфічні завдання навчання алгебри й геометрії**

Специфічні завдання навчання алгебри	**Специфічні завдання навчання геометрії**
• *Оволодіння* мовою алгебри, розвиток аналітичних здібностей, умінь виконувати основні алгебраїчні дії та операції; • *формування знань* про числові системи, вирази, рівняння й нерівності та їх системи, функції та їх властивості, числові послідовності та їх властивості, а також *умінь застосовувати* здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях; • *формування уявлення* про математичне моделювання, комбінаторику, статистику й теорію ймовірностей; *умінь застосовувати* їх у навчальних і життєвих ситуаціях; • *оволодіння* методами тотожних перетворень, розв'язування рівнянь, нерівностей і їх систем, встановлення функціональних залежностей і їх подання різними способами (словесно, таблично, графічно), побудови, перетворення й аналізу графіків функцій тощо; • *ознайомлення* зі способами й методами алгебраїчних доведень, формування умінь їх практичного використання; • *розширення* множини раціональних чисел до множини дійсних чисел; • *вироблення вмінь* використовувати алгебраїчні методи й засоби в геометрії і, навпаки, алгебраїчно інтерпретувати геометричні залежності	• *Оволодіння* мовою геометрії, розвиток просторових уявлень і уяви, умінь виконувати основні геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів; • *формування знань* про геометричні фігури на площині, їх властивості, а також *умінь застосовувати* здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях; • *формування уявлення* про найпростіші геометричні фігури в просторі та їх властивості, а також первинних *умінь застосовувати* їх у навчальних і життєвих ситуаціях; • *ознайомлення* зі способами — методами геометричних доведень, формування умінь їх практичного використання; • *формування знань* про основні геометричні величини, способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і найпростіших стереометричних фігур, а також *уміння застосовувати* здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях; • *ознайомлення* з геометричними перетвореннями, координатами й векторами на площині та їх найпростішими властивостями; • *вироблення вмінь* використовувати геометричні методи й образи в алгебрі і, навпаки, геометрично інтерпретувати алгебраїчні залежності

Зміст цих модельних навчальних програм передбачає, що навчання учнів математики на рівні базової середньої освіти продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в 5–6 класах, систематизуючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів.

За змістовим наповненням курс алгебри *інтегрує навчальний матеріал, що містить*: числові множини, вирази зі змінними та їх числові значення; рівняння, нерівності, системи рівнянь і нерівностей; елементарні функції та їх графіки; елементи прикладної математики, зокрема фінансових розрахунків, відсотки; початкові відомості про статистику, способи подання й обробки статистичних даних та їх числові характеристики, деякі статистичні закономірності в реальному світі; правила комбінаторного додавання і множення та їх застосування до розв'язування відповідних задач; початки теорії ймовірностей, де на конкретних прикладах ілюструються методи і способи розв'язування задач; окремі методологічні питання алгебри, відомості з історії науки. *Курс геометрії інтегрує навчальний матеріал, що охоплює:* геометричні фігури (на площині й у просторі), їх властивості; геометричні величини, їх вимірювання; елементи тригонометрії; початки аналітичної геометрії та векторної алгебри; побудови; геометричні перетворення; методи і способи розв'язування задач; окремі методологічні питання геометрії.

Поглиблений курс математики (8–9 класи) передбачає розширення і поглиблення змісту загальноосвітнього курсу математики, посилення його прикладної спрямованості, формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, підготовку до поглибленого навчання математики в ліцеї. Поглиблене вивчення математики в гімназії є певною мірою орієнтаційним. Важливо тут допомогти учневі усвідомити ступінь свого інтересу до предмета й оцінити можливості оволодіння ним, щоб після закінчення дев'ятого класу зробити свідомий вибір на користь подальшого поглибленого вивчення математики або вивчення її в межах загальноосвітнього курсу. Інтерес до математики потрібно постійно заохочувати. Утім, у разі втрати в учня зацікавлення доцільно передбачити можливість переходу до вивчення предмета в межах загальноосвітнього курсу.

Поглиблений курс математики охоплює відповідні частини загальноосвітнього курсу, проте додано кілька тем, які в загальноосвітньому курсі вивчаються лише на найпростішому, оглядовому рівні й містять мінімум означень і основних фактів. Це множини й операції над ними; множини в теорії чисел; основні формули комбінаторики; метод математичної індукції; елементи аналітичної геометрії; застосування векторів і геометричних перетворень до розв'язування задач. Цей перелік тем спрямований насамперед на розширення і поглиблення математичного апарату, який використовують учні, і є базою для подальшого вивчення курсу математики та інших шкільних предметів.

У деяких темах програми передбачено обґрунтування тих відомостей, які в загальноосвітньому курсі математики подаються як готові факти, тобто без обґрунтування чи доведення. Наприклад, поглиблений розгляд понять «рівносильне рівняння», «рівносильна нерівність» виробляє в учня потребу доводити факти, які здаються інтуїтивно очевидними.

Курси за вибором. Навчальні курси, самостійний вибір яких учень здійснює із двох і більше альтернатив, запропонованих школою. Курси за вибором сприяють вибору подальшого навчального профілю і розвиткові відповідних предметних компетентностей шляхом формування цінностей і ставлень, поглиблення та розширення теоретичних і прикладних знань, формування вмінь і навичок, набуття досвіду пізнавальної і творчої діяльності, розкриття й розвитку задатків і здібностей. Це допоможе дітям оцінити свої можливості щодо вивчення математики на профільному рівні та зорієнтувати на подальший вибір профілю навчання. Саме тому зміст таких курсів має містити не тільки інформацію, що розширює знання шкільного курсу математики, а й знайомити учнів із різними способами діяльності, необхідними для подальшого успішного вивчення математики на профільному рівні.

Факультативні курси — необов'язкові навчальні курси з поглибленого вивчення окремих тем.

Курси математики повинні мати різну інформаційну й інтелектуальну наповненість, діагностико-прогностичну спрямованість та соціальну ефективність (обсяг математичних знань має бути достатнім для успішної майбутньої трудової чи навчальної діяльності), а також різнитися способами упорядкування матеріалу, ступенем узагальнення знань, співвідношенням між теоретичними й емпіричними знаннями.

Курси математики — рівневo диференційовані, тобто орієнтовані на три рівні вимог до математичної підготовки: середній, достатній, високий. Розробляючи програмові вимоги, доцільно дотримуватися таких умов:

1. *Фіксованість* програмових вимог. Вони містять переліки опорних уявлень, розумінь, знань, умінь, навичок і способів діяльності (алгоритми й евристики). Способи діяльності (правила, алгоритми й евристики) задаються переліком відповідних операцій. Зміст операцій і їх послідовність враховують рівень мисленнєвої діяльності учня (переважно емпіричний або теоретичний). Вимоги фіксуються також мінімізованим набором спеціальних завдань.

2. *Доступність* вимог. Забезпечується врахуванням під час їх розробки психологічного аспекту — змісту і психологічних особливостей навчальної діяльності учнів, рівнів їх розвитку як результату навчання на кожному ступені шкільної освіти. Рівень програмових вимог повинен відповідати тій навчальній діяльності, у ході якої засвоюються знання, виробляються вміння й навички.

3. *Наступність* під час переходу від одного рівня програмових вимог до іншого. У процесі навчання не слід пред'являти більш високі вимоги тим учням, які не досягли обов'язкових результатів навчання.

4. *Відкритість* рівнів вимог. Учні повинні знати їх заздалегідь і орієнтуватися на них у процесі навчання. Цим самим досягається вмотивованість оцінки і відповідність між оцінкою вчителя і самооцінкою учня.

5. *Узгодженість* видів програмових вимог (тематичних, річних, за навчальний курс), критеріїв оцінок із їх рівнями, що забезпечує об'єктивність оцінювання.

6. *Відповідність* вимог цілям вивчення і змісту навчальних курсів.

Програми з математики мають містити перелік умінь на кожному з рівнів навчання. Проте вимоги, задані переліком умінь, допускають досить широке тлумачення. Засобом їх конкретизації є *набори спеціальних еталонних задач,* які розробляються для кожного рівня навчання. Кількість їх має бути мінімальною, а зміст задач учні повинні знати заздалегідь. Якщо учень після вивчення курсу вміє розв'язувати відповідні еталонні задачі, це означає, що він досяг певного рівня навчання. Такий підхід дає змогу школяру вибрати новий рівень засвоєння математичного матеріалу і варіювати своє навчальне навантаження.

Модульний принцип відбору змісту. Програма може містити набір тем (модулів), із яких учитель будує курс. Серед них є обов'язкові для вивчення й теми додаткової частини програми, з яких педагог на свій розсуд може дібрати матеріал для розгляду, враховуючи рівень математичної підготовки учнів класу, їхні інтереси, специфіку майбутньої професії, профілю навчання тощо. Відповідно до цього курс математики містить дві частини — інваріантну (дві третини курсу) і варіативну (одну третину курсу). Варіативна частина має логічно завершені порції матеріалу, які доповнюють інваріантну частину. Також варіативна частина може містити компетентнісний блок, у межах якого учні навчаються застосовувати набуті знання і досвід у реальному житті або на базі відповідних задач. Цей принцип перспективний, оскільки дає змогу враховувати різні освітні умови в різних регіонах країни, інтереси, здібності учнів й обмежитися оптимальною кількістю навчальних і методичних посібників.

Принцип фузіонізму (від лат. *фузіо* — злиття). Наразі суттєве посилення внутрішньопредметних (алгебра, планіметрія і стереометрія) та міжпредметних (математика й інші навчальні дисципліни, математика і різні галузі діяльності) зв'язків. У змісті математики мають бути посилені зв'язки між алгеброю і геометрією, планіметрією і стереометрією. Йдеться про взаємопроникнення геометричних методів і образів в алгебру, і навпаки; про геометричну інтерпретацію алгебраїчних залежностей і аналітичне тлумачення геометричних фактів. Інтегрований підхід має передбачати виокремлення тих типових практичних ситуацій, для розв'язання яких найчастіше використовується та чи інша математична модель.

Дієвими інтеграційними чинниками є відомості про математичні методи та вміння їх застосовувати, зокрема методу координат. Метод координат дає змогу розглядати фігури й числа як взаємозв'язані моделі знань і встановлювати попарну відповідність між базисними поняттями геометрії (точка, вектор, лінія, перетин ліній, поверхня тощо) і алгебри (число, набір чисел (координат), рівняння, система рівнянь тощо). У шкільних підручниках із геометрії розглядаються не лише фігури, а й деякі їх рівняння (прямої, кола). Таке проникнення методів аналітичної геометрії в елементарну — правомірне. Проте використання чисел (координат) епізодичне, обмежується окремою темою і тому не сприяє повномірній інтеграції алгебраїчного та геометричного матеріалу в свідомості учня. Вважаємо, що числову характеристику фігур (поряд з евклідовим підходом) слід використовувати з перших кроків вивчення геометрії. Візьмімо, наприклад, таке важливе поняття, як «рівні фігури». Його вивчення, як правило, супроводжується позиційною побудовою трикутників або їх накладанням. Однак у цій темі є корисним координатне (числове) підкріплення: будуємо дві системи координат; на першій відмічаємо три довільні точки A, B, C, а на другій — точки A_1, B_1, C_1 із тими самими координатами. Утворюємо трикутники ABC та $A_1B_1C_1$. Після цього з'ясовуємо, що трикутники (фігури), у яких відповідні вершини мають однакові координати, — рівні. Нарешті, метод координат — один з ефективних прийомів розв'язування задач на доведення залежностей між лінійними елементами геометричних фігур і відшукання геометричних місць точок.

Необхідність включення в курс планіметрії елементів стереометрії є цілком обґрунтованою. Елементи стереометрії в 7–9 класах вивчаються на наочно-інтуїтивній основі, що має важливе значення для розвитку просторової уяви й мислення учнів, а в 10–11 класах — із залученням планіметричних фактів (аналогії у формулюванні аксіом, деяких понять і теорем, зведення стереометричних задач до планіметричних тощо). Дослідження цієї проблеми показали доцільність паралельного вивчення в курсі геометрії базової школи елементів стереометрії. Проте недостатньо з'ясованими залишаються питання, пов'язані зі змістом і обсягом стереометричного матеріалу в курсі планіметрії; перерозподілом планіметричного матеріалу (за рахунок чого можна вводити стереометричні поняття); збереженням строгості розгортання планіметричного матеріалу (чи не «заважатимуть» стереометричні факти, які вводяться із залученням досвіду, інтуїції та експерименту, усвідомленню учнями викладу планіметрії на дедуктивній основі); вимогами до засвоєння елементів стереометрії.

Доцільним є *розроблення єдиного інтегрованого курсу математики*, без поділу його на алгебру і геометрію. Йдеться не про механічне, а про якісне об'єднання алгебраїчного і геометричного матеріалу. Інтеграція змісту досягається введенням узагальнювальних понять сучасної математики (елементи теорії множин і математичної логіки, координатно-векторні поняття, бінарні відношення тощо), які дають змогу з єдиних наукових позицій трактувати основні алгебраїчні й геометричні поняття. Таким чином, нинішня *модернізація змісту освіти передбачає ширше використання предметно-інтегрованого підходу до структурування навчального матеріалу.*

Принцип концентризму. Математична підготовка школярів досягається концентричним розвитком таких груп знань: 1) числа і дії над ними, величини, метрична система мір; 2) вирази, рівняння, нерівності, елементи логіки; 3) функції, дослідження функцій; 4) геометричні фігури та їх властивості, геометричні величини, геометричні перетворення; 5) координати і вектори; 6) комбінаторика; 7) елементи статистики і теорії ймовірностей; 8) математика і зовнішній світ (моделювання, аналіз даних, специфіка математики як науки, математика в системі наук, історія виникнення і розвитку математичних теорій). Елементи статистики теорії ймовірностей мають вводитися поступово в міру накопичення досвіду та створення належного навчально-методичного забезпечення. Важливою проблемою тут є визначення структури й обсягу цього матеріалу на різних етапах навчання і його взаємозв'язків з іншим матеріалом з метою посилення прикладного спрямування математики.

Зміст підручника має бути трикомпонентним. Це, насамперед, система математичних знань, яка розкривається в тексті (основному, додатковому й пояснювальному). Зміст охоплює і ті знання, які відображають зв'язки математики з практикою та іншими предметами. Це логіка, моделювання, математика й зовнішній світ. У змісті підручника виділяють способи діяльності: вказівки, схеми, зразки розв'язання типових задач. Це можуть бути і спеціальні ілюстративні засоби, які розвивають творчі можливості учнів, а не лише виконують допоміжну роль. Важливо, щоб способи діяльності виділялися з орієнтацією на змістово-методичні лінії розміщення матеріалу і передбачалося систематичне їх використання, уточнення й узагальнення. Наприклад, під час вивчення теми «Ознаки рівності трикутників» виокремлюємо спосіб діяльності у вигляді вказівок.

Щоб довести рівність двох відрізків (кутів): 1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами (кутами) яких є ці відрізки (кути); 2) доведіть, що трикутники рівні, скориставшись однією з ознак рівності; 3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

Спосіб діяльності уточнюємо й застосовуємо під час доведення властивостей і ознак чотирикутників. Тема «Ознаки подібності трикутників» дає змогу цей спосіб діяльності узагальнити й використати під час розв'язання різноманітних задач на подібні трикутники. Якщо такого підходу дотримуватися щодо кожної змістово-методичної лінії курсу математики, то це полегшить самонавчання учнів за підручником і сприятиме виробленню загальних підходів до дослідження математичних залежностей. Нарешті, зміст має відображати досвід творчої діяльності, накопичений людством у галузі математичної освіти, відповідні ціннісні орієнтири (фрагменти історії математики, математичних теорій і методів, долі вчених, які зробили визначні відкриття, тощо).

Усі компоненти змісту розгортаються концентрично (уточнюються, поглиблюються й узагальнюються) протягом усього вивчення математики.

Принципи або загальнометодичні положення відбору змісту враховуються в методиці практико-орієнтованого навчання математики.

1.3. Особливості методики практико-орієнтованого навчання математики

(*М. Бурда*)

Загальні особливості методики

Зміст математичної освіти містить два компоненти — теоретичний (логічна організація матеріалу — поняття, аксіоматичний підхід, властивості й ознаки, доведення, виведення наслідків) і прикладний (застосування математики до розв'язання практичних проблем). Реформи змісту, які проводилися, стосувалися пріоритету цих компонентів та їх питомої ваги в навчанні, що суттєво впливало на результати навчання. Загальна вимога на сьогодні — збільшення у змісті математичної освіти питомої ваги прикладного компонента, який забезпечуватиме здатність учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях, провадити майбутню професійну діяльність. Відповідно вимоги до результатів навчання включають змістову, діяльнісну і ціннісну складові частини. Значно більше уваги приділено діяльнісній і ціннісній складовим частинам (розпізнавати проблеми, які можна розв'язати засобами математики, будувати та досліджувати простіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, складати плани розв'язання проблем, критично оцінювати отримані результати, робити правильні висновки тощо). Ціннісна складова частина стосується сучасних суспільно-економічних запитів, сприяє виробленню в учнів ціннісних орієнтацій, правильної поведінки щодо енергоресурсів, власного здоров'я та фінансів, навколишнього середовища, стосунків між людьми.

Традиційно в навчанні математики акцентувалося на виробленні суто математичних умінь. Результати навчальної діяльності учня впорядковувалися переважно за знаннєвими і діяльнісними вимогами («сформулюйте», «наведіть приклад», «обчисліть», «обґрунтуйте», «побудуйте» тощо). Проте, як показали результати міжнародного дослідження якості освіти PISA, така методика навчання не забезпечує повною мірою розв'язання сучасних завдань математичної освіти.

Успішна реалізація прикладної спрямованості шкільної математичної освіти потребує цілісної переорієнтації змісту навчання. Навчальний матеріал має сприяти виробленню не лише суто математичних умінь, а й умінь застосовувати знання в нетипових ситуаціях, працювати з проблемами, що пов'язані зі змістом інших предметних галузей, із реальними життєвими контекстами, узагальнювати та використовувати інформацію на основі своїх досліджень, оперувати різними джерелами інформації. Набуття цих умінь передбачає відповідність змісту навчання етапам (процесу) застосування математики на практиці (формалізація, розв'язування задачі в межах побудованої моделі, інтерпретація), тобто мати три взаємозв'язані складові частини:

— ***Організація емпіричних узагальнень***: аналіз одиничного (предметних моделей або уявлень про них, прикладів із довкілля, зі сфери майбутньої професійної діяльності, фактів з інших навчальних предметів, конкретних ситуацій або явищ, для опису яких використовується математика); з'ясування особливого (порівняння й виділення спільних ознак, зв'язків та їх узагальнення); самостійне формулювання загального у вигляді гіпотези. Аналіз емпіричного матеріалу спрямований на «відкриття» учнями математичного факту, з'ясування його істотних ознак, властивостей і на основі цього — самостійне формулювання відповідного твердження. Якщо навчальний матеріал спирається на емпіричний досвід учня, це дає змогу шляхом абстрагування створити мисленнєві образи, відповідні практичному досвіду. Добираючи зміст навчання, важливо правильно абстрагуватися від властивостей реальних предметів, щоб забезпечити мислення переходи від предметів до відповідних наочних образів і навпаки. *Використання емпіричного досвіду учня, наочно-інтуїтивного підходу в навчанні передбачає*: послаблення аксіоматичної лінії (дедукція й абстрактність матеріалу спирається на наочність і математичну інтуїцію учнів); орієнтування на засвоєння тих знань, які дають змогу правильно діяти в конкретних ситуаціях, щоб досягти поставленої мети); використання конструктивного підходу до визначення понять для усвідомлення процесу створення (побудови) відповідного математичного об'єкта), візуалізація навчальних текстів, що забезпечується використанням комп'ютерних презентацій, програмних засобів навчального призначення.

— ***Логічна організація навчального матеріалу:*** доведення або спростування гіпотези шляхом аналітико-синтетичної діяльності; вираження істотних ознак, властивостей, зв'язків у вигляді математичних тверджень (загальних ідей, принципів, теорем, формул), які об'єднують навчальний матеріал у систему; розв'язування базових математичних задач, які дають змогу сконструювати й усвідомити відповідні способи діяльності. Під час обґрунтування математичних тверджень не варто захоплюватися формально-логічною строгістю доведень та відводити багато часу громіздким перетворенням й обчисленням. Більше уваги слід приділяти розумінню змісту понять, властивостей, ідей, застосуванню їх у нестандартних математичних і практичних ситуаціях.

Потребує *удосконалення система вправ підручників*, де вони в основному «правильні». Недостатньо вправ з урахуванням їх варіативності: за характером умови й вимоги (з повною, неповною, надлишковою, ймовірнісною та суперечливою інформацією), за способами розв'язування, за нарощуванням складності, за взаємозв'язками між компонентами умови і вимоги (прямі, обернені, протилежні та ін.), а також вправ із несформульованою умовою або вимогою, на складання задач. Система вправ має охоплювати нескладні вправи на ухвалення оптимальних рішень, оскільки необхідність розв'язувати оптимізаційні проблеми різного рівня складності так чи інакше постає перед кожним членом суспільства.

— ***Застосування математичних фактів на практиці***. Школярі мають усвідомити, що застосування математики до розв'язання будь-яких задач прикладного змісту має такі етапи: перехід від ситуації, описаної в задачі, до математичної моделі цієї ситуації, і від неї — до сформульованої математичної задачі; розв'язування задачі в межах побудованої моделі; застосування одержаного розв'язання до вихідної ситуації. Зміст навчання повинен забезпечувати оволодіння учнями математичною культурою такого рівня, коли буде опановано всі три етапи застосування математики до розв'язування задач, які виникають у людській практиці. Орієнтація на застосування математики передбачає: виділення конкретних типових практичних ситуацій, для розв'язання яких найчастіше використовується певна математична модель; застосування методу математичного моделювання; вироблення вмінь досліджувати математичні моделі реальних процесів і проводити найпростіші обчислювальні експерименти з використанням інформаційних технологій; збільшення питомої ваги прикладних текстових задач і задач на моделювання просторових форм за їх кількісними характеристиками.

Виробленню вмінь застосовувати математику до розв'язування задач, зокрема практичного змісту, цілісному засвоєнню знань сприятиме: *укрупнення навчального матеріалу* (не віддаляти в навчальному часі вивчення аналогічних, схожих понять, взаємно обернених тверджень і операцій, що сприятиме цілісності знань), *інтеграція змісту* (введення узагальнювальних понять сучасної математики, які дають змогу з єдиних наукових позицій трактувати основні алгебраїчні та геометричні поняття; посилення внутрішньопредметних і міжпредметних зв'язків), *систематизація й узагальнення* навчального матеріалу.

Другий і третій складники пропонованої методики мають бути максимально наближеними й розглядатися як взаємно обернена діяльність. У процесі такої діяльності учні зроблять висновки, що один і той самий математичний факт може використовуватись як модель для розв'язування різних практичних задач. Так, функція $y = kx$ виражає залежність між різними величинами: шляхом і часом, масою і об'ємом тіла, довжиною кола і його діаметром тощо. Навпаки, різні за сюжетом практичні задачі можуть зводитися до однієї математичної моделі. Тому доцільно виділяти типові практичні ситуації, для розв'язування яких найчастіше використовується певна математична модель, і на їх основі добирати задачі практичного змісту різної складності.

Математичні задачі є моделями задач практичного змісту. Ці задачі взаємопов'язані, оскільки взаємопов'язаними є математична й інші ключові компетентності. Тому розв'язування математичних і відповідних практичних задач не рекомендується віддаляти в навчальному часі. Для формування вмінь застосовувати властивості математичних об'єктів на практиці учням спочатку пропонують пари задач: математична задача (М) та відповідна задача практичного змісту (П). Розв'язування математичної задачі використовується як модель для наступної практичної задачі. Потім, розв'язуючи різні задачі практичного змісту, учні виконують обернену дію — переходять від пропонованої практичної задачі до математичної, яка є її моделлю, розв'язують її та інтерпретують одержаний результат. Тобто розв'язування математичних задач і задач практичного змісту розглядається як взаємно обернена діяльність: (М) $\leftrightarrow$ (П).

Методика практико-орієнтованого навчання математики передбачає *використання інноваційних форм навчання* («змішане навчання», «перевернутий клас», «хвильові занурення» — методи, що передбачають співпрацю: рольові ігри, дослідницькі проєкти, експерименти, групові завдання тощо).

Метапредметні методи і прийоми діяльності як складові частини методики практико-орієнтованого навчання математики

Одне із завдань навчання математики — виробити вміння вчитися, самостійно здобувати знання та застосовувати їх як під час вивчення інших предметів, так і в реальних життєвих ситуаціях. Для вироблення цих умінь зміст навчання має забезпечувати оволодіння загальними методами, прийомами розумової діяльності (аналіз, синтез, аналіз через синтез, доведення від супротивного, наведення контрприкладів, підведення під поняття і виведення наслідків тощо), які дадуть змогу ґрунтовніше засвоїти навчальний матеріал та посилити його прикладну спрямованість. З'ясовано, що розв'язування математичних і практичних задач, дослідження проблемних ситуацій із застосуванням математичних методів та прийомів потребує оволодіння учнями відповідними основами діяльності або правилами-орієнтирами. Вони за своїм змістом можуть бути у вигляді: порад, указівок, інструкцій, алгоритмічних приписів, евристичних схем і планів (розв'язування окремих задач або задач певних видів, вивчення понять і властивостей, явищ і законів, здійснення спостережень, виконання дослідів і проєктів). Правила-орієнтири учень складає самостійно або з допомогою вчителя. Рекомендуються такі етапи складання правил-орієнтирів: 1) виділення групи задач, встановлення оператора задач і тих знань, на базі яких їх можна розв'язати; 2) осмислення способу розв'язування групи задач на кількох задачах-моделях (розв'язування яких містить операції, притаманні цьому правилу-орієнтиру); 3) виділення потрібних операцій та роздільне їх закріплення й узагальнення; 4) визначення раціональної послідовності виконання операцій та складання на їх основі правила-орієнтира; 5) встановлення повноти й меж його застосування та відповідності програмним вимогам.

Учні 7–9 класів ознайомлюються з такими загальними методами доведення теорем і розв'язування задач: аналітичним, синтетичним, аналітико-синтетичним, доведення від супротивного, методами геометричних перетворень, алгебраїчним, векторним і координатним, а також прийомами підведення під поняття та виведення наслідків тощо. Розглянемо деякі з них.

Аналітичні, синтетичні та аналітико-синтетичні методи. У синтетичному методі доведення міркування спрямовані від умови або вже відомого твердження до вимоги, а в аналітичному, навпаки, від вимоги до умови. Відомо два види аналітичних міркувань: низхідний і висхідний аналіз. Перший вид аналізу разом із синтетичним методом описав давньогрецький учений Евклід, а другий увів давньогрецький математик Папп. Під час пошуків планів доведення або розв'язування задач зручно використовувати низхідний вид аналітичних міркувань. Але такі міркування не можна вважати строгими доведеннями. Тому, якщо пошук завершено, використовуємо синтетичні міркування. Наприклад, довести нерівність $a^2 + \dfrac{1}{a^2} \geq 2$ (табл. 1.3.1 на с. 34).

Аналітико-синтетичний метод полягає в поперемінному напрямі мислення — від умови до вимоги і навпаки: пошук доведення починають аналітичним методом, але на певному кроці міркують у зворотному напрямку, з розгортання умови, тобто застосовують синтетичний метод. Використання аналітичних і синтетичних методів доведення теорем і розв'язування задач покращується, якщо на прикладі розв'язання 1–2 задач-моделей учні з'ясовують суть методу і конструюють відповідне правило-орієнтир.

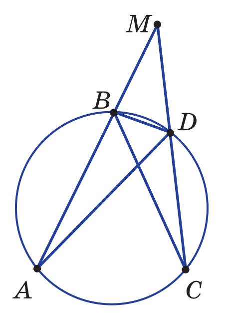
Таблиця 1.3.1

Аналітичні та синтетичні методи

Аналіз Евкліда	Синтетичний метод	Аналітичний метод
Припустимо, що нерівність $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$ справджується	Розглянемо очевидну нерівність $(a^2-1)^2\geq 0$	Для того, щоб $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$
Помноживши обидві частини на $a^2\neq 0$, отримаємо $a^4+1\geq 2a^2$	Запишемо у вигляді $a^4-2a^2+1\geq 0$	Достатньо, щоб $a^4+1\geq 2a^2$
Звідси $a^4-2a^2+1\geq 0$	Поділимо обидві частини на $a^2\neq 0$. Отримаємо $a^2-2+\frac{1}{a^2}\geq 0$	Або $a^4-2a^2+1\geq 0$
Отримаємо правильну нерівність $(a^2-1)^2\geq 0$	Або $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$	Або $(a^2-1)^2\geq 0$

Розглянемо складання правила-орієнтира на прикладі доведення рівностей, що містять добутки двох пар відрізків (8 клас, тема «Середні пропорційні у прямокутному трикутнику»).

Пропонується задача-модель. З точки M поза колом проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B, C і D (мал. 1.3.1). Доведіть, що $AM\cdot BM=CM\cdot DM$.



Мал. 1.3.1

Пошук доведення (аналітичний метод міркувань):

1) припустимо, що рівність $AM\cdot BM=CM\cdot DM$ (1) справджується;

2) звідси випливає, що $AM:CM=ДМ:BM$ (2). Щоб довести рівність (1), достатньо довести рівність (2);

3) з рівності (2) випливає, що трикутники зі сторонами AM, $ДМ$, BM, CM мають бути подібними. На малюнку таких трикутників немає, тому їх утворюємо, сполучивши точки A і $Д$, B і C. Отримаємо $\Delta AДМ$ і ΔCBM;

4) спробуємо встановити їх подібність. $\Delta AДМ$ *і* ΔCBM подібні за двома кутами ($\angle M$ — спільний, $\angle ДAM=\angle BCM$ як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу).

Доведення (синтетичний метод міркувань) отримаємо, рухаючись у зворотному напрямі (від п. 4 до п. 1):

1) виділяємо на малюнку трикутники $АДМ$ і $СВМ$;

2) $\Delta АДМ \sim \Delta СВМ$ ($\angle М$ — спільний, $\angle ДАМ = \angle ВСМ$);

3) із подібності цих трикутників випливає: $АМ : СМ = ДМ : ВМ$;

4) отримаємо $AM \cdot BM = CM \cdot DM$, що й потрібно довести.

Виділяються такі операції правила-орієнтира пошуку доведення: 1) припустити правильність доводжуваної рівності та записати її у вигляді пропорції; 2) відшукати на малюнку або побудувати трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції; 3) обґрунтувати подібність цих трикутників.

Операції закріплюються вправами.

1. Запишіть запропоновані пропорції у вигляді рівностей, що містять добуток довжин двох пар відрізків: $a : b = m : n$, $h : c = a : b$; запишіть рівності у вигляді пропорцій: $h^2 = a_c b_c$, $h \cdot c = a \cdot b$.

2. Виконайте необхідні побудови: а) у паралелограмі; б) у трапеції; в) у колі, щоб утворилися подібні трикутники. Складіть відповідні пропорції.

3. Висота прямокутного трикутника, опущена з вершини прямого кута, розбиває його на два трикутники. Обґрунтуйте подібність цих трикутників.

4. У гострокутному трикутнику проведено три висоти. Основи висот сполучено відрізками. Знайдіть подібні трикутники.

Складається правило-орієнтир доведення рівностей, що містять добутки двох пар відрізків (табл. 1.3.2).

Таблиця 1.3.2

Правило-орієнтир доведення рівностей

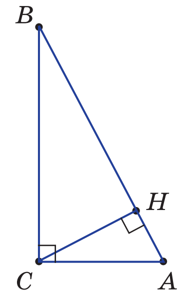
Пошук доведення	Доведення
1. Припустіть правильність доводжуваної рівності	1. Виділіть на малюнку потрібні трикутники
2. Запишіть її у вигляді пропорції	2. Обґрунтуйте їх подібність
3. Відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції	3. Складіть пропорції з відповідних сторін цих трикутників
4. Обґрунтуйте подібність цих трикутників	4. Отримайте з пропорції рівність, яку треба довести

Надалі це правило-орієнтир застосовується під час доведення відповідних теорем і розв’язування задач. Наприклад:

1. Теорема. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.

Дано: ΔACB (мал. 1.3.2), $\angle C = 90\angle$, CH — висота.

Довести: $CH^2 = AH \cdot BH$.



Мал. 1.3.2

Пошук доведення.

Ставляться завдання:

1) припустіть правильність доводжуваної рівності;

2) запишіть її у вигляді пропорції;

3) відшукайте на малюнку трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції;

4) обґрунтуйте подібність цих трикутників.

Пропонується виконати доведення, міркуючи від п. 4 до п. 1.

2. Доведіть, що у прямокутному трикутнику катет є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проєкцією на гіпотенузу.

3. Із точки M проведено січну, що перетинає коло в точках A і B, і дотичну з точкою дотику C. Доведіть, що $MC^2 = MA \cdot MB$.

4. Доведіть, що перпендикуляр, проведений із будь-якої точки кола до діаметра, є середнім пропорційним між відрізками діаметра, на які його ділить основа перпендикуляра.

5. Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проєкціями її бічних сторін на основу.

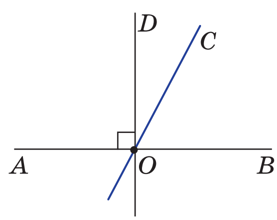
Доведення від супротивного. Основою методу є закон виключення третього: із двох суперечливих тверджень одне завжди істинне, а друге хибне, третього не може бути. Семикласників ознайомимо зі змістом методу і відповідним правилом-орієнтиром під час вивчення теми «Перпендикулярні прямі».

Теорема (про єдиність перпендикулярної прямої).

Дано: пряма AB (мал. 1.3.3), $O \in AB$, $OD \perp AB$.

Довести: пряма OD тільки одна.

Доведення. За умовою, прямі AB і OD перпендикулярні, тому $\angle BOD = 90°$. Припустимо, що існує інша пряма, наприклад OC, яка проходить через точку O і перпендикулярна до AB. Тоді одержимо два кути BOD і BOC, кожний із яких дорівнює 90°. Але за аксіомою про відкладання кутів, від променя OB в один бік від нього можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, крім OD, яка проходить через точку O і перпендикулярна до прямої AB.



Мал. 1.3.3

Важливо звернути увагу учнів на те, що в доведенні теореми застосували особливий хід міркувань. Його називають доведенням від супротивного. У такому доведенні є три етапи. На першому формулюємо припущення, протилежне висновку теореми (нехай існує інша пряма, наприклад OC, яка проходить через точку O і перпендикулярна до AB). На другому етапі доходимо висновку, що воно суперечить або умові теореми, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі (отримали суперечність з аксіомою: «Від променя в один бік від нього можна відкласти тільки один кут заданої градусної міри»). На третьому етапі доведення робимо висновок, що зроблене припущення неправильне, а правильним є твердження теореми (пряма OD тільки одна). Тобто замість доведення заданого твердження доводимо, що суперечливе йому твердження не виконується. Пропонується учням скласти правило-орієнтир.

Щоб довести твердження методом від супротивного:

1) зробіть припущення, протилежне тому, що треба довести;

2) міркуванням дійдіть висновку, що суперечить або умові твердження, яке доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі;

3) зробіть висновок: наше припущення неправильне, тому правильним є те, що треба довести.

Надалі правило-орієнтир використовується під час доведення теорем і розв'язання задач. На перших порах учням надається необхідна допомога.

Розглянемо приклад.

Задача. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу пряму. Довести.

Дано: $a \parallel b$, $c \times a = O$.

Довести: прямі b і c перетинаються.

Ставляться завдання за пунктами правила-орієнтира.

1. Зробіть припущення, протилежне висновку теореми (нехай $c \parallel b$).

2. Міркуванням отримайте, що це припущення суперечить або умові теореми, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі (тоді через точку O проходили б дві прямі (a і c), паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі паралельних прямих).

3. Зробіть висновок: зроблене припущення неправильне, правильним є висновок теореми — прямі b і c перетинаються.

Контрприклади. Учням потрібно знати: щоб спростувати деяке твердження, достатньо навести приклад, який задовольняє умову твердження, але суперечить його вимозі. Для вироблення відповідних умінь навчальний матеріал підручника повинен містити вправи, для розв'язання яких потрібно навести приклади, що ілюструють хибність цих тверджень. Наприклад, чи правильні твердження:

1. У многокутнику сума його кутів не може дорівнювати 180°.

2. Дуга кола із центром O і радіусом 5 см є ГМТ, рівновіддалених від центра O на 5 см.

3. У рівнобічній трапеції: 1) основи рівні; 2) усі сторони рівні.

Методи доведення, де використовується певна математична теорія. Це методи геометричних перетворень, алгебраїчний, векторний і координатний. Застосування цих методів передбачає виконання аналогічних операцій (кроків), які потрібно враховувати під час складання правил-орієнтирів та вироблення відповідних умінь (табл. 1.3.3).

Таблиця 1.3.3

Дослідження властивостей геометричних фігур засобами алгебри

Координатний метод	Векторний метод	Алгебраїчний метод
Розв'язуючи задачу, виконайте три кроки		
1) Запишіть задачу мовою координат; 2) перетворіть алгебраїчний вираз; 3) перекладіть знайдений результат на мову геометрії	1) Сформулюйте задачу мовою векторів і складіть векторну рівність; 2) перетворіть векторну рівність; 3) перекладіть знайдений результат на мову геометрії	1) Уведіть позначення шуканих величин буквами x, y, z...; 2) складіть рівняння або систему рівнянь; 3) розв'яжіть складене рівняння або систему рівнянь

Складені правила-орієнтири можна узагальнити й розширити межі їх застосування, врахувавши, що розв'язування будь-яких практичних задач засобами математики містить також аналогічні кроки: формалізація, розв'язування задачі у межах побудованої моделі, інтерпретація одержаного розв'язку задачі.

Прийоми оперування поняттями. Застосування методів доведення і розв'язування задач передбачає вміння виконувати взаємообернені дії: підведення під поняття (розпізнавання) і виведення наслідків.

Під час підведення об'єкта під поняття встановлюється, чи належить він до цього поняття. Перевіряється наявність в об'єкта певних властивостей і, враховуючи їх логічну структуру (кон'юнктивна, диз'юнктивна, змішана), робиться висновок про належність (чи неналежність) об'єкта до заданого поняття. Дія позначається: $O_B \to O \subset \Pi$ (O_B — властивості об'єкта, $O \subset \Pi$ — математичний об'єкт належить обсягу поняття). Під час виведення наслідків, навпаки, відомо, що предмет належить до даного поняття. Потрібно вказати ті властивості об'єкта, які є наслідками належності його до цього поняття. Дія позначається: $O \subset \Pi \to O_B$.

Важливо виробити вміння оцінювати належність математичного об'єкта до обсягу заданого поняття. Обґрунтовуючи твердження, учні нерідко допускають помилки під час оцінювання належності об'єкта до обсягу заданого поняття внаслідок неврахування логічної структури ознак поняття. Наприклад, коли необхідно обґрунтувати, що заданий трикутник рівнобічний, учні часто, переконавшись у рівності бічних сторін, не зупиняються на цьому, а намагаються встановити ще й рівність протилежних кутів. Доцільно пояснити, що характер оцінювання залежить від логічної структури ознак поняття. Якщо істотні ознаки поняття з'єднані сполучником «і» (кон'юнктивна структура), то для висновку про те, що математичний об'єкт належить обсягу заданого поняття треба знайти всі необхідні й достатні його ознаки. Навпаки, якщо істотні ознаки з'єднані сполучником «або» (диз'юнктивна структура), то операція оцінювання обмежується вказівкою на наявність хоча б однієї з ознак.

Водночас можуть бути використані не лише поняття, але й теореми, які виражають властивості, ознаки понять. Наприклад: щоб установити, що чотирикутник — паралелограм, доведіть, що в ньому: або протилежні сторони попарно паралельні (означення паралелограма); або протилежні сторони попарно рівні (ознака паралелограма); або дві протилежні сторони рівні й паралельні (ознака паралелограма); або діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл (ознака паралелограма). У разі диз'юнктивної структур ознак форма роботи аналогічна.

Обґрунтовано, що правило-орієнтир дії підведення під поняття доцільно подати в такому вигляді:

Щоб встановити, чи належить X поняттю Y:

1. З'ясуйте ознаки Y.

2. Перевірте, яким логічним сполучником вони пов'язані.

3. Якщо:

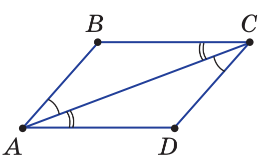
1) сполучником «і», то перевірте, чи є у X всі ознаки Y. Якщо так, то X належить поняттю Y. Якщо ні, то X не належить Y.

2) сполучником «або», то перевірте, чи є у X хоча б одна ознака Y. Якщо так, то X належить поняттю Y. Якщо ні, то X не належить Y. Якщо означення поняття *Y* має змішану структуру ознак (містить і сполучник «і», і сполучник «або»), то до правила-орієнтира потрібно долучити додаткові вказівки [27, с. 76].

Дії підведення під поняття й виведення наслідків використовуються в доведенні тверджень і розв'язуванні задач.

Наприклад: довести, що в паралелограма протилежні сторони попарно рівні (мал. 1.3.4).

Кожен крок доведення є виконанням однієї з двох взаємообернених дій: підведення під поняття або виведення наслідків (табл. 1.3.4).



Мал. 1.3.4

Таблиця 1.3.4

Структура доведення

Кроки доведення	Розумові дії
(Чотирикутник *АВСД* — паралелограм) $\rightarrow$ (*ВС* ‖ *АД*, *АВ* ‖ *ДС*)	$О \subset П \rightarrow О_В$
(*ВС* ‖ *АД*, $\angle ДАС = \angle ВСА$; *АВ* ‖ *ДС*, $\angle ВАС = \angle ДСА$) $\rightarrow$ ($\Delta АВС = \Delta АДС$)	$О_В \rightarrow О \subset П$
($\Delta АВС = \Delta АДС$) $\rightarrow$ ($АВ = СД$, $ВС = АД$)	$О \subset П \rightarrow О_В$

Обґрунтування математичних тверджень і розв'язування задач покращується, якщо учні розуміють будову взаємообернених дій $O \subset П \leftrightarrow O_В$ та вміють їх виконувати.

Аналогія. У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за певними властивостями, ознаками, відношеннями. Під аналогією розуміють такий умовивід, за допомогою якого на основі наявності у двох об'єктів схожих властивостей роблять висновок про те, що вони мають і інші подібні властивості, тобто: якщо A має властивості a, b, c, d, а B — a, b, c, то можливо, і B має властивість d. Проте за аналогією іноді можна одержати й хибний висновок. Тому він потребує обґрунтування за допомогою дедуктивних міркувань.

Багато питань стереометрії вивчаються за аналогією з питаннями планіметрії (координати і вектори, перетворення фігур, паралелепіпед і паралелограм, піраміда і трикутник, куля і коло, деякі властивості взаємного розміщення прямих і площин у просторі та точок і прямих на площині тощо). Наприклад: аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі, тому вивчення в 9 класі властивостей взаємного розміщення у просторі прямих, площин, прямої та площини полегшується, якщо їх сформулювати за аналогією з планіметричними властивостями (табл. 1.3.5)

Таблиця 1.3.5

Властивості фігур на площині і в просторі

Властивості точок і прямих на площині	Властивості прямих і площин у просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються в цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну заданій прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну заданій площині, і тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

Метод аналогії застосовується і в алгебрі. Так, під час вивчення в 9 класі системи двох рівнянь із двома змінними використовується аналогія з вивченим у 7 класі матеріалом. Учні вже знають, що є розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними, що означає розв'язати систему рівнянь, які способи розв'язання системи таких рівнянь (графічний, підстановки, додавання), а також уміють оперувати правилами-орієнтирами. Наприклад:

Щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки: 1) з'ясуйте, у якому рівнянні системи та яку змінну зручніше виразити через іншу; 2) в обраному рівнянні виразіть обрану «зручну» змінну через іншу; 3) підставте знайдений вираз в інше рівняння системи; 4) розв'яжіть отримане рівняння відносно «зручної» змінної; 5) підставте отриманий корінь у те рівняння системи, з якого виразили «зручну» змінну через іншу; 6) розв'яжіть отримане рівняння відносно іншої змінної; 7) запишіть пару чисел, яка є розв'язком системи. Таких прикладів немало.

Семикласники повинні вміти застосовувати правило-орієнтир прийому аналогії: *1) розгляньте об'єкт I, з'ясуйте деякі його властивості; 2) пригадайте, чи не натрапляли ви на схожий об'єкт II; 3) якщо так, то порівняйте об'єкт I з раніше вивченим об'єктом II; 4) знайдіть спільні властивості; 5) перевірте, чи немає в об'єкті II ще якихось властивостей, які поки що не знайшли в об'єкті I; 6) якщо такі властивості є, припустіть, що вони є і в об'єкті I (гіпотеза); 7) спробуйте довести або відхилити гіпотезу; 8) зробіть висновок* [25, с. 74–75].

Засвоєння правил-орієнтирів прийомів розумової діяльності покращить вивчення теоретичного матеріалу, усуне його дублювання, зменшить час на його вивчення, виробить уміння застосовувати математику не лише на практиці, а й під час вивчення інших предметів.

Розроблена трискладова методика навчання, яка забезпечує відповідність навчальних текстів процесу (етапам) застосування математики щодо розв'язання практичних проблем, посилює прикладну спрямованість змісту і таким чином покращує математичну підготовку учнів.

1.4. Практико-орієнтоване навчання математики в умовах воєнного і повоєнного стану

(*М. Бурда, Н. Тарасенкова, В. Васильєва*)

Відділ математичної та інформатичної освіти Інституту педагогіки НАПН України систематично досліджує стан навчання математики й надає методичні рекомендації щодо підвищення якості такого навчання. Але в контексті воєнних дій, що ведуться зараз на території України, спостерігаємо значні відмінності в можливостях усіх учасників навчального процесу, що зумовлює певну специфіку організації навчання математики:

- періодична відсутність навчання на певних територіях (або відсутність уроків із математики через тривоги);
- періодична або постійна відсутність деяких учасників освітнього процесу;
- наявні прогалини у знаннях учнів за попередні роки;
- у значно більшої кількості учасників освітнього процесу є технічні проблеми (відсутність світла, нестача або недостатність гаджетів чи інтернету);

• відсутність звичних засобів навчання (друковані підручники, робочі зошити, відповідні канцтовари тощо);

• погане самопочуття учасників освітнього процесу (недостатньо їжі, води, свіжого повітря, руху, сонця, важкий емоційний стан тощо);

• значно знижена мотивація, самоорганізованість і самоефективність усіх учасників освітнього процесу;

• стрес, у якому перебувають діти, негативно позначається на когнітивних процесах, а отже, ускладнює процес навчання;

• чимало учнів порушують академічну доброчесність;

• обмежені можливості у часі щодо створення контенту для уроку вчителями та виконання домашніх завдань учнями;

• умови, у яких перебувають школярі (звичне житло, внутрішнє переміщення, зовнішнє переміщення), зумовлюють різне відчуття безпеки й дають можливості для навчання;

• класи є не статичними групами, а динамічними, учні часто пропускають уроки або їх частини;

• існує запит на безпечне очне навчання в усіх учасників освітнього процесу;

• за дистанційного навчання існує запит на синхронні онлайн уроки від частини учнів, бо такі уроки допомагають відволіктися від подій, що відбуваються на території України, а також дають змогу поспілкуватися з однокласниками і вчителями.

Ураховуючи особливі освітні умови під час війни, пропонуємо *рекомендації щодо організації навчання з метою подолання втрат у математичній підготовці учнів*.

1. *З'ясування місця перебування дитини*. Це допоможе вчителю в подальшому спланувати свою діяльність і краще розуміти поведінку своїх учнів. Пропонуємо провести опитування в чаті класу. Місцеперебування учнів визначає можливість їх навчання в цей час. Доцільно періодично проводити такі опитування, оскільки ситуація може постійно змінюватися. Крім того, бажано на початку року з'ясувати у батьків, чи є учні, що мають ПТСР (пост травматичний стресовий розлад).

2. *Рекомендується перші тижні нового навчального року присвятити повторенню.* Події, свідками яких стали діти, спричиняють стрес. Тож навіть те, що учні знали, вони могли забути. І на відновлення цих знань, умінь і навичок знадобиться час.

Перший тиждень — адаптація до нових умов всіх учасників навчального процесу. Наприклад, якщо запроваджене синхронне онлайн навчання, то цей час потрібен, щоб зрозуміти умови, за яких відбувається навчання, і можливість учнів відвідувати синхронні онлайн-уроки.

Другий тиждень буде більш продуктивний, бо склад класу стане стабільніший і можна буде досягти кращих результатів під час повторення.

Після повторення бажано провести діагностичну роботу і на її основі скорегувати календарне планування. Крім того, доцільно кожного уроку більше часу приділяти повторенню.

3. На перших уроках необхідно *виробити й обговорити з учнями алгоритм дій у разі повітряної тривоги*. І кожен урок розпочинати з коротких правил, як мають діяти діти.

Якщо йдеться про традиційне навчання, то в учнів можливі різні реакції на сирену (відчуття холоду, тремтіння, скутого тіла тощо). Одним із найдієвіших прийомів саморегуляції у разі підвищеної тривоги у зв'язку зі збудженням під час сирени є відтворення її своїм голосом. Дозвольте учням (особливо перші рази) з певного встановленого вчителем моменту супроводжувати цей звук власним голосом. Це може бути іронічний звук, зі своєю мелодією чи зовсім тихим буркотінням «собі під ніс». Це можна робити як під час сирени, так і після неї. Наприклад, зробити конкурс на найсмішніший, найзліший або найбільш незвичний тип сирени (тобто кожен вигадує свій звук, який йому до вподоби). Якщо ці голосові вправи з'єднати з активними — будь-якими рухами в бомбосховищі, то позитивний вплив буде більш виражений. У такий спосіб людина отримує контроль над стресовою ситуацією і легше повертається в стан спокою, оскільки нервова система зможе себе врегулювати завдяки цим простим прийомам.

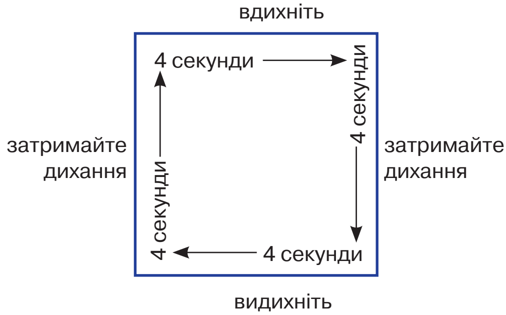
Також повільне дихання та ковтання (навіть жуйка чи невеликі ковтки води) є універсальними й дієвими засобами, які врегульовують збуджену нервову систему.

Якщо ж ідеться про дистанційне навчання, то тут дуже важливо, окрім вироблення і слідування правилам, ще й робота з батьками. Під час синхронних онлайн-уроків математики може звучати сирена, чутися вибухи, крики тощо. Доцільно порекомендувати батькам, щоб, за можливості, вони створили безпечне місце для дитини саме на час уроків. Наприклад, учні можуть одразу спускатись у бомбосховище, якщо там є інтернет, або розпочинати урок одразу в приміщенні без вікон, що оточене двома стінами з усіх боків.

4. *Дистанційне навчання може містити асинхронну і синхронну складові*. Учні потребують саме синхронної складової (а саме спілкування зі знайомими учнями і вчителями). Але, оскільки під час синхронного онлайн-уроку діти можуть як приєднуватися, так і від'єднуватися, то кожен урок фактично має містити як синхронну (онлайн-урок у режимі реального часу), так і асинхронну складову (самостійне ознайомлення з теорією і розв'язуванням вправ за допомогою підготовлених учителем матеріалів чи з використанням різноманітних онлайн-платформ). Крім того, учитель може записувати синхронні онлайн-уроки і надавати всім учням класу доступ до них для повторного перегляду. Проте в такому разі цей файл краще не висилати в чат, а одразу завантажувати на YouTube, робити його доступним лише за посиланням. Щоправда, запис відео завжди знижує активність учнів на синхронних уроках. Тож доцільно на перших уроках відмовитися від такого формату взаємодії.

Оскільки йдеться про динамічний склад учнів класу, то на кожному уроці доцільно відводити час на повторення вже вивченого матеріалу. Повторення матеріалу рекомендується проводити в різних формах (бесіди, опитування, вікторини, тестові роботи навчального характеру, доповіді тощо).

5. Постійний стрес, тривога, страх, панічні атаки, нервова напруга, відсутність спілкування, невизначеність у завтрашньому дні, зміна настрою, проблеми зі здоров'ям, неможливість впливати на ситуацію, апатія — все це призводить до травмування особистості. Варто усвідомити, що в таких умовах учні не відчувають себе в безпеці й не можуть контролювати ситуацію, що, звісно, впливає на їх розумову діяльність, активність та емоційний стан. Тож *бажано, щоб уроки були місточком між їх стабільним минулим і мінливим теперішнім.*



Мал. 1.4.1

За дистанційного навчання деякі учні зазначили, що в них знизилася мотивація (30 % учнів 5–6 класів, 40 % учнів 7–9 класів, 50 % учнів 10–11 класів) та самоефективність (40 % учнів 5–6 класів, 50 % учнів 7–9 класів, 70 % учнів 10–11 класів). Учителі зазначили, що теж помітили зміни в поведінці учнів. 53 % учителів уважають, що в учнів знизилася відповідальність, 44,7 % — погіршилася мотивація, 41,2 % — знизилась увага і концентрація, 34,4 % педагогів помітили погіршення запам'ятовування матеріалу.

Саме тому доцільно вкраплювати в кожен урок математики вправи на дихання або фізичні вправи для стабілізації емоційного стану учнів. Такі вправи дуже корисні для дітей, оскільки позитивно впливають не лише на їхній загальний емоційний стан, а й на можливість працювати на уроці, адже стрес негативно позначається на когнітивних процесах. Серію таких вправ було презентовано на вебінарі від Інституту педагогіки та Інституту соціальної і політичної психології НАПН України (https://www.youtube.com/watch?v=scLSyWd1Qn4&t=4s).

Наприклад, на початку уроку вчитель може запропонувати дітям себе обійняти, показуючи, як би міцно вони хотіли обійняти інших учнів із класу (зараз цього усім дуже не вистачає) або запропонувати техніки дихання, наприклад «дихання квадратом» (мал. 1.4.1), і пояснити, що ця вправа допоможе дітям заспокоїтися, коли відчуватимуть страх.

6. Оскільки в умовах стресу можливий регрес, то учні можуть забувати терміни, таблицю множення, правила виконання дій тощо.

У будь-якому класі після вправ для стабілізації емоційного стану доцільно запропонувати легкі вправи на усні обчислення, вправи на розпізнавання геометричних фігур тощо для забезпечення своєрідного «розігріву» на початку уроку.

Особливу увагу на уроці треба приділити підготовці учнів до вивчення нового змісту. Важливо, щоб така підготовка була цільовою, а не стихійною. Якщо на уроці центральним об’єктом засвоєння є нове поняття або математичний факт (аксіома, теорема, формула тощо), то треба застосувати повторення базових знань (понять і фактів) та не витрачати час на відновлення базових умінь. Якщо ж центральним об’єктом засвоєння є новий спосіб діяльності (правило, алгоритм, евристична схема, спосіб розв’язування задач та доведення математичних тверджень) або вивчення нових понять і фактів неможливе без відновлення певних умінь, то треба застосувати актуалізацію базових знань і вмінь, що передбачає два етапи: 1) повторення базових понять і фактів; 2) відновлення базових умінь. Для першого етапу треба створити систему запитань на повторення. Для другого важливо: виділити послідовність дій нового способу діяльності; визначити, які із цих поелементних умінь уже формувалися в учнів раніше, тобто є базовими, а які є новими; дібрати вправи на відновлення кожного базового вміння. Наприклад, для знаходження НСК двох чисел (6 клас) послідовність дій можна подати так:

1) розкладіть задані числа на прості множники;

2) випишіть розклад найменшого із заданих чисел;

3) допишіть до цього розкладу такі множники з розкладу іншого числа, які ще не увійшли до добутку;

4) обчисліть отриманий добуток.

Перше й останнє вміння є базовими, друге — і базовим (виписувати розклад уже навчилися, шукаючи НСД), і новим (ще не було добору найменшого із заданих чисел), а третє — повністю новим. Також новим є комплексне вміння знаходити НСК двох чисел. Тож система запитань і вправ для актуалізації базових знань і вмінь може бути такою:

Перший етап (повторення):

1) Яке число називається простим? Наведіть приклад.

2) Чи є число 1 простим?

3) Які числа є взаємно простими?

4) Що означає розкласти число на прості множники?

5) Як записати розклад простого числа на прості множники?

Другий етап (відновлення вмінь):

1) Розкладіть на прості множники числа: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

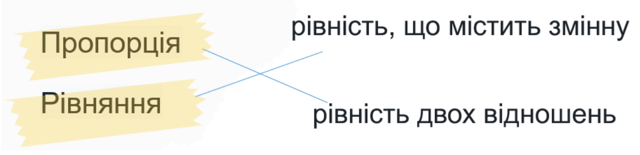
2) Випишіть розкладання числа 10.

3) Допишіть до цього розкладання нові множники з розкладання числа 15.

4) Обчисліть отриманий добуток.

Проведена в такий спосіб актуалізація базових знань і вмінь створює умови для так званого «Ага-ефекту», коли системою запитань і вправ думка учнів спрямовується до «самостійного відкриття» нового для них способу діяльності — правила знаходження НСК двох чисел.

Також у пригоді можуть стати завдання на встановлення відповідності. Наприклад, завдання на відповідність між терміном і означенням відповідного поняття (мал. 1.4.2) тощо.



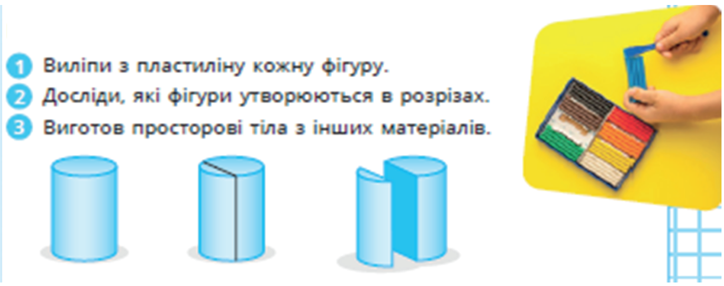
Мал. 1.4.2

7. *Чергування теоретичної і практичної частин уроку* засвоєння нових знань. Тобто теоретичний матеріал розбивається на блоки й одразу після першого блоку пропонується кілька вправ на застосування, потім переходять до другого блоку теоретичного матеріалу і вправ на його застосування і т. д.

Травматичний стан ускладнює сприйняття абстрактних понять. Тож викладення матеріалу має супроводжуватися значною кількістю наочності. Причому бажано, щоб наочність була різною. Наприклад, у 5 класі під час вивчення звичайних дробів це можуть бути реальне печиво, поділене на частини, малюнок торта чи малюнок круга, поділеного на сектори.

Візуалізація навчальних текстів забезпечується використанням комп'ютерних презентацій, відео, програмних засобів навчального призначення (бібліотеки електронних наочностей, GRAN, GeoGebra, Desmos тощо) для графічного аналізу функцій, побудови їх графіків, розв'язування систем рівнянь і нерівностей, для знаходження площ фігур, обмежених графіками функцій, побудови перерізів геометричних тіл, обчислення об'ємів тіл обертання, для організації дослідницької, проєктної діяльності тощо. Вони корисні для унаочнення абстрактних математичних понять, різних граничних переходів. Супровід навчальних текстів новими інформаційними технологіями дає змогу викликати інтерес до навчання математики, активізувати навчально-пізнавальну, дослідницьку, проєктну діяльність учнів, посилити самостійність у набутті математичної компетентності.

Дітям зараз може бути важче сприймати геометричний матеріал. Тож бажано залучати їх до конструювання фігур і виконання різних дій із ними, наприклад, перегинання паперового кута під час вивчення бісектриси або дослідження перерізів просторових тіл, які було зліплено з пластиліну (мал. 1.4.3), тощо.



Мал. 1.4.3

Перегинання паперу — оригінальний і цікавий для учнів підхід до розв'язування задач, основні поняття якого — пряма, точка і прямокутний або квадратний аркуш паперу. За допомогою перегинання аркуша можна робити всі операції, що й лінійкою, циркулем та олівцем. Учні із цікавістю розв'язують такі задачі:

— За допомогою перегинання аркуша паперу проведіть через задану точку пряму, перпендикулярну (паралельну) до заданої прямої.

— Із паперу вирізано трикутник. Як за допомогою перегинання трикутника провести:

1) бісектрису кута трикутника;

2) медіану, проведену до заданої сторони;

3) висоту, проведену із заданої вершини (якщо кути при двох других вершинах гострі).

— Із паперу вирізано прямокутник. Як за допомогою перегинання отримати з нього квадрат, сторона якого дорівнює меншій стороні прямокутника.

8. *Дотримання особливих вимог до добору навчального матеріалу* під час дистанційного та змішаного навчання. Деякі з них:

— Навчальний матеріал має *враховувати особливості навчальної діяльності сучасних учнів*: краще засвоюють структурований, візуалізований навчальний матеріал; орієнтуються на практичне використання знань; зосереджені на конкретних навчальних цілях; потребують систематичного зворотного зв'язку — роботи в групах, обміну досвідом тощо.

— Варто застосовувати *укрупнення навчального матеріалу* — зближувати в часі вивчення аналогічних або схожих понять, взаємно обернених тверджень, операцій. Це сприятиме цілісності знань. Наприклад, взаємно обернені теореми, функції можуть стосуватися одних і тих самих об'єктів, але об'єкт, який в одній операції відомий (заданий), в оберненій стає шуканим. Взаємозв'язаними є поняття паралельність — перпендикулярність, призма — циліндр, піраміда — конус, лінійні рівняння — лінійні нерівності тощо). Так, паралельність і перпендикулярність прямих та площин у просторі перебувають у певній залежності (з паралельності одних елементів можна зробити висновок про перпендикулярність інших і навпаки). Поняття призми і циліндра, піраміди і конуса також можна подавати паралельно, виділяючи деякі спільні властивості, які випливають із побудови цих тіл. Важливі особливості:

- *Групування завдань* за спільними способами розв'язування (ідеями, планами) та систематизація навчального матеріалу значно покращуватиме застосування математики до розв'язування задач, зокрема практичного змісту.
- *Інтеграція змісту* — важлива вимога до навчання математики. Наразі суттєве посилення внутрішньопредметних (алгебра, алгебра і початки аналізу, планіметрія, стереометрія) і міжпредметних (математика та інші навчальні предмети, математика і різні галузі діяльності) зв'язків. У змісті математики мають бути посилені зв'язки між алгеброю і геометрією, планіметрією і стереометрією. Йдеться про взаємопроникнення геометричних методів і образів в алгебру й навпаки; про геометричну інтерпретацію алгебраїчних залежностей і аналітичне тлумачення геометричних фактів. Дієвими інтеграційними чинниками є відомості про математичні методи, зокрема метод координат.

9. Компенсація освітніх втрат має передбачати, щоб у процесі навчання математики в учнів забезпечувалося *вироблення вмінь самостійно вчитися*, застосовувати універсальні, загальні прийоми і способи розумової діяльності. Останні є важливою умовою набуття вмінь самостійно опановувати знання та використовувати їх як під час вивчення інших предметів, так і в реальних життєвих ситуаціях. У процесі навчання математики учні мають засвоювати (безпосередньо чи опосередковано) прийоми розумової діяльності (аналіз, синтез, аналіз через синтез, порівняння, абстрагування, узагальнення, аналогія, класифікація); алгоритмічні приписи й евристичні схеми, евристичні плани (розв'язування задач, вивчення понять і властивостей, явищ і законів, здійснення спостережень, виконання дослідів і проєктів), оволодівати методами доведення тверджень. У навчанні математики стануть у пригоді навчальні посібники «Логіка 5», «Логіка 6» та «Логіка 7» (авт. О І. Буковська, Д. В. Васильєва), які ознайомлюють учнів із кожним із цих прийомів та методів, зокрема на основі математичних проблемних ситуацій; посібник «Майструємо. Малюємо. Міркуємо. Тренувальні й творчі завдання з математики для учнів 6 класів» (авт. Н. А. Тарасенкова, І. А. Акуленко, Л. О. Кузьменко), який містить завдання за змістом курсу математики 6 класу й допомагає учням краще його зрозуміти, спираючись на наочно-дієве, наочно-образне й абстрактне мислення, дає посильне занурення в логіку.

10. Дистанційне навчання має бути орієнтованим на *застосування математики в реальних практичних ситуаціях*, у майбутній професійній діяльності, під час вивчення інших шкільних предметів, що передбачає: виокремлення типових практичних ситуацій, для розв'язання яких найчастіше використовується та чи інша математична модель.

Наприклад, практичними ситуаціями з теми «Коло і круг. Геометричне місце точок» можуть бути такі: відшукання центра предметів, що мають форму круга; обчислення довжин кіл предметів, що мають форму круга, та їх площ за радіусами й діаметрами, і навпаки; знаходження висоти, глибини, відстані; облаштування предметів на місцевості (клумб, ділянок землі, ковзанок тощо), що мають форму круга; знаходження місця для об'єкта (автобусної зупинки, залізничної станції, криниці, мосту, бази відпочинку тощо), де йдеться про рівність певних відстаней.

Навчання математики ефективне, якщо забезпечуватиметься його прикладна спрямованість, що здебільшого реалізується під час розв'язування задач практичного змісту. Учні мають оволодіти етапами застосування математики під час вивчення інших предметів, до розв'язування проблем, які виникають у людській практиці (формалізація; розв'язування задачі у межах побудованої моделі; інтерпретація одержаного розв'язання до вихідної ситуації). Математичні задачі є моделями відповідних задач практичного змісту. Вироблення вмінь застосовувати математичні знання на практиці передбачає, щоб *розв'язання суто математичних задач (М) і задач практичного змісту (П) не віддаляти в навчальному часі, а максимально наближувати й розглядати як взаємно обернену діяльність*. Приміром, можна подати пари задач, де спочатку розв'язується задача математична (М), а потім вона використовується як модель під час розв'язання задачі практичного змісту (П). Наприклад:

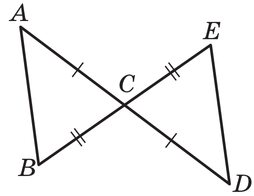
1) (М) Точки A, B, C лежать на прямій. Відстань між точками A і B дорівнює 10 см, а між точками A і C — 6 см. Знайдіть відстань BC. Розгляньте два випадки.

(П). Три школи розміщено на одній прямій. Відстань між школами № 1 і № 2 дорівнює 5 км, а між школами № 1 і № 3 — 4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?

2) (М). Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

(П). Як визначити центр металевої деталі, що має форму круга, скориставшись кутником і лінійкою з поділками.

3) (М). Дано: $AC = CD$, $BC = CE$ (мал. 1.4.4). Доведіть: $AB = DE$.



Мал. 1.4.4

(П). На малюнку 1.4.5 показано, як виміряти відстань між пунктами А і В, між якими не можна пройти по прямій.

Поясніть вимірювання.

Мал. 1.4.5

Потім, розв'язуючи різні задачі практичного змісту, учні виконують обернену дію — переходять від практичної задачі до геометричної, яка є її абстрактним аналогом, розв'язують та інтерпретують одержаний результат. Тобто, розв'язування геометричних задач і задач практичного змісту розглядається як взаємно обернена діяльність: (М) $\leftrightarrow$ (П).

У процесі такої діяльності учні роблять висновок, що один і той самий математичний факт може використовуватись як основа для розв'язування різних практичних задач і навпаки — різні за сюжетом практичні задачі можуть зводитися до однієї математичної моделі.

11. В умовах російсько-української війни виникає нагальна необхідність переосмислення зробленого і здійснення системних заходів, спрямованих на *посилення патріотичного виховання дітей та молоді*. Потрібно звертати увагу учнів на українських математиків, їх внесок у розвиток науки. Вивчення біографій видатних земляків виховує гордість за свою Батьківщину, рідний край. Одним із таких прикладів може стати біографія академіка Всеукраїнської академії наук Михайла Пилиповича Кравчука, якого 1938 р. безпідставно репресували й заслали на Колиму, де він і загинув. На його пам'ятнику в Києві написано девіз його життя: «Моя любов — Україна і математика». Учням бажано якомога більше розповідати про справжніх патріотів України. Важливою складовою частиною патріотичного виховання, яка в часи воєнного стану набуває пріоритетного значення, є військово-патріотичне виховання, зорієнтоване на формування готовності до захисту України, заохочення здобувати військові професії тощо.

Для того щоб збільшити потенціал математики у формуванні в учнів громадянської відповідальності, необхідно частіше залучати до змісту уроку задачі, що викликають почуття гордості за рідну країну і стосуються державності, символів, столиці, традицій, визначних місць, здобутків українського суспільства чи його національних цінностей тощо. А також задачі про права й обов'язки громадянина України, права людини і механізми їх захисту, права дитини; роль законів у житті суспільства та готовність свідомо їх приймати і добровільно виконувати; сутність демократії, демократичні цінності, демократичну державу й активну участь громадян у її житті, роль ЗМІ в суспільному житті; громадянську ідентифікацію, ухвалення суспільних рішень і форми участі людей у житті громади та суспільства в цілому, контроль громадян над владою; вмотивованість до суспільно значимих дій і вчинків, уміння передбачати наслідки своїх дій і вчинків, усвідомлення власної відповідальності за навколишній світ, необхідність допомагати; основи співпраці та спілкування з людьми, шляхи розв'язання конфліктних ситуацій, толерантне ставлення до інших людей; систему загальнолюдських і національних цінностей, повагу до державних символів, історії, культури; потребу засвоєння системи знань, зокрема історичних і політико-правових; сутність ринкових відносин, економічні чинники розвитку демократичного суспільства.

12. *Рекомендується використовувати різноманітні онлайн-сервіси* в навчанні математики, які допоможуть учителю в поданні нового навчального матеріалу; формуванні вмінь розв'язувати різні завдання; перевірці якості засвоєння учнями навчального змісту та ходу і результатів формування в них компетентностей; наданні зворотного зв'язку чи організації комунікації зі школярами; творчій навчальній діяльності на різних уроках.

Учителі можуть пропонувати учням працювати на онлайн-платформах, що містять уже готовий навчальний контент із математики українською мовою або комплексні онлайн-курси. Наприклад:

Всеукраїнська школа онлайн (https://lms.e-school.net.ua/) — безкоштовна українська онлайн платформа, що містить онлайн курси для кожного з класів.

Платформа GIOS (gioschool.com) містить онлайн курси з математики для 5–9 класів, розбиті на уроки. До кожного уроку подано відео, схеми, приклади розв'язаних завдань і серію завдань різної форми та складності. Наприкінці уроку запропоновано ще блок прикладних задач. Учитель може використовувати готові уроки, змінювати наявні або ж створювати свої за допомогою конструктора уроків.

Matific (https://www.matific.com/ua/uk/home/) — платформа з математики для учнів 1–6 класів, що містить симуляції проблемних життєвих ситуацій, для розв'язання яких знадобляться знання з математики. Зручним є конструктор платформи, що допомагає добирати завдання не лише за рівнем складності, потрібними навичками, а й орієнтовним часом для виконання завдань.

Mathlearningcenter пропонує чудову добірку безкоштовних симуляцій (mathlearningcenter.org/apps) для учнів 1–9 класів.

Академія Хана (uk.khanacademy.org). Платформа, що містить готові відео з поясненням теоретичного матеріалу й серію запитань до них.

Курс «Математика. Просто» на платформі EdEra (https://courses.ed-era.com/courses/course-v1:EDERA-OSVITORIA+Math101+2019/about) створений для підготовки учнів до ЗНО, але може бути використаний і для вивчення окремих тем з математики в 10—11 класах.

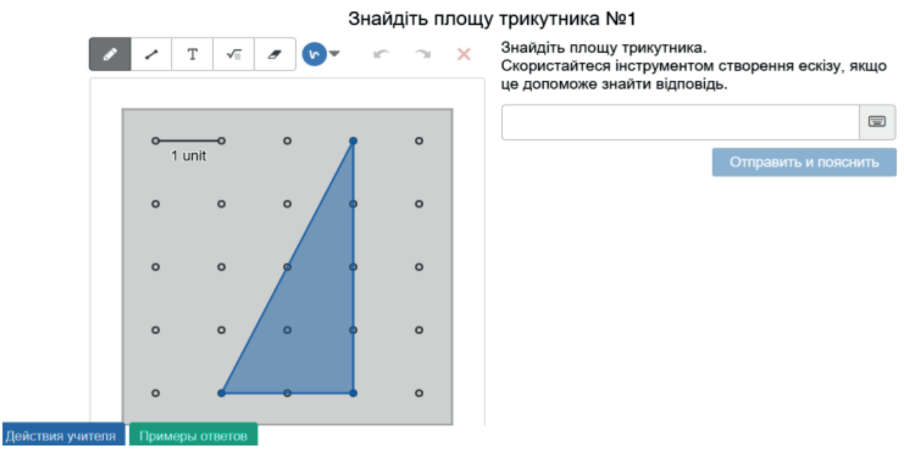
Курс підготовки до ЗНО з математики (https://courses.prometheus.org.ua/courses/course-v1:ZNO+MATH101+2017_T1/about).

Onlinetestpad (https://onlinetestpad.com/ua) — оболонка для створення опитувань, тестів, кросвордів, уроків. Містить також бібліотеку готових українських розробок.

Matematikatests (https://matematikatests.in.ua/) — платформа, що містить готові завдання тестової форми середньої складності саме з математики.

Learning.ua (https://learning.ua/matematyka/) — платформа для учнів 1–11 класів, на якій містяться окремі завдання з тем.

Два онлайн-ресурси, GeoGebra та Desmos, заслуговують на особливу увагу з боку вчителів математики, бо вони дають змогу учням працювати з анімацією і керувати нею. Учні можуть пересувати повзунки або інші елементи керування, щоб побачити, як певні параметри впливають на математичні явища. Наведемо приклад завдання з анімацією, що запропоноване в Desmos на тему «Площа трикутника» (мал. 1.4.6).



Мал. 1.4.6

За допомогою GeoGebra та Desmos учні можуть використовувати вбудовані редактори формул та графічні калькулятори. Обидва сайти пропонують у бібліотеках багато безкоштовних готових завдань, які вчителі можуть змінити або налаштувати під себе, щоб їм не довелося починати з нуля.

Desmos Classroom можна використовувати для організації парної та групової форм роботи під час дистанційного чи змішаного навчання. Одна з активностей Desmos Classroom має функцію віртуальної дошки, на якій учні можуть працювати разом у режимі реального часу, обмінюватися своїми ідеями, розв'язувати математичні завдання, спільно створювати малюнки чи графіки тощо.

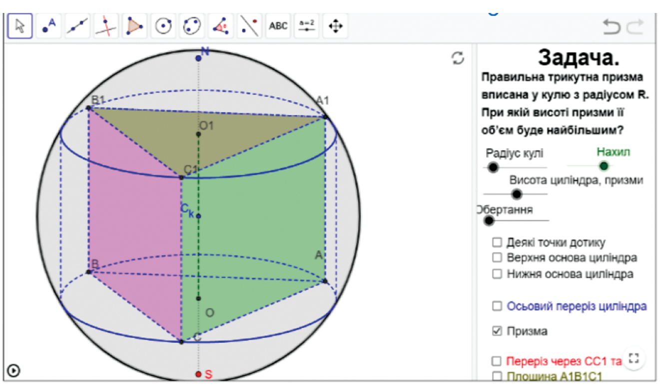
Учитель може сформувати завдання в Desmos Classroom, яке потрібно виконати в парах. Наприклад, створити графік функції та попросити учнів дослідити за ним властивості функції. Діти можуть обговорювати свої результати в онлайн чаті або на форумі навчальної платформи.

Для продуктивного проведення уроків, що стосуються функцій та їх графіків, існують такі ресурси, як Geometry Pad, Desmos Calculator та Advanced Grapher.

Desmos Calculator — потужний онлайн-ресурс (https://www.desmos.com/calculator?lang=uk), що дає можливість легко і швидко побудувати графіки будь-яких функцій. Також існує додаток Desmos Calculator, який учитель може завантажити на комп'ютер чи телефон, якщо у класі немає інтернету.

Аналогічний ресурс, який учитель може використовувати без доступу до інтернету, є AdvancedGrapher та GeometryPad. Наприклад, на уроках в 11 класі під час вивчення тем «Дотична до графіка функції» і «Похідна показникової та логарифмічної функції» учні можуть побудувати графіки функцій і дотичну, проведену через задану точку до графіка. Школярі будуть мати значення кутового коефіцієнта, тобто значення похідної в цій точці. Також за допомогою цього програмного засобу легко продемонструвати геометричні перетворення графіків функції.

Під час вивчення стереометрії в пригоді стануть такі ресурси, як Shapes 3D та Geogebra. Використовуючи Geogebra (https://www.geogebra.org/t/math), учитель має можливість не лише створювати власні моделі, а й використовувати бібліотеку вже готових моделей та завдань для учнів. Серед них є і завдання українською мовою, наприклад, одне з них (мал. 1.4.7 на с. 54) розміщене за покликанням (https://www.geogebra.org/m/Tm4Uts3b).

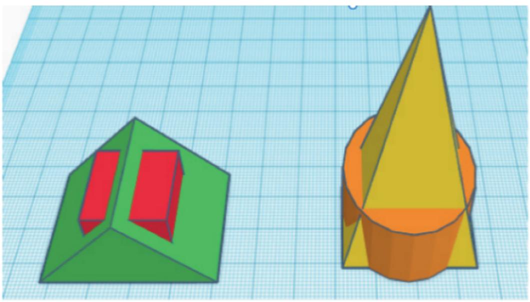


Мал. 1.4.7

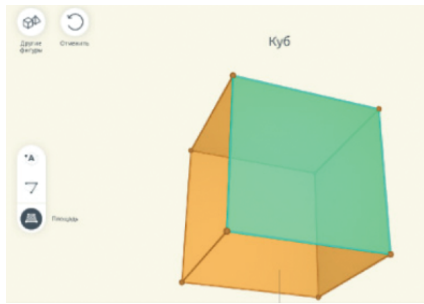
За допомогою ресурсу Shapes 3D (shapes.learnteachexplore.com), що має дуже гарний дизайн, наочно можна показати учням розгортки кожної з фігур, розглянути утворення тіл обертання, знайти площу граней тощо (мал. 1.4.8).

Також для уроків стереометрії корисними будуть програмні засоби моделювання фігур для 3D-друку (мал. 1.4.9). Це — Tinkercad, Thingiverse, Shapeways, AutodeskFusion 360, SketchUp тощо.

Не менш важливо шукати способи й засоби *використання можливостей штучного інтелекту для супроводу освітнього процесу*.



Мал. 1.4.8



Мал. 1.4.9

Наприклад, для генерування зображень, створення відео тощо стануть у пригоді сервіси з вбудованими функціями штучного інтелекту:

— Craiyon V3 (https://www.craiyon.com/);
— Leonardo.ai (https://leonardo.ai/);
— Ahaslides (https://ahaslides.com/uk/);
— Adobe Spark (https://www.adobe.com/express/?promoid);
— Canva for Education (https://www.canva.com/uk_ua/osvita/).

В умовах воєнного стану дуже важливо створювати позитивний, заспокійливий та обнадійливий супровід на математичному змісті. Наприклад, на сервісі Kazka.fun за допомогою штучного інтелекту можна складати зворушливі історії на базі математичних означень, фактів, правил і алгоритмів, а потім залучати учнів до створення власних математичних історій. Ось як на базі наших вихідних даних про рівні/подібні трикутники ШІ подає історію Двійнят-трикутників Трикусі й Трикі (мал. 1.4.10, https://kazka.fun/story_page/заголовок-пригоди-двійнят-трикутників) та старшого й меншого братів-трикутників Трика й Трикі (мал. 1.4.11, https://kazka.fun/story_page/заголовок-пригоди-братів-трику-і-трикі).

Ніна Тарасенкова Наука та експерименти

Заголовок: «Пригоди Двійнят-Трикутників»

Обрати іншу картинку

Жили-були у країні Трикутії двійнята-трикутники Трикуся і Трикі — сестра і брат. Вони — найдопитливіші діти у цілій країні і завжди досліджували щось нове й цікаве. Одного разу, під час вечірньої прогулянки, вони почали обговорювати, чим вони схожі і чим відмінні.

«Ми обидва маємо рівні відповідні кути і відповідні сторони, але чи завжди треба вимірювати всі шість елементів?» — запитала Трикуся.

«Це цікаве запитання, сестричко. Можливо, є ще якісь інші способи порівняння?» — відповів Трикі.

І так почалася їхня пригода. Двійнята вирішили провести експеримент і знайти відповідь на це запитання. Вони почали досліджувати різні предмети трикутної форми, шукаючи відповідь.

Під час своїх досліджень Трикуся і Трикі потрапили у веселі ситуації. Вони зустріли дивовижних істот, які допомогли їм розгадувати головоломки і відкривати нові знання.

Урешті решт. Двійнята зрозуміли, що не завжди потрібно вимірювати всі шість елементів трикутників, щоб установити їх рівність. Іноді досить поглянути лише на три елементи, серед яких обов'язково є хоча б одна сторона.

Так Трикуся і Трикі закінчили свою пригоду з новими знаннями та усмішками на обличчях.
Вони зрозуміли, що наука — це дуже цікаво і корисно, й завжди варто досліджувати нове

Отак Двійнята Трикутники вчили дітей важливості науки та експериментів, показуючи, що навіть найскладніші питання можуть бути розв'язані з гумором і жартами.

Мал. 1.4.10

Зазначимо, що сюжетну канву задано нами, а розгортання оповіді та текст кожної історії згенеровано ШІ. А це означає, що після ознайомлення з історією про рівні/подібні трикутники, згенерованою ШІ, учням цілком можна поставити завдання створити власну історію про трикутники за допомогою ШІ. У такий спосіб дидактично доцільно реалізувати в навчанні математики педагогічну технологію «Сторітеллінг».

Заголовок: «Пригоди Браиів Трика й Трикі»

Обрати іншу картинку

Жили-були у країні Трикутії два брати — Трик і Трикі. Вони були дуже допитливі та розумні трикутники, які завжди хотіли дізнатися більше про себе та світ навколо.

Одного разу, під час своїх досліджень, вони вирішили вивчити, чим вони схожі і чим відмінні. Спочатку вони виміряли свої кути й дізналися, що їхні кути попарно різні. А потім вони виміряли свої сторони. Виявилося, що Трик мав сторони, які були вдвічі більші ніж у Трикі.

Тоді брати Трик і Трикі відвідали Велику Школу Математики, де вивчили нові означення, теореми й правила. Вони з'ясували, що як старший і молодший брати вони не є рівними трикутниками, бо їхні сторони не є відповідно рівними, хоча кути й рівні. А є подібними трикутниками, бо в них кути відповідно різні, а сторони відповідно пропорційні. До того ж коефіцієнт пропорційності дорівнює 2.

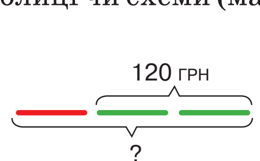
Після багатьох пригод і випробувань брати Трик і Трикі зрозуміли, що навіть якщо вони різні, вони завжди можуть працювати разом, доповнюючи один одного. І, навіть якщо вони різні, вони завжди можуть бути найкращими братами.

Так брати Трик і Трикі завершили свої пригоди з новими знаннями та дружбою, яка була їх найважливішим відкриттям. Вони завжди пам'ятатимуть, що навіть якщо вони різні, вони завжди можуть бути разом і досягати неймовірних успіхів.

Мал. 1.4.11

13. У більшості учнів спостерігається регрес, тож розв'язування задач варто розпочинати з дуже простих. І навіть на таких задачах доцільно залучати учнів до моделювання, якому передує створення скороченого запису умови задачі, малюнка, таблиці чи схеми (мал. 1.4.12 на с. 56).

На придбання зошитів Оля витратила $\frac{2}{3}$ своїх грошей. Скільки грошей було в Олі, якщо за зошити вона заплатила 120 грн?



1) 120 : 2 = 60 (грн) — становить третя частина грошей.

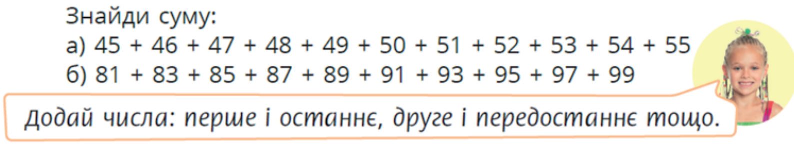
2) 60 · 3 = 180 (грн) — всього було грошей.

Відповідь. 180 грн.

Мал. 1.4.12.

Дуже важливий зворотний зв'язок: сигнальні картки, опитування, перевірка завдань, аналіз роботи над помилками.

14. Варто враховувати, що пам'ять зараз працює не так, як у мирний час, тож, якщо на уроці учням дедалі важче дається розв'язування задач, то, пропонуючи завдання на застосування формул, можна розміщувати підказки на дошці або слайді (мал. 1.4.13).



Мал. 1.4. 13

Для *збереження мотивації та активності учнів* під час дистанційного навчання потрібно забезпечувати динаміку синхронних онлайн-уроків. Бажано пропонувати різноманітні, але не важкі завдання. Також значну кількість усних завдань. Це можуть бути завдання на знаходження зайвого чи помилки вже в готових міркуваннях або способах розв'язування, на озвучування різних способів розв'язування задачі тощо. У пригоді стануть різноманітні електронні платформи, що надають одразу зворотний зв'язок учням і дають змогу вчителю бачити статистику проходження уроків чи вправ.

Крім того, певна частина завдань мають бути присвячені повторенню раніше пройденого матеріалу.

15. *Відновлення навчання* — це чудова можливість для учнів у нелегкий час поспілкуватися з тими, хто їм близький і за ким вони скучили, а для декого й побачити знайомі обличчя та почути рідну мову. В умовах воєнних дій дітям дуже не вистачає комунікації з однолітками. 26,2 % учителів помітили, що після відновлення навчання учні почали активніше взаємодіяти один з одним. Саме тому з метою подолання втрат рекомендується застосовувати поряд зі звичною класно-урочною системою групове навчання; залучати учнів до кооперативного навчання (онлайн чи традиційного), де учні, що відвідували уроки й засвоїли теми, працюють з тими, хто не отримав базових знань. Важливо пропонувати об'єднання учнів у групи та пари на уроках математики. У дистанційному форматі поділ класу на групи можна здійснити за допомогою сервісів Zoom та Google Meet. У парі й групі учні можуть ознайомлюватися з новим матеріалом, обговорювати, чи застосовувати його, розв'язувати різноманітні завдання тощо. У межах школи доцільно організовувати волонтерську роботу старшокласників щодо пояснення матеріалу учням молодших класів. Учні-волонтери мають отримувати додаткові оцінки або ж волонтерські години від школи, які згодом стануть важливим досвідом під час вступу до закладів вищої освіти.

16. Якщо на уроці вчитель пропонує громіздке завдання, то бажано, щоб його розв'язували кілька учнів (ланцюжком). У такому разі більша кількість дітей є активними. Крім того, такі завдання можна розібрати на уроці (але не записувати) і запропонувати записати їх розв'язання як домашнє завдання. Але за цих умов на наступному уроці учні мають мати змогу звірити своє розв'язання з іншими (наприклад, з тим, що вчитель виведе на слайд).

17. Організувати себе деяким учням дуже важко, тим більше під час війни. Відтак лише 89 % учнів 5–6 класів, 62 % учнів 7–9 класів і 40 % учнів 10–11 класів виконують домашні завдання.

Обсяг домашніх завдань зараз має бути виваженим. Задля підвищення мотивації можна пропонувати творчі завдання чи на конструювання. Наприклад, створити картину за допомогою різнокольорових прямих, а потім виміряти вертикальні кути (чи внутрішні односторонні) або ж кути утворених трикутників, вписати прямокутні трикутники, спробувати знайти тригонометричні функції гострих кутів цього трикутника тощо.

Сучасні діти звикли до ґаджетів, тож як домашнє завдання їм можна пропонувати виконання вправ на різноманітних тестових ресурсах або онлайн-платформах.

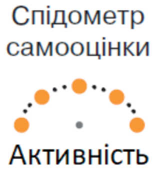
Варто зауважити, якщо вчитель пропонує учням навіть мінімальне домашнє завдання, то зворотний зв'язок дуже важливий (опитування, перевірка завдань, аналіз роботи над помилками тощо). Для економії часу доцільно використовувати в домашній роботі завдання на різноманітних електронних платформах, що надають одразу учням зворотний зв'язок і змогу вчителю бачити статистику проходження уроків чи вправ (наприклад, онлайн-платформа GIOS чи ВШО).

18. Тривалий синхронний онлайн-формат навчання підтримує в учнів ілюзорне бачення, нібито вчитель не контролює їхню діяльність на уроці. Часто діти виконують дії «на автоматі», й іноді лише тоді, коли просять саме їх. Тож, щоб покращити сприйняття, бажано якомога частіше залучати учнів до активної діяльності та розвивати спроможність до самоконтролю.

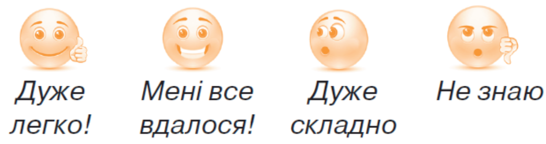
Як можна сприяти розвитку спроможності до самоконтролю учнів під час онлайн-навчання?

- Навчіть учнів ставити будильник на визначений час, щоб не спізнюватися на ваші синхронні онлайн-уроки, або допоможіть їм зробити нагадування в Google-календарі.
- У проміжках між завданнями пропонуйте запитання для самоконтролю. Це може бути одне чи кілька запитань на слайді, на які учень має дати відповіді сам собі, наприклад: «Чи зрозумів задачу?», «Чи записав її у зошит?» (іноді можете пропонувати давати відповіді на такі запитання в чаті).
- Пропонуйте учням наприкінці виконання деяких завдань малювати для себе спідометри самооцінки (мал. 1.4.14 на с. 59). Наприклад, нехай діти намалюють, наскільки вони вважають активним себе під час виконання цього завдання, або як вони оцінюють трудність цієї задачі для себе). Іноді за бажанням учні можуть ділитися значеннями

на своїх спідометрах. Замість спідометрів можна використовувати різноманітні смайлики (мал. 1.4.15).



Мал. 1.4.14



Мал. 1.4.15

• Корисними є вкраплення різноманітних завдань на уважність, а також нагадування учням, що іноді задачу потрібно прочитати повільніше чи кілька разів або ж розбити її на підзадачі тощо. Обов'язковим є планування результату чи перевірка після отримання відповіді.

• Чудово розвиваються вміння самооцінювання в процесі виконання самостійних робіт навчального характеру. Тобто зараз переважати можуть не самостійні задля оцінки, а своєрідні випробування сил кожного учня. За такої умови це може бути 2–3 легких вправи, які учні виконують самостійно, наприклад, на початку або наприкінці онлайн-уроку, потім звіряють із правильними відповідями, що надає вчитель, і виставляють собі самостійно оцінку (діти можуть її не озвучувати). В умовах війни самостійні роботи й різноманітні тести мають бути короткотривалими (до 10 хв), не важкими, їх основне призначення — запустити в учнів процеси самоаналізу, самооцінки, самокорекції. Саме такі завдання містяться в навчальних посібниках з експрес-контролю для 5–11 класів (авт. Н. А. Тарасенкова та ін.) та щоденниках самооцінювання для учнів 5 і 6 класів (авт. Н. А. Тарасенкова).

19. *Обов'язковим компонентом закінчення уроку має стати рефлексія*, за допомогою якої вчитель зможе з'ясувати рівень розуміння класом теми, виокремити учнів, яким потрібна допомога та скорегувати свою методику.

Наприклад (мал. 1.4.16), учитель може запропонувати учням поставити точку на мішені, що характеризуватиме його діяльність на уроці.

Мал. 1.4.16

20. Рекомендуються *інструменти й технології для вимірювання втрат* учнів із математики, зумовлених як пандемією, так і війною:

— система семестрового та річного тестування результатів навчання, де 2/3 тестових завдань стосуються суто математичної компетентності, 1/3 — математичної як ключової;

— діагностичні тести з платформи ВШО для учнів 5 класів (для виявлення прогалин за початкову школу), для учнів 7 класів (для виявлення прогалин за курс 5–6 класів), для учнів 9 класів (для виявлення прогалин за 7–8 класи);

— підсумкові письмові роботи в кожному класі за попередній рік з інтерактивними формами їх перевірки;

— повторення на початку навчального року завершується діагностичною роботою, за результатами якої корегується календарне планування;

— спостереження за динамікою освітніх втрат (після повторення теми, у якій були прогалини у знаннях і вміннях, пропонується письмова робота, аналогічна до тієї, що була проведена перед повторенням).

Підсумки. Відслідковування втрат учнів із математики та запровадження дієвих механізмів їх компенсації зумовлюється значенням математичної освіти під час війни і в повоєнний час. Зокрема:

1) здатність аналізувати, критично мислити найкраще розвивається в процесі навчання математики. У сучасних умовах, коли війна супроводжується ворожою пропагандою, важливо, щоб людина вміла перевіряти та зіставляти факти, аналізувати, робити власні висновки, наводити контрприклади тощо;

2) після війни буде відбудова економіки, що передбачає ґрунтовні знання з математики молодого покоління;

3) математичний апарат є необхідним для вивчення предметів інших освітніх галузей. Без наявності певного рівня математичної компетентності учнів ускладнюється їх вивчення в подальшому;

4) на вивчення математики припадає 3–9 годин на тиждень. Тобто до війни учні найчастіше зустрічалися з учителем математики, який знав їх досить добре (іноді на рівні з класним керівником) і тому міг надати суттєву психологічну підтримку.

Тривалі перерви у вивченні математики призводять до втрати певних навичок. Тому найбільш продуктивним є систематичне навчання математики.

Дистанційне та змішане навчання буде все більш затребуваним. Тому й надалі доцільно розробляти і впроваджувати ефективні методики й технології організації цього навчання для подолання втрат у математичній освіті. Водночас навчання математики має бути цікавим, продуктивним і посильним для учнів.

Література до розділу 1

Література до розділу 1

1. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка. 5 клас : зошит-конспект. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 112 с.

2. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка. 6 клас : зошит-конспект. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 96 с.

3. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка. 7 клас : зошит-конспект. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 80 с.

4. Бурда М. І. Застосування допоміжних елементів у розв'язуванні задач підручника з геометрії. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. 2019. Вип. 22. С. 30–37.
URL: https://doi.org/10.32405/2411-1309-2019-22-30-37

5. Бурда М. І. Інтегрований підхід до відбору змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. Київ: Педагогічна думка, 2020. Вип. 25. С. 5–13.
URL: https://doi.org/10.32405/2411-1309-2020-25-5-13

6. Бурда М. І. Компетентнісний потенціал змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. Київ, Педагогічна думка, 2023. Вип. 31. С. 18–25.
URL: https://ipvid.org.ua/index.php/psp/article/view/686/737

7. Бурда М. І. Особливості застосування геометричних фігур на практиці. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. Київ, Педагогічна думка, 2022. Вип. 28. С. 18–25.
URL: https://doi.org/10.32405/2411-1309-2022-28-18-25.

8. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Відеолекції у навчанні математики учнів 5 –6 класів. *Інформаційні технології і засоби навчання.* 2021. № 5 (85). С. 14–28.
URL: https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/4609/1893

9. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики в умовах воєнного стану: методичні рекомендації. *Математика в рідній школі*. 2022. № 4. С. 6–15.
URL: http://lib.iitta.gov.ua/731956/

10. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Математика. 5–6 класи: модельна навчальна програма.
URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2021/14.07/Model.navch.prohr.5-9.klas.NUSH-poetap.z.2022/Matem.osv.galuz-5-6-kl/Matem.5-6-kl.Burda.Vasileva.14.07.pdf

11. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості дистанційного навчання математики. *Дистанційне навчання в умовах карантину: досвід та перспективи.* Аналітико-методичні матеріали / кол. автор.; за загальною редакцією О. М. Топузова. Київ, Педагогічна думка, 2021. С. 109–131.
URL: https://lib.iitta.gov.ua/726079/

12. Бурда М. І., Васильєва Д. В., Тарасенкова Н. А. Навчання математики у 2023–2024 навчальному році. Загальна середня освіта України в умовах воєнного стану та відбудови: реалії, досвід, перспективи / методичний порадник науковців Інституту педагогіки НАПН України до початку нового 2023–2024 навчального року : методичні рекомендації / за заг. ред. Олега Топузова, Тетяни Засєкіної: Інститут педагогіки НАПН України. Київ, Педагогічна думка, 2023. С. 91–112.

13. Бурда М. І., Вашуленко О. П. Реалізація реформи Нової української школи у навчанні математики. *Математика в рідній школі*. 2022. № 2–3. С. 2–4.

14. Бурда М.І., Тарасенкова Н. А. Теоретико-методичні вимоги до змісту шкільних підручників з математики. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. Київ, Педагогічна думка, 2016. Вип. 16. С. 43–51.

URL: https://ipvid.org.ua/index.php/psp/article/view/342/349

15. Бурда М. І., Тарасенкова, Н. А., Васильєва, Д. В., Вашуленко, О. П. Концепція математичної освіти 12-річної школи. *Математика в рідній школі*. 2018. № 7–8. С. 2–8.

16. Державний стандарт базової середньої освіти (2020).

URL: https://imzo.gov.ua/derzhavni-standarty-bazovoi-seredn-oi-osvity/

17. Закон України «Про повну загальну середню освіту».

URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text

18. Концепція національно-патріотичного виховання в системі освіти України.

URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0527729-22#n12

19. Концепція нової української школи (2016).

URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf

20. Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року.

URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/988-2016-%D1%80#Text

21. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти).

URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text

22. Ляшенко О. І., Топузов О. М. Науковий супровід модернізації змісту базової середньої освіти: проблеми і виклики. *Український педагогічний журнал*. 2021. № 4. С. 29–36.

URL: https://uej.undip.org.ua/index.php/journal/article/view/247/194

23. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7—9 класи» для закладів загальної середньої освіти.

URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf

24. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти.

URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf

25. Осинська В. М. Активізація пізнавальної діяльності учнів на уроках математики в 9–10 класах : *метод. Посібник*. Київ, Рад. школа, 1980. 143 с.

26. Скворцова С. О., Тарасенкова Н. А. Модельна навчальна програма «Математика. 5—6 класи» для закладів загальної середньої освіти.

URL: https://drive.google.com/file/d/1ykOgcS2OiQbBxXAfxFoW-Sxyku-wZMIFm/view

27. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи навчання математиці : метод. Посібник. Київ, Рад. школа, 1983. 192 с.

Розділ 2. Вимоги до результатів навчання математики в гімназії

2.1. Компетентнісний потенціал шкільної математики

(*О. Вашуленко*)

Інструментом реалізації базових цінностей у сучасному шкільному просторі стають ключові компетентності, які поєднують навчальний, виховний і розвивальний потенціали та визначають нову філософію освіти, що ґрунтується на ідеях якості, результативності й особистісній зорієнтованості змісту і результатів, а також технологічно забезпечує реформування загальної середньої освіти.

«Компетентність» (з лат. *competentia* — відповідність, узгодженість) — коло питань, у яких людина добре обізнана. Компетентна у певній сфері людина має відповідні знання та досвід, може обґрунтовано судити про цю сферу й ефективно діяти в ній. Еволюція поняття «компетентність» містить велику кількість його тлумачень. А саме: «якість особистості або сукупність якостей, мінімальний досвід діяльності в заданій сфері»; «вміння мобілізувати в конкретній ситуації отримані знання та досвід з урахуванням зовнішніх обставин; певна загальна здатність людини, що базується на її знаннях, досвіді, цінностях і здібностях та яка не зводиться ні до конкретних знань, ні до навичок, а проявляється як можливість встановлення зв'язку між знанням та ситуацією»; «рівень готовності застосування знань, умінь, навичок у різних ситуаціях»; «спроможність кваліфіковано здійснювати діяльність, виконувати завдання або роботу; набір знань, навичок і ставлень, що дають змогу особистості ефективно діяти або виконувати певні функції, спрямовані на досягнення визначених стандартів у професійній галузі або якійсь діяльності» (Дж. Спектор); «поєднання відповідних знань і здібностей, що дають підставу обґрунтовано судити й ефективно діяти у певній сфері життя; володіння людиною відповідною компетенцією, що включає її особисте ставлення до неї та предмета діяльності» (А. В. Хуторський). Отже, компетентність є надбанням особистості й визначає якісний рівень знань, умінь, навичок і здатність застосувати їх на засадах власного досвіду у процесі діяльності.

Компетентності, на думку вчених, є індикаторами визначення готовності індивіда до конкретної діяльності, особистого розвитку та продуктивної участі в житті суспільства. За їх набуття людина може орієнтуватися в умовах сучасного суспільства, інформаційному просторі, подальшому здобутті освіти та ринку праці. Дослідники неоднозначно окреслюють поняття «компетентність»: одні ототожнюють її з сукупністю знань, умінь і навичок особистості, готовністю до діяльності, інші вважають, що ця категорія є особистісною характеристикою.

Компетентність — це поєднання вмінь, знань, навичок, способів мислення, ціннісних орієнтирів та переконань, які дають змогу виходити із нестандартних життєвих ситуацій. Саме такий набір внутрішніх якостей сприяє досягненню успіху в навчанні та професійній діяльності. Компетентність стала новим мірилом людської освіченості, коли перше місце надається не кінцевому результату та обсягу вивченого матеріалу, а процесу навчання, втіленому в здатності діяти в різних умовах і обставинах. Компетентною вважається людина, яка має достатні знання в якій-небудь галузі, добре обізнана з чим-небудь, керується знаннями, кваліфікована, має певні повноваження [5].

Після тривалих дискусій поняття «компетентність» отримало чітке визначення в Законі України «Про освіту»: «Компетентність — це динамічна комбінація знань, умінь, навичок, способів мислення, поглядів, цінностей, інших особистих якостей, що визначає здатність особи успішно соціалізуватися, провадити професійну та/або подальшу навчальну діяльність» [2].

Функції компетентності в структурі особистості вдало визначив М. С. Головань [1]. Автор вважає, що компетентність сприяє розвитку і набуттю зрілої форми думок, мотивів, цінностей, самоствердженню особистості у власній діяльності, реалізації творчого потенціалу. Це свідчить про *мотиваційну* функцію компетентності.

Прогностична функція компетентності виявляється в активному засвоєнні особою накопичених людством знань, розширенні кругозору, ерудиції особистості.

Компетентність активізує пізнавальну діяльність. Трансформація отриманих знань людини в уміння й навички визначає *діяльнісну* функцію компетентності в структурі особистості.

Компетентність виявляється також у здатності людини до вольових дій, мобілізації своїх сил у подоланні труднощів у процесі діяльності, наполегливості, витривалості, стриманості, що свідчить про *емоційно-вольову* функцію компетентності в структурі особистості.

Зазначені вище функції забезпечують самореалізацію особистості, підтримують емоційний фон, цілеспрямованість, розвивають уміння розв'язувати проблемні ситуації.

Сучасна освітня система потребує нагальної модернізації парадигми навчання з орієнтацією на нові світові стандарти й вимоги до українського освітнього простору. У компетентнісній парадигмі ключовим є вміння вирішувати конкретні проблеми, а не інформованість учня. Предметне знання наразі перестає бути самоціллю й виконує підпорядковану, орієнтувальну роль.

Будь-яке поняття набуває визначеності тільки в системі понять. Понятійна система компетентнісного потенціалу складається з таких основних понять, як «компетентність», «компетентнісний підхід», «предметна компетентність», «ключова компетентність», «компетентнісний потенціал», «наскрізні змістові лінії», «освітній процес».

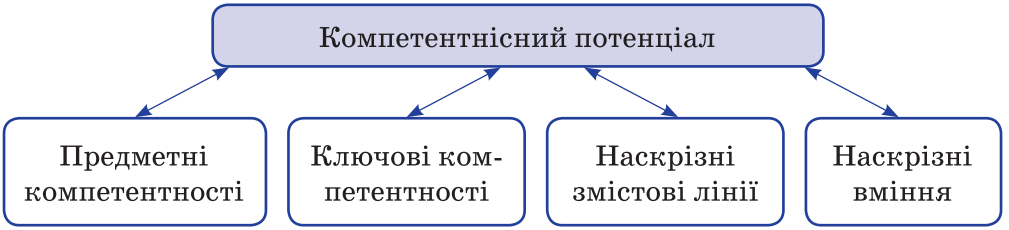
Ціннісно-рефлексивну функцію компетентності характеризують оцінне ставлення й усвідомлення людиною свого знання, поведінки, морального кодексу, інтересів, ідеалів і мотивів, цілісне оцінювання самого себе як особистості.

Комунікабельність, відкритість до спілкування і збагачення в процесі міжособистісної взаємодії є результатом прояву *комунікативної функції компетентності.*

Системотвірною є *діяльнісна функція*, оскільки компетентність виявляється в умінні вирішувати проблеми (проблемні завдання в певній предметній галузі), проєктувати свою власну діяльність, що вирізняється якістю і результативністю. Ступінь сформованості компетентності внутрішньо зумовлений її структурою.

Оскільки компетентність є основою діяльності, структуру поняття компетентності можна зіставити зі структурою діяльності, до складу якої входять компоненти: усвідомлення потреби, формування мотиву, вибір способу діяльності, планування діяльності, перелік дій, виконання дій. Усвідомлення потреби й формування мотиву вимагає від людини певної ерудиції для усвідомленого вибору того, що може задовольнити потребу.

Під час вибору способу розв'язання проблемної ситуації суб'єкт діяльності спирається на свої ціннісні установки, соціальні уявлення про можливість чи неможливість вчиняти ті чи інші дії. Свою діяльність людина планує відповідно до закономірностей і процесів, за якими вибирає спосіб власних дій. Усвідомлений вибір операцій для правильного виконання дії та досягнення мети здійснюється на основі сукупності знань. Виконання суб'єктом певних операцій передбачає наявність у нього вмінь і навичок, а також вольових і емоційних зусиль. Тому до внутрішньої структури компетентності належать знання, пізнавальні та практичні вміння й навички, мотивація, ставлення, цінності, етичні норми, емоції та вольові зусилля. Отже, внутрішню структуру компетентності можна подати у вигляді сукупності компонентів: мотиваційного, когнітивного, діяльнісного, ціннісно-рефлексивного, емоційно-вольового. Виділені компоненти існують не ізольовано один від одного, вони тісно взаємопов'язані між собою. Такий погляд на суть компетентності переважає в роботах українських дослідників. Освітній процес має бути системою науково-методичних і педагогічних заходів, спрямованих на розвиток особистості на засадах формування та застосування її компетентностей. Компетентнісний потенціал — це сукупність можливостей освітнього процесу для формування компетентностей особистості. Тому компетентнісний потенціал містить кілька структурних компонентів (мал. 2.1.1).



Мал. 2.1.1. Структура компетентнісного потенціалу

У чинному Державному стандарті базової середньої освіти структуровані й визначені ключові компетентності та спільні для всіх компетентностей уміння, якими мають оволодіти учні. До ключових компетентностей належать: вільне володіння державною мовою; здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами; математична компетентність; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій; інноваційність; екологічна компетентність; інформаційно-комунікаційна компетентність; навчання впродовж життя; громадянські та соціальні компетентності; культурна компетентність; підприємливість і фінансова грамотність. Основою формування ключових компетентностей є: особистісні якості, особистий, соціальний, культурний і навчальний досвід учнів; їх потреби та інтереси, які мотивують до навчання; знання, уміння та ставлення, що формуються в освітньому, соціокультурному та інформаційному середовищі, у різних життєвих ситуаціях.

Наскрізними у всіх ключових компетентностях є такі вміння:

— читання з розумінням, що передбачає здатність сприймати, розуміти інформацію, записану (передану) різним способом або відтворену технічними пристроями. Це охоплює вміння виявляти припущення та інформацію, надану в тексті в неявному вигляді, доводити надійність аргументів, підкріплюючи власні висновки фактами з тексту та наявними доказами, висловлювати ідеї, пов'язані з новим розумінням тексту після його аналізу та добору контраргументів;

— висловлення власної думки усно й письмово, тобто вміння словесно передавати власні думки, почуття, переконання, зважаючи на мету й учасників комунікації та вибираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії;

— критичне та системне мислення, що виявляється у визначенні характерних ознак явищ, подій, ідей, умінні аналізувати й оцінювати доказовість і вагу аргументів у судженнях, враховувати протилежні думки і контраргументи, розрізняти факти та їхні інтерпретації, розпізнавати спроби маніпулювання даними, використовуючи різноманітні ресурси й способи оцінювання надійності кількісних і якісних доказів та достовірності інформаційних джерел;

— творчість, що передбачає креативне мислення, продукування нових ідей, використання думок інших та їх доопрацювання, застосування знань із різних предметів і галузей для створення нових об'єктів, уміння випробовувати нові знання з обґрунтованим ризиком;

— ініціативність, яка передбачає активний пошук і пропонування рішень для розвитку та перевірки ідей і розв'язання проблем (створення цінностей);

— логічне обґрунтовування позиції, що передбачає вміння висловлювати послідовні, несуперечливі, обґрунтовані міркування у вигляді висновків / суджень, що є виявом власного ставлення до подій, явищ і процесів;

— конструктивне керування емоціями, що передбачає здатність розпізнавати власні почування та емоційний стан інших, розуміти, як вони можуть допомагати і заважати в діяльності, та вживати заходів, які відповідають емоційному стану, на основі усвідомлення того, що особа може керувати емоціями, знає способи налаштування себе на продуктивну діяльність;

— оцінювання ризиків, що передбачає вміння розрізняти прийнятні й неприйнятні ризики, зважаючи на велику кількість факторів;

— ухвалення рішень, що передбачає здатність оцінювати способи розв'язання проблем, враховуючи їхні етичні, правові, екологічні та суспільні наслідки;

— розв'язування проблем, що передбачає вміння формулювати проблеми і представляти їх різними способами, вибирати й отримувати дані для розв'язання проблем з надійних джерел, застосовуючи різні прийоми і стратегії;

— співпраця з іншими, що передбачає вміння обґрунтовувати користь взаємодії під час спільної діяльності, планувати свою і групову роботу, підтримувати учасників групи, допомагати та заохочувати інших до досягнення спільної мети [3].

Для кожної освітньої галузі в Державному стандарті базової середньої освіти визначено мету, єдину для всіх рівнів загальної середньої освіти, компетентнісний потенціал, що відображає здатність кожної освітньої галузі формувати всі ключові компетентності через розвиток умінь і ставлень. Зокрема, метою математичної освітньої галузі є формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, вдосконалення умінь і способів дій для розв'язування суто математичних та практичних задач; розвиток логічного мислення і психологічних якостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті. Вимоги до обов'язкових результатів навчання з математичної освітньої галузі передбачають, що учні: виокремлюють проблеми й досліджують ситуації, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів; моделюють процеси і ситуації, розробляють стратегії, плани дій для розв'язання проблемних ситуацій; критично оцінюють процес і результат розв'язання проблемних ситуацій; розвивають математичне мислення для пізнання та перетворення дійсності, володіють математичною мовою [3]. Отже, під результатами навчання математики учнів гімназії слід розуміти засвоєння знань відповідно до програми з математики з одного боку, і формування ключових компетентностей засобами вивчення математики — з іншого.

У сучасному розумінні освітній процес охоплює навчання, виховання й розвиток. Виховний процес є невід'ємною складовою частиною всього освітнього процесу й орієнтується на загальнолюдські цінності, зокрема морально-етичні (гідність, чесність, справедливість, турбота, повага до життя, повага до себе й інших людей), соціально-політичні (свобода, демократія, культурне різноманіття, повага до рідної мови й культури, патріотизм, шанобливе ставлення до довкілля, повага до закону, солідарність, відповідальність). Тому ознаками сформованості ключових компетентностей є уміння і ціннісн ставлення людини (табл. 2.1.1).

Таблиця 2.1.1. **Компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі**

Ключові компетентності	*Уміння*	*Ставлення*
Вільне володіння державною мовою	Чітко і зрозуміло формулювати думку, аргументувати, ставити запитання й розпізнавати проблему; формулювати висновки на основі інформації, поданої в різних формах; доречно та коректно вживати в мовленні математичну термінологію, вести критичний і конструктивний діалог; поповнювати свій словниковий запас	Визнання важливості чітких та лаконічних формулювань та повага до державної мови
Здатність спілкуватися рідною (у разі відмінності від державної) та іноземними мовами	Розуміти й перетворювати тексти математичного змісту рідною мовою; зіставляти математичні терміни і поняття рідною та державною мовами; правильно і доречно вживати математичну термінологію усно й письмово, грамотно висловлюватися; поповнювати словниковий запас математичними термінами іншомовного походження; зіставляти математичний термін чи його буквене позначення із аналогами з іноземної мови для пошуку інформації в іншомовних джерелах	Розуміння цінності мовного різноманіття та повага до рідної мови; усвідомлення важливості правильного використання математичних термінів та їх позначення в різних мовах у навчанні й повсякденному житті

Ключові компетентності	*Уміння*	*Ставлення*
Математична компетентність	Оперувати текстовою й числовою інформацією, геометричними об'єктами на площині та в просторі; встановлювати кількісні й просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності (природними, культурними, технічними тощо); вибирати, будувати й досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати; робити прогнози в контексті навчальних та практичних задач; доводити правильність тверджень; застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних з реальними об'єктами; використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях	Пошанування істини; готовність шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів; усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки, техніки й технологій
Компетентності в галузі природничих наук, техніки й технологій	Будувати й досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів; робити висновки на основі міркувань та свідчень; обґрунтовувати рішення	Критичне ставлення до досягнень науково-технічного прогресу; усвідомлення важливості математики для опису та пізнання навколишнього світу
Інноваційність	Генерувати нові ідеї щодо розв'язання проблемної ситуації, аналізувати та планувати їх втілення	Відкритість до інновацій, позитивне оцінювання та підтримка конструктивних ідей інших
Екологічна компетентність	Розпізнавати проблеми, що виникають у довкіллі, які можна розв'язати, використовуючи засоби математики; оцінювати, прогнозувати вплив людської діяльності на довкілля через побудову та дослідження математичних моделей природничих процесів і явищ	Зацікавленість у дотриманні умов екологічної безпеки та сталого розвитку; визнання ролі математики в розв'язанні проблем довкілля
Інформаційно-комунікаційна компетентність	Структурувати дані; діяти за алгоритмом і складати алгоритми; визначати достатність даних для розв'язання задачі; використовувати різні знакові системи; оцінювати достовірність інформації; доводити істинність тверджень	Критичне осмислення інформації та джерел її отримання; усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач

Ключові компетентності	*Уміння*	*Ставлення*
Навчання впродовж життя	Організовувати та планувати свою навчальну діяльність; моделювати власну освітню траєкторію, аналізувати, контролювати, коригувати й оцінювати результати навчальної діяльності; доводити правильність чи помилковість суджень	Усвідомлення власних освітніх потреб та цінності нових знань і вмінь; зацікавленість у пізнанні світу та розуміння важливості навчання впродовж життя; прагнення вдосконалювати результати людської діяльності
Громадянські та соціальні компетентності, пов’язані з ідеями демократії, справедливості, рівності, прав людини, добробуту та здорового способу життя, з усвідомленням рівних прав і можливостей усіх людей	Висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів; аналізувати і критично оцінювати соціально-економічні події в державі на основі статистичних даних; розпізнавати інформаційні маніпуляції; вносити свою частку в роботу групи для розв’язання проблеми; аргументувати та відстоювати власну позицію; ухвалювати аргументовані рішення на основі аналізу всіх даних та виявлення причинно-наслідкових зв’язків проблемної ситуації; орієнтуватися в широкому колі послуг і товарів на основі чітких критеріїв, робити споживчий вибір, використовуючи, зокрема, математичні вміння	Налаштованість на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновків; ощадливість і поміркованість; рівне ставлення до інших осіб та відповідальність за спільну справу
Культурна компетентність	Бачити математику у творах мистецтва; зображати фігури, графіки, рисунки, схеми, діаграми, унаочнювати математичні моделі; здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, створення об’ємно-просторових композицій	Усвідомлення взаємозв’язку математики і культури на прикладах з живопису, музики, архітектури тощо; розуміння важливості внеску математиків у загальносвітову культуру

Ключові компетентності	*Уміння*	*Ставлення*
Підприємливість і фінансова грамотність	Генерувати нові ідеї, аналізувати, ухвалювати оптимальні рішення, розв'язувати життєві проблеми; аргументувати й захищати свою позицію, вести дискусію; використовувати різні стратегії, шукати оптимальні способи розв'язання проблемних ситуацій; будувати та досліджувати математичні моделі економічних процесів; планувати та організовувати діяльність для досягнення цілей; аналізувати власну економічну ситуацію, родинний бюджет, користуючись математичними методами	Відповідальність та ініціативність, впевненість у собі; відповідальність за власні рішення; розуміння важливості математичних розрахунків та оцінювання ризиків

Так, вільне володіння державною мовою формується на уроках математики шляхом навчання учнів чітко і зрозуміло формулювати власну думку, ставити запитання, робити висновки, а також поповнення словникового запасу. Результатом навчання школярів має бути усвідомлення важливості чітких, лаконічних формулювань і повага до державної мови.

Здатність спілкуватися рідною (у разі її відмінності від державної) та іноземними мовами означає розуміння текстів математичного змісту рідною мовою, правильне та доречне вживання термінології, поповнення словникового запасу математичними термінами іншомовного походження, уміння шукати інформацію в іншомовних джерелах. Школярі мають усвідомити важливість правильного використання математичних термінів та їх позначення в різних мовах.

Формувати в учнів математичну компетентність означає навчати їх оперувати геометричними об'єктами на площині та в просторі, встановлювати кількісні і просторові відношення між реальними об'єктами навколишньої дійсності, будувати і досліджувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, інтерпретувати та оцінювати результати розв'язування математичних задач, робити прогнози в контексті навчальних та практичних задач, доводити правильність тверджень, застосовувати логічні способи мислення під час розв'язування пізнавальних і практичних задач, пов'язаних із реальними об'єктами, використовувати математичні методи в життєвих ситуаціях. Важливо виховувати у школярів пошанування істини, готовність шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів, усвідомлення важливості математики як мови науки, техніки й технологій.

У контексті формування в учнів гімназії компетентності в галузі природничих наук, техніки і технологій на уроках математики важливо вчити їх будувати та досліджувати математичні моделі природних явищ і процесів, робити висновки, інтерпретувати результати розв'язування задач. Необхідно виховувати критичне ставлення до досягнень науково-технічного прогресу, усвідомлення важливості математики для опису та пізнання навколишнього світу.

Формувати інформаційно-комунікаційну компетентність засобами математики означає вчити структурувати дані, діяти за алгоритмом та складати алгоритми, визначати достатність даних для розв'язування задачі, оцінювати достовірність інформації. Потрібно формувати критичне осмислення інформації та джерел її отримання, усвідомлення важливості інформаційно-комунікаційних технологій для ефективного розв'язування задач, уміння володіти методологією використання професійних пакетів динамічної геометрії для дослідження математичних задач, розуміти переваги та обмеженість пакетів для комп'ютерного моделювання у вивченні математики, а також оцінювати на практиці їх ефективність.

Потрібно навчити школярів організовувати і планувати свою навчальну діяльність, аналізувати, контролювати, коригувати й оцінювати результати навчання. Учні мають усвідомлювати власні освітні потреби та цінність нових знань і вмінь, розуміти важливість навчання впродовж життя.

Формування громадянських та соціальних компетентностей передбачає вироблення навичок висловлювати власну думку, слухати і чути інших, оцінювати аргументи та змінювати думку на основі доказів, розпізнавати інформаційні маніпуляції, аргументувати й відстоювати власну позицію тощо. Важливо навчити учнів розпізнавати проблеми довкілля, які можна розв'язати засобами математики, оцінювати і прогнозувати вплив людської діяльності на довкілля через побудову та дослідження математичних моделей природничих процесів і явищ.

Підприємливість та фінансова грамотність формується через вироблення в учнів умінь генерувати нові ідеї, аналізувати, шукати оптимальні шляхи і застосовувати різні стратегії до розв'язування задач, а також аргументувати й захищати свою позицію, вести дискусію, будувати та досліджувати математичні моделі економічних процесів. Інноваційність особистості характеризується вміннями генерувати нові ідеї щодо розв'язання задач і втілювати їх, позитивно оцінювати й підтримувати конструктивні думки інших.

Особлива роль математики у формуванні культурної компетентності гімназистів. Необхідно вчити їх бачити математику у творах мистецтва, зображати фігури в різні способи, унаочнювати геометричні моделі, здійснювати необхідні розрахунки для встановлення пропорцій, відтворення перспектив, складання об'ємно-просторових композицій. Учні мають усвідомити взаємозв'язок математики і культури на прикладах живопису, архітектури, розуміти важливість внеску відомих математиків у загальносвітову культуру.

Математична компетентність на сьогодні є в переліку як ключових так і предметних компетентностей. Математична компетентність — це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і методи математичного моделювання, уміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. Математична компетентність визначається рівнями навчальних досягнень, для яких суттєвим є набуття математичних умінь. До них належать: математичне мислення, аргументування, математичне моделювання; поставлення та розв'язування математичних задач, презентація даних; оперування математичними конструкціями; математичне спілкування; використання математичних інструментів.

Предметна компетентність учня з математики є ознакою високої якості його навчальних умінь, можливості встановлювати зв'язки між набутими математичними знаннями та реальною ситуацією, здатності знаходити метод розв'язання відповідно до проблеми та успішно використовувати свої вміння, сформовані протягом вивчення математики. Предметні компетентності формуються в процесі засвоєння математичного змісту. Вони є соціально значущим результатом навчання, репрезентованим у Державному стандарті базової та повної загальної середньої освіти [4], закріпленим у навчальних програмах.

Математична компетентність містить п'ять структурних компонентів: 1) мотиваційний — система мотивів, цілей, потреб і прагнень до вивчення математики; 2) когнітивний — сукупність теоретичних і практичних знань; 3) діяльнісний — комплекс математичних умінь, спроможність розв'язувати практичні завдання за допомогою математичного апарату; 4) ціннісно-рефлексивний — сукупність особистісно значущих прагнень, ідеалів, переконань, поглядів, ставлень у галузі математики, розуміння ролі математичної компетентності як соціальної цінності, прагнення до саморозвитку, самоаналіз і самооцінка власної математичної діяльності; 5) емоційно-вольовий — розуміння власного емоційного стану у процесі математичної діяльності, наполегливість і цілеспрямованість у розв'язуванні математичних задач, почуття власної гідності.

Виділяють функціональні складники математичної компетентності: *процедурну компетентність* — уміння розв'язувати типові математичні задачі; *логічну компетентність* — володіння дедуктивним методом доведення та спростування тверджень; *технологічну компетентність* — володіння сучасними інформаційно-комунікаційними технологіями підтримки математичної діяльності; *дослідницьку компетентність* — володіння методами дослідження соціально й індивідуально значущих завдань за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій і математичних методів; *методологічну компетентність* — уміння оцінювати доцільність використання математичних методів і засобів інформаційно-комунікаційних технологій для розв'язання індивідуально і суспільно значущих задач.

Традиційна освітня парадигма, зорієнтована на знаннєві результати навчання, поступається місцем новій, в основі якої — формування життєвої компетентності учня, що передбачає здатність використовувати набуті знання та вміння в житті, переносити їх у різні практичні ситуації, критично мислити, робити висновки. Математика залишається провідним навчальним предметом сучасної школи і набуває ролі інструмента формування в учнів усіх ключових компетентностей. За таких умов посилюється роль і значення методичного забезпечення компетентнісного навчання математики.

Запровадження компетентнісного підходу в навчанні забезпечує школярам реалізацію безлічі можливостей. Окрім підвищення зацікавленості в навчанні та усвідомлення його прикладного значення, компетентнісний підхід дає змогу учням:

— значно підвищити рівень продуктивності праці, розвивати творчі здібності й особистісні якості, формувати самостійність і відповідальність за свої вчинки;

— не лише засвоювати знання, а й здобувати позитивний досвід розв'язання різних життєвих проблем та виконання соціальної ролі;

— отримувати інформацію й використовувати її у різноманітних життєвих ситуаціях;

— замість накопичення знань, умінь і навичок, формувати здатність творчо використовувати власний досвід на практиці;

— навчатися впродовж життя, йти в ногу з темпами оновлення та накопичення інформації;

— відкривати в собі нові можливості.

Реалізуючи компетентнісний підхід, учитель перестає бути звичайним «ретранслятором» знань та навчального матеріалу, він перетворюється на фасилітатора освітньої діяльності з безліччю можливостей.

Водночас пасивне сприйняття й відтворення знань трансформується в дослідницьку та самоосвітню діяльність. Школярі починають розуміти, що успішність навчання залежить від них самих — сумлінності, прагнення до саморозвитку й позитивної мотивації.

Математична освітня галузь має великий потенціал для розвитку ключових компетентностей учнів. Потрібно лише спробувати побачити нові способи роботи, вийти за традиційні межі сприйняття предмета, частіше задіювати інтеграцію та інтерактивні технології. На уроках математики можна формувати не лише математичну, інформаційно-цифрову та підприємницьку компетентності. Більшість ключових компетентностей формується через інтерактивність і взаємодію з іншими галузями знань.

На сьогодні важливо підготувати дітей до життя, навчити їх критично мислити, аналізувати, опрацьовувати інформацію, яку вони отримують звідусіль, і вибирати з неї необхідне, встановлювати причинно-наслідкові зв'язки. Уже не працює парадигма освіти, у якій школа існувала для накопичення знань та інформації. Сучасне життя — це постійне навчання, і тому школа має допомагати дітям постійно опановувати нові знання, знаходити потрібну інформацію та застосовувати її в житті. Компетентнісне навчання спрямоване на опанування учнями умінь і навичок, які дадуть змогу їм бути успішними, конкурентними та цінними на ринку праці.

Саме готовність учителя до реалізації компетентнісного навчання — найголовніша запорука успіху його професійної діяльності. Для педагога важливо навчитися реалізувати його на практиці. Допоможуть у цьому навчальні матеріали, що містять проблемні ситуації, а також практико-орієнтовані завдання, спрямовані на аналіз та оцінювання інформації.

Пріоритет формування компетентностей в учнів не заперечує необхідності засвоєння ними знань. Це динамічне поєднання знань, умінь та цінностей, що дає результат лише в комплексі. Знання — не самоціль, а засіб формування компетентностей. Недостатньо засвоїти окремі знання й уміння, важливо навчитися їх застосовувати у типових і нестандартних, нових для дитини ситуаціях. Це дає змогу сформувати ціннісне ставлення до знань, навчитись адаптуватися та шукати шляхи розв'язання проблемних ситуацій.

Організація процесу навчання за компетентнісного підходу ґрунтується на проблемному та діяльнісному критеріях. За класичного навчання учитель повідомляє тему, пояснює, для чого її вивчають, розказує та ілюструє навчальний матеріал. На підготовку уроку із застосуванням компетентнісного підходу необхідно більше часу за умови, коли вчитель не має достатньої кількості матеріалів та напрацьованих завдань. Педагогу також потрібен час для проблемної подачі матеріалу та формулювання питань для діалогового навчання. Коли вчитель застосовуватиме компетентнісне навчання постійно, підготовчий етап не потребуватиме багато часу, а учні набуватимуть мотивації до пізнавальної діяльності та вмінь самостійної роботи. У такій ситуації педагогу достатньо вміло керувати процесом навчання, контролювати і вчасно корегувати його результати.

Однією з умов реалізації компетентнісного навчання є вміння вчителя вести проблемний діалог, організовувати взаємодію учнів та здійснювати формувальне оцінювання. Безумовно, значно збагачують арсенал учителя електронні ресурси, матеріали для проведення дослідів, колекції наочності, моделі тощо. Підручник також відіграє важливу роль у навчанні. Особливо, якщо він побудований з використанням проблемного підходу, містить компетентнісні завдання, передбачає завдання для само- та взаємооцінювання. Під час вибору нових підручників варто врахувати ці аспекти й узяти той, що дасть змогу реалізувати компетентнісний підхід. Однак підручник не є основним засобом компетентнісного навчання. Учитель може самостійно добирати електронні ресурси, дидактичні матеріали, що слугуватимуть доповненням до підручника, якщо він не повністю відповідає вимогам компетентнісного підходу.

Об'єктом компетентнісного навчання є також суб'єктність учня, його відповідальне ставлення до навчання, зокрема самостійного. Конкретними проявами цього можуть бути: уміння ставити навчальні цілі; формулювати алгоритм виконання завдання; організовувати власну діяльність; планувати час; звертатися по допомогу в разі потреби, надавати допомогу та співпрацювати у групі; здійснювати само- та взаємооцінювання.

Нова українська школа розвивається на засадах компетентнісного, особистісно орієнтованого й діяльнісного підходів. На сьогодні зрозуміло, що метою навчання учнів, зокрема математики, не може бути лише засвоєння ними певної суми попередньо накопичених людством знань і навичок. Надважливим є розвиток особистісних якостей. Традиційно вважалося, що цей процес пропорційно залежить від кількості засвоєних математичних фактів, доведених теорем і розв'язаних задач. Однак практика й життєвий досвід свідчать про те, що в сучасній діяльності людини математичні теореми і формули використовуються не часто, а за потреби їх легко знайти на просторах інтернету. Тому знання, які так важко здобувалися, швидко втрачаються. Залишаються набуті психічні й розумові якості, уміння орієнтуватися в інформаційному просторі, відшукувати потрібну інформацію, оцінювати її якість. Для створення й добору засобів організації навчального процесу слід розуміти роль і місце математичної освітньої галузі в базовій середній школі. З одного боку — це формування в учнів ключових і суто предметних математичних компетентностей. З іншого — математична компетентність є однією з ключових і формується засобом усіх інших освітніх галузей. Тому інтегрований підхід до навчання, його творчий характер є важливими, зокрема в базовій середній школі.

Ключові компетентності формуються на основі особистісних якостей, здібностей, попереднього досвіду учнів; мотивації до навчання;

знань, умінь та ставлень, що створюються в різних особистісно значущих середовищах, а також завдяки власному досвіду. У діяльності сучасної людини важливою є поведінка в нестандартних ситуаціях, уміння знаходити креативні способи розв'язання проблем. Формуванню саме таких якостей особистості має сприяти компетентнісний підхід у навчанні математики в базовій середній школі. Тому організація навчальної діяльності учнів із математики має забезпечувати їх активність і самостійність у роботі. Відомо, що людина є активною, якщо її діяльність посильна за умови активізації пізнавальних сил і досвіду. Тобто знання і дії, які має засвоїти учень, повинні відповідати зоні його найближчого розвитку. Практика навчання свідчить про те, що учням необхідно відчувати потребу мобілізації своїх пізнавальних сил і досвіду для активного навчання й подолання труднощів і перешкод. Пізнавальна активність є підготовкою до ініціативності та самостійності учнів. Прагнення до самостійності належить до фундаментальних мотивів що спонукає людину до відкриття, випробування і вдосконалення себе. Важливо організовувати діяльність учнів, не віддаючи перевагу лише репродуктивним формам роботи, необхідно запроваджувати її творчий характер. Ознакою творчої особистості є її здатність до перетворення предметів, явищ і процесів дійсності (або їх образів). Важливими є засоби перетворення. Творчість характеризується оригінальністю, на відміну від копіювання дій за шаблонами та алгоритмами. У навчанні учнів математики творча діяльність забезпечується, зокрема, пошуком методів розв'язування задач (проблем), нестандартності їх застосування. Для забезпечення творчого характеру навчання математики необхідно наповнити відповідну систему вправ компетентнісно орієнтованими завданнями, що спонукають учнів до самостійної пошукової і творчої діяльності. Такі завдання є технологічним інструментом реалізації компетентнісного навчання математики шляхом створення ситуації успіху і мотивації до пошуку й осмислення інформації. Аналіз навчальної та методичної літератури, освітньої практики свідчить, що компетентнісно орієнтовані завдання в підручнику з математики для базової середньої школи виконують низку функцій. А саме: активізації пізнавальної діяльності учнів; організаційну (створення й реалізація плану дій щодо розв'язання проблемної ситуації); мотиваційну (зміст завдання є актуальним для школярів, що спонукає до пошуку способів розв'язання проблеми); створення психологічного комфорту і ситуації успіху в навчанні; світоглядну (формування цілісної картини світу, усвідомлення міжпредметних зв'язків); навчальну (вироблення предметних і міжпредметних умінь, навичок, способів дій); контрольно-оцінювальну (саме в процесі діяльності щодо розв'язування таких завдань є можливість ефективно визначити рівень сформованості в учнів предметних і ключових компетентностей).

Організація діяльності щодо розв'язування компетентнісно орієнтованих завдань із математики в базовій середній школі може проходити в три етапи. На першому — відбувається усвідомлення, постановка проблеми. Чітке формулювання задачі є важливим початком творчого процесу, параметром залучення до самостійної діяльності. Другий етап — розв'язання проблеми, що зумовлюється наявністю необхідних для цього знань. Виявлення учнем нестачі знань для розв'язання поставленої задачі є потужним мотивом їх самостійного здобуття. Роль учителя на цьому етапі — своєчасний і професійний супровід пошукових та дослідницьких дій учнів. Інколи проблема полягає не тільки у відсутності знань, а й у невмінні вибирати і застосовувати інформацію для розв'язання проблемної ситуації. Цей процес забезпечується основними прийомами математичної діяльності — аналізом і синтезом даних й умови задачі та наявних та необхідних знань для її вирішення. Третій етап творчої діяльності полягає в оформлені розв'язання проблемної ситуації. У науці — це доведення і практична перевірка гіпотези, у техніці — конструктивне й матеріальне втілення. У навчанні математики — розв'язання задачі та інтерпретація результату.

Серед компетентнісно орієнтованих завдань у підручнику з математики для базової середньої школи — вправи з неповною, надлишковою, ймовірнісною та суперечливою інформацією, а також із несформульованою умовою або вимогою, вправи на складання задач тощо.

2.2. Результати навчання математики та їх оцінювання

(*О. Вашуленко*)

У межах реформування вітчизняної загальної середньої освіти під назвою Нова українська школа було розроблено й затверджено Державний стандарт базової середньої освіти. Наступним кроком із метою реалізації Державного стандарту розроблено й затверджено Типову освітню програму для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти, що окреслює обов'язкові та рекомендовані підходи до розроблення й використання закладами загальної середньої освіти освітніх програм на кожному циклі (адаптаційний цикл (5–6 кл.) і цикл базового предметного навчання (7–9 кл.) базової середньої освіти).

У Державному стандарті базової середньої освіти представлено вимоги до результатів навчання учнів за освітніми галузями, зокрема з математики.

Вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів складаються з таких компонентів:

- загальні спільні для всіх рівнів загальної середньої освіти результати навчання учнів, через які реалізується компетентнісний потенціал галузі;

- конкретні результати навчання учнів, що визначають їх навчальний прогрес за освітніми циклами;
- орієнтири для оцінювання, на основі яких визначається рівень досягнення результатів навчання на завершення відповідного циклу.

Типова освітня програма містить:
— варіанти типових навчальних планів;
— перелік модельних навчальних програм;
— рекомендовані форми організації освітнього процесу;
— опис інструментарію оцінювання.

Розподіл навчального навантаження здійснено за освітніми галузями та роками навчання. Таким чином, для математичної галузі маємо ось такий розподіл навчального часу відповідно до використання мов навчання (мал. 2.2.1, с. 81).

Типові навчальні плани не містять:

— орієнтовні переліки предметів та інтегрованих курсів для реалізації кожної освітньої галузі, а також міжгалузевих інтегрованих курсів;

— рекомендований розподіл навчального навантаження за роками навчання між предметами (інтегрованими курсами), обов'язковими для вивчення (мал. 2.2.2);

<table>
<tr><th rowspan="2">Освітня галузь</th><th rowspan="2">Орієнтовний перелік предметів і галузевих інтегрованих курсів</th><th colspan="5">Рекомендована кількість годин на тиждень у класах</th></tr>
<tr><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Математична</td><td>Математика</td><td>5</td><td>5</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Алгебра</td><td>–</td><td>–</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Геометрія</td><td>–</td><td>–</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Інтегрований курс*
Математика. 7–9 клас.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Довідкова
кількість навчальних годин освітньої галузі «Математична»:
рекомендована
мінімальна
максимальна</td><td>5
4
6</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Резерв навчальних годин освітньої галузі «Математична»</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">*Кількість годин на вивчення інтегрованих курсів визначає заклад освіти з урахуванням навчального навантаження, встановленого на відповідні предмети</td></tr>
</table>

Мал. 2.2.2. Рекомендований розподіл навчального навантаження за роками навчання для математичної освітньої галузі [3]

Назва освітньої галузі	Кількість годин на тиждень та рік															
	Навчальне навантаження	5 клас			6 клас			7 клас			8 клас			9 клас		
		рекомендо-ване	мінімальне	максимальне	рекомендо-ване	мінімальне	максимальне	рекомендо-ване	мінімальне	максимальне	рекомендо-ване	мінімальне	максимальне	рекомендо-ване	мінімальне	максимальне
Загальний обсяг навчального навантаження для закладів із навчанням українською мовою																
Математична	на тиждень	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6
	на рік	175	140	210	175	140	210	175	140	210	175	140	245	175	140	245
Загальний обсяг навчального навантаження для класів із навчанням мовою корінного народу або національної меншини поряд із державною мовою чи з навчанням українською мовою та вивченням мови корінного народу або національної меншини																
математична	на тиждень	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6	5	4	6
	на рік	175	140	210	175	140	210	175	140	210	175	140	210	175	140	210

Мал. 2.2.1. Розподіл навчального часу для математичної освітньої галузі [3]

— додаткові години для вивчення предметів освітніх галузей, курсів за вибором, проведення індивідуальних консультацій і групових занять.

Різниця між рекомендованою та мінімальною кількістю навчальних годин (резерв навчальних годин) у кожній освітній галузі може бути перерозподілена закладом освіти між компонентами цієї галузі або на інші освітні галузі, а також на вибіркові освітні компоненти (незалежно від галузі).

На основі Типової освітньої програми кожен заклад освіти розробляє власну програму. Вона може бути складена окремо для кожного рівня повної загальної середньої освіти або ж бути наскрізною, кількох рівнів освіти. Відповідне рішення ухвалює педагогічна рада закладу освіти.

Освітня програма закладу загальної середньої освіти має:

— відповідати структурі Типової освітньої програми та визначеним нею вимогам до осіб, які можуть розпочати навчання за цією програмою;

— визначати загальний обсяг навчального навантаження в розмірі не меншому ніж у Типовій освітній програмі, його розподіл між освітніми галузями за роками навчання;

— містити навчальний план відповідно до типового навчального плану Типової освітньої програми;

— уміщувати перелік модельних навчальних програм;

— включати опис форм організації освітнього процесу та інструментарію оцінювання;

— містити інші складники, що враховують специфіку й особливості освітньої діяльності закладу освіти.

У Законі України «Про повну загальну середню освіту» Модельна навчальна програма вказується як документ, що визначає орієнтовну послідовність досягнення очікуваних результатів навчання учнів, зміст предмета (інтегрованого курсу) та види навчальної діяльності учнів, рекомендований для використання в освітньому процесі в порядку, визначеному законодавством.

Типова освітня програма містить перелік модельних навчальних програм. Зокрема з математичної освітньої галузі визначено такі модельні навчальні програми (мал. 2.2.3 на с. 83).

Курс «Підприємництво і фінансова грамотність» передбачено в типовій освітній програмі як навчальний предмет соціальної та здоров'язбережувальної освітньої галузі у 8 і 9 класах базової школи по 0,5 і 1 год на тиждень відповідно. Резерв навчальних годин у цій та інших освітніх галузях дає змогу збільшити навчальний час на вивчення курсу.

№ з/п	Назва модельної навчальної програми	
49	Математика. 5–6 класи	
50	Алгебра. 7–9 класи	
51	Геометрія. 7–9 класи	
52	Математика. 7–9 класи (інтегрований курс)	
66	Підприємництво і фінансова грамотність. 8–9 класи	
81	Для всього рівня	STEM. 5–9 класи (міжгалузевий інтегрований курс)
	Для окремих циклів	STEM. 5–6 класи (міжгалузевий інтегрований курс) STEM. 7–9 класи (міжгалузевий інтегрований курс)

Мал. 2.2.3. Перелік модельних навчальних програм для математичної освітньої галузі [3]

Зміст і вимоги до результатів навчання в модельних навчальних програмах мають бути не меншими й не нижчими ніж зафіксовано у Державному стандарті базової середньої освіти.

Програма складається з трьох частин: вступна (пояснювальна записка — мета освітньої галузі та шляхи її реалізації); основна (очікувані результати і зміст); прикінцева (форми оцінювання, засоби навчання тощо).

Головна відмінність нових підходів до створення навчальних програм від попередніх у тому, що визначальними є очікувані результати навчання, а зміст є засобом їх досягнення.

У Державному стандарті базової середньої освіти окреслено ядро знань із кожної освітньої галузі, зокрема й математики. Процитуємо: «Методологія математики: математична термінологія і символіка; математичні твердження; аксіоми і теореми; методи доведення тверджень; індуктивні та дедуктивні міркування; формулювання, доведення та спростування гіпотез; метод математичного моделювання. Числа і вирази: числові множини; натуральні, цілі, раціональні та ірраціональні числа, дії із ними та їх порівняння; десяткові дроби; відношення і відносні величини, відсотки, пропорції; вирази та їх перетворення. Рівняння і нерівності: рівняння та системи рівнянь; нерівності та системи нерівностей. Функції: функціональні залежності; елементарні функції та їх властивості; числові послідовності; арифметична та геометрична прогресії. Геометрія і вимірювання геометричних величин: первинні геометричні об’єкти (фігури та відношення); аксіоми планіметрії; найпростіші геометричні фігури; трикутники, многокутники; основні геометричні форми: лінії, поверхні, тіла; коло і круг; многогранники і тіла обертання: призма, піраміда, циліндр, конус, куля; геометричні перетворення (рухи, перетворення подібності); рівність та подібність фігур; вимірювання відрізків та кутів; площа плоскої геометричної фігури; об'єм та площа поверхні тіла; вимірювання та обчислення площ і об'ємів фігур. Координати і вектори: система координат, прямокутна декартова система координат; лінії в прямокутній декартовій системі координат на площині; скалярні та векторні величини; координати вектора; відношення векторних величин; операції над векторами. Дані, статистика та ймовірність: дані, їх види, представлення та перетворення; статистичне дослідження та його основні етапи; числові характеристики вибірки; елементи комбінаторики; ймовірність випадкової події». Такий досить загальний перелік змістових одиниць дає змогу варіювати повноту і глибину його застосування щодо формування в учнів компетентностей. Крім цього, окреслення меж навчального змісту допомагає створити уніфіковані інструменти оцінювання результатів навчання. Необхідно вибирати навчальний матеріал з огляду на його ефективність для досягнення цілей навчання.

Очікувані результати в модельній навчальній програмі групуються за роками навчання відповідно до орієнтирів для оцінювання з Державного стандарту (мал. 2.2.4 на с. 85). Конкретні результати й орієнтири для оцінювання в Державному стандарті сформульовано на компетентнісних засадах, а очікувані результати навчання в модельній навчальній програмі конкретизовано відповідно до навчального змісту.

Очікувані результати навчання математики відображають динаміку їх досягнення, поступ у розвитку вміння чи ставлення учня; водночас враховується логіка й наступність навчального змісту.

Для розробки модельних навчальних програм із математики та їх добору до освітньої програми слід розуміти роль і місце математичної освітньої галузі. По-перше, це формування в учнів ключових і суто предметних математичних компетентностей. По-друге, математична компетентність є однією з ключових і формується засобом усіх інших освітніх галузей. Тому інтегрований підхід є важливим для досягнення результатів навчання учнів, зокрема в базовій середній школі.

На основі Державного стандарту базової середньої освіти і Типової освітньої програми для 5–9 класів освітяни і науковці розробили Модельні навчальні програми з математики для 5–6 класів. Міністерство освіти і науки України за результатами конкурсу визначило й наказом від 12 липня 2021 р. № 795 надало гриф «рекомендовано» семи модельним навчальним програмам для 5–6 класів. А саме:

- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори М. І. Бурда, Д. В. Васильєва);

Додаток 8
до державного стандарту

ВИМОГИ
до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі

Загальні результати	5–6 класи		7–9 класи	
	Конкретні результати	Орієнтири для оцінювання	Конкретні результати	Орієнтири для оцінювання
1. Дослідження ситуацій і виокремлення проблем, які можна розв'язати із застосуванням математичних методів				
Вирізняє серед ситуацій із повсякденного життя ті, що розв'язуються	Вирізняє серед проблемних ситуацій ті, що розв'язуються математичними методами	Вирізняє проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані відомими математичними методами	Вирізняє серед проблемних ситуацій ті, що розв'язуються математичними методами	Вирізняє проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст	Види навчальної діяльності
	Геометричні фігури	
Впізнає *Знає* *Описує* *Розрізняє* *Записує* *Групує* *Вимірює* *Будує* …	Відрізок, пряма, промінь. Кут та його градусна міра. Види кутів. Трикутник та його периметр. Види трикутників за кутами. Прямокутник. Квадрат. Площа й периметр прямокутника і квадрата. …	Бесіда, опитування, самостійна робота …

Мал. 2.2.4. Відповідність модельної навчальної програми для математичної освітньої галузі Державному стандарту базової середньої освіти

- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори М. С. Василишин, А. І. Миляник, М. В. Працьовитий, Ю. С. Простакова, О. В. Школьний);
- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, М. П. Пихтар, Б. В. Рубльов, В. В. Семенов, М. С. Якір);
- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автор О. С. Істер);
- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори М. В. Беденко, І. Я. Клочко, Т. Г. Кордш, В. О. Тадаєв);
- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори С.О. Скворцова, Н.А. Тарасенкова);
- Модельна навчальна програма «Математика. 5–6 класи» для закладів загальної середньої освіти (автори С. С. Радченко, К. С. Зайцева).

Усі програми відповідають чинному Державному стандарту базової середньої освіти, відображають авторське бачення вивчення математики у 5–6 класах і не суперечать нормам Стандарту щодо змісту й очікуваних результатів навчання.

Ефективність модельних навчальних програм визначається конкретизацією в них очікуваних результатів і видів навчальної діяльності.

Пропонуємо фрагменти кількох модельних навчальних програм, у яких найвдаліше представлено очікувані результати навчання (с. 88–89).

Будь-яку із затверджених програм можна використовувати в навчальному процесі. За цими програмами готуються підручники й навчальні матеріали. Серед них краще вибирати ті, що містять невелику за обсягом теоретичну частину й насичену, структуровану систему вправ.

Теоретична частина має містити чіткі формулювання фактів, підкріплені опорними знаннями, прикладами, запитаннями, виділені для акцентування. Учні мають чітко розуміти, що потрібно знати і вміти для їхньої активної математичної діяльності. Зайві авторські пояснення й розмірковування в підручнику, на мій погляд, обмежують як пояснення вчителя, так і міркування учня.

Система вправ має бути чітко структурована, наповнена завданнями для різних етапів навчального процесу й організації різних видів діяльності, зокрема заявлених у модельній навчальній програмі. Поряд із набором однотипних вправ для вироблення вмінь має бути достатня кількість компетентнісних завдань. Це проблемні й навіть провокаційні запитання, задачі з нестачею і надлишком даних, вправи на складання задач, контрприклади тощо. Корисними є задачі з кількома вимогами. Наприклад:

«У класі навчаються a дівчат і b хлопців.

1. Скільки всього учнів навчаються в класі?

2. Скільки всього учнів не прийшли на заняття?

3. Скільки дівчат прийшли на заняття?

4. Скільки хлопців прийшли на заняття?

5. Скільки всього учнів сьогодні прийшли на заняття?

6. Обчисліть значення виразу, одержаного за попереднім заняттям, якщо а) $a = 18$, $b = 13$, $c = 4$, $d = 5$; б) $a = 14$, $b = 15$, $c = 6$, $d = 2$.

7. Обчисліть значення одержаного виразу за даними вашого класу».

Такі задачі зручні для колективної роботи, дають можливість економити час на вивчення умови задачі, допомагають усебічно аналізувати практичну ситуацію, учать мислити і т. ін.

Завдання для навчання математики потрібно вибирати такого змісту, щоб учні працювали з реальними фактами, щоб задачі не тільки навчали учнів математики, а й підвищували їх загальний рівень. Окремі автори навчальних матеріалів захоплюються жартівливими сюжетами. Часто такі вправи не виконують потрібної дидактичної функції та відволікають дітей. Це не означає, що їх взагалі не можна використовувати. Учні можуть складати задачі такого змісту, зокрема за математичними моделями. Однак підручники і навчальні матеріали з математики мають бути інформативними й ефективними, реалізовувати принципи доцільності та науковості навчання.

Оцінювання результатів навчання з математики — це процес порівняння досягнутого учнями рівня ключових і предметних компетентностей із вимогами до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі. Ці вимоги сформульовано в Державному стандарті й конкретизовано в модельних навчальних програмах.

Оцінювання в навчальному процесі має кілька основних функцій:

- мотиваційна — активізує внутрішні й зовнішні мотиви до навчання;
- діагностична — сприяє визначенню рівня компетентності учнів, усвідомленню ними прогалин у своїх знаннях;
- коригувальна — спрямовує зусилля учнів на подолання труднощів;
- прогностична — ставить цілі навчання на майбутнє;
- розвивальна — мотивує до рефлексії та самовдосконалення;
- навчальна — забезпечує зворотний зв'язок між учителем і учнем;
- виховна — налаштовує дитину на розвиток власної організованості;
- управлінська — надає необхідну інформацію для ухвалення рішень.

Таблиця 2.2.1. **Фрагмент модельної навчальної програми «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти** (*автори М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва*)

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст	Види навчальної діяльності
Раціональні вирази		
Знає: • *означення: степеня з нульовим показником; степеня із цілим від'ємним показником;* • *основну властивість дробу;* • *властивості степеня із цілим показником;* • *правила: додавання, віднімання, множення, ділення дробів, піднесення дробу до степеня;* • *умову рівності дробу нулю.* ***Розуміє та пояснює***: • *степінь з нульовим показником;* • *алгебраїчний дріб;* • *раціональний вираз;* • *дробовий вираз;* • *тотожні перетворення виразів з алгебраїчними дробами;* • *раціональні рівняння;* • *стандартний вигляд числа;* • *як виконати скорочення дробу;* • *як звести раціональні дроби до нового знаменника;* • *як звести раціональні дроби до спільного знаменника;* • *як виконати дії із числами у стандартному вигляді;* • *як розв'язати раціональне рівняння.* ***Розрізняє*** *цілі та дробові раціональні вирази.* ***Обґрунтовує*** *виконувані дії*	Степінь із цілим показником та його властивості. Стандартний вигляд числа. Раціональні вирази. Раціональні дроби. Основна властивість раціонального дробу. Арифметичні дії з раціональними дробами. Раціональні рівняння. Раціональні рівняння як математичні моделі задач, зокрема практичних	*Розпізнавання* математичних понять, указаних у змісті, на основі їх означень. *Обчислення* значень виразів, зазначених у змісті, за заданих значень змінних. *Перетворення*: виразів зі степенями з цілими показниками на основі їх властивостей; раціональних виразів. *Зведення* числа до стандартного вигляду. *Розв'язування* простіших раціональних рівнянь. *Розв'язування* задач, зокрема практичних, що передбачають застосування означень, властивостей і правил, зазначених у змісті. *Складання* власних задач за темою

Застосовує *вивчені означення, властивості й правила, вказані у змісті, в математичних та практичних ситуаціях, що передбачають:* • *тотожні перетворення раціональних виразів;* • *розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику дробу;* • *перетворення степенів із цілим показником;* • *запис числа в стандартному вигляді;* • *дії з числами у стандартному вигляді*		

Таблиця 2.2.2. **Фрагмент модельної навчальної програми «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти** *(автори А. Г. Мерзляк та ін.)*

Очікувані результати навчання	Пропонований зміст	Види навчальної діяльності
Змістова лінія «Функції»		
Наводить приклади *величин, для яких зміна однієї з величин приводить до зміни іншої; розуміє, які залежності між величинами є функціональними.* ***Розуміє*** *сутність поняття функції.* ***Пояснює****, що таке аргумент функції, область визначення функції, область значень функції, графік функції; ілюструє на прикладах способи задання функції.* ***Уміє****, використовуючи графік функції, знаходити відповідні значення аргументу та функції.* ***Розпізнає*** *лінійну функцію з-поміж інших функцій.* ***Розуміє****, що пряма пропорційність є окремим видом лінійної функції.* ***Будує*** *графік лінійної функції.* ***Розпізнає*** *лінійну функцію з-поміж інших функцій.* ***Розуміє****, що пряма пропорційність є окремим видом лінійної функції.*	Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функції. Графік функції	Фронтальна форма навчання, яка охоплює слухання пояснень учителя / вчительки, слухання та аналіз учнями / ученицями висловлювань інших учнів / учениць. Колективне розв'язування проблемних ситуацій. Групова робота. Робота у парах. Індивідуальна робота, яка передбачає самостійне виконання завдань біля дошки або в зошиті під час уроку, контрольні та самостійні роботи, самостійну роботу з підручником, пошук інформації в інтернеті; виконання домашньої роботи; роботу з додатковою літературою; добір і порівняння матеріалу з різних джерел. Написання рефератів, доповідей. Проєктна робота

Наприклад, коли вчитель отримує зворотний зв'язок від учня, то розуміє, чи потребує той додаткової підтримки під час виконання завдання. Натомість дитина може зрозуміти, що їй потрібно вдосконалювати у своїх уміннях.

Коли ми говоримо про оцінювання, виникає насамперед запитання: «Що оцінювати? Які це результати навчання?»

У Державному стандарті виділяють чотири групи результатів навчання. Передбачається, що учень:

— досліджує ситуації та виокремлює проблеми, які можна розв'язувати із застосуванням математичних методів;

— моделює процеси й ситуації, розробляє стратегії, плани дій для розв'язання проблем;

— критично оцінює процес і результат розв'язання проблем;

— розвиває математичне мислення для пізнання й перетворення дійсності;

— володіє математичною мовою.

Для зручності оцінювання пропонується три групи результатів:

1) дослідження ситуацій та створення математичних моделей;

2) розв'язування математичних задач;

3) інтерпретація та критичний аналіз результатів.

Кожен із цих етапів передбачає розвиток математичного мислення, мови тощо. По перше, такий поділ відповідає практиці життя, якщо дивитися з погляду математики. Людина постійно стикається з проблемними ситуаціями. Для їх подолання потрібно:

— з'ясувати, чи можна розв'язати проблему за допомогою математики і створити її математичну модель;

— розв'язати математичну задачу;

— використати отриманий результат для розв'язання проблеми.

З іншого боку, навчальна діяльність із математики здебільшого полягає в розв'язуванні задач і виконанні вправ. Процес розв'язування математичних задач передбачає згадані нами етапи:

— моделювання;

— розв'язання;

— інтерпретація результату.

Виконання вправ передбачає формування вмінь і навичок на кожному із цих етапів.

Інструментом оцінювання результатів навчання з математики найчастіше також є задачі.

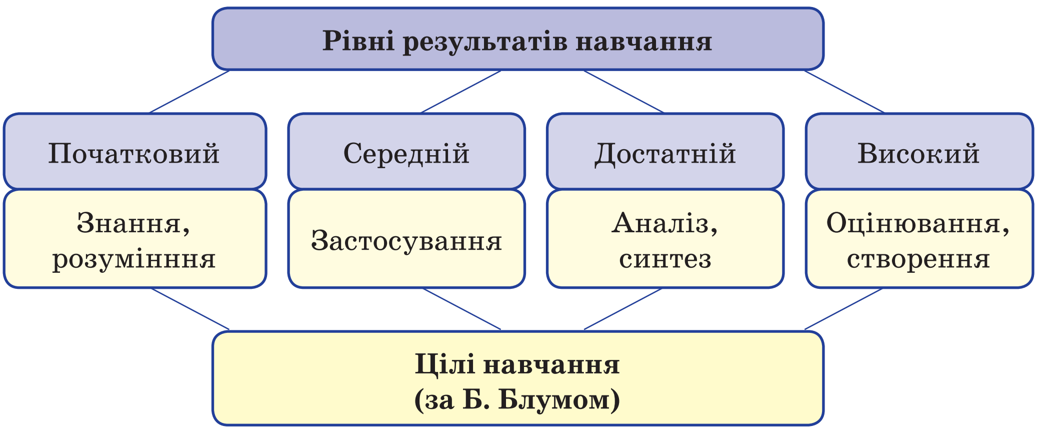
Оцінювання набуття учнями компетентностей відбувається через виконання завдань, що передбачають аналіз ситуації, або ж у практичній діяльності. Оцінювання компетентностей може здійснюватися через тестові завдання, якщо вони допомагають, наприклад, виявити істинні чи хибні судження. Ефективним засобом для виявлення компетентностей є дискусії, у яких учень виявляє вміння аналізувати й синтезувати різну інформацію, добирати переконливі аргументи.

Іншим виміром для оцінювання є рівні результатів навчання — початковий, середній, достатній і високий.

Цей поділ результатів навчання на рівні ґрунтується на ієрархії цілей навчання, розробленої у 50-х роках минулого століття професором педагогіки Чиказького університету Бенджаміном Блумом (мал. 2.2.5).

Мал. 2.2.5. Ієрархія цілей навчання за Б. Блумом

На думку Блума, цілі навчання безпосередньо залежать від ієрархії розумових процесів, таких як запам'ятовування, розуміння, застосування, аналіз, синтез та оцінка (мал. 2.2.6).



Мал. 2.2.6. Відповідність рівнів результатів навчання видам мислення і цілям навчання за Б. Блумом

Якщо слідувати розробленій Блумом таксономії, то знання учнів — це лише перший, найпростіший рівень класифікації. Далі йдуть ще п'ять рівнів цілей (або результатів) навчання, причому перші три — знання, розуміння, застосування — цілі нижчого порядку (мислення низького рівня). А наступні три — аналіз, синтез, оцінювання — вищого порядку (мислення високого рівня).

Бенджамін Блум встановив, що між рівнями мислення й виконанням певного рівня завдань існує прямий зв'язок. Більше того, самі завдання утворюють ієрархію, цілком відповідну таксономії мислення. Завдання на запам'ятовування належать до найнижчого рівня. Завдання на оцінку або судження розглядаються як високий рівень мислення. Насправді, важливими є завдання всіх рівнів і всі вони формують різні види мислення.

Результати навчання учнів з математики вимірюють зазвичай завданнями різного рівня. Для створення наборів таких завдань (а саме контрольних робіт, тестів тощо) користуються відповідними дієсловами і запитаннями (табл. 2.2.3) на с. 93.

Такою таблицею зручно користуватися для організації опитування або бесіди.

Отже, ми з'ясували, що для оцінювання результатів навчання з математики враховують групи результатів навчання та їх рівні.

Під час оцінювання неможливо залишити поза увагою навчальну діяльність учнів із математики. Важливим показником якості такої діяльності є автономність учнів. Тобто, критерієм оцінювання результатів навчання є міра самостійності учнів під час розв'язування задач, виконання вправ, усних відповідей, а також їх ініціативність під час роботи в групі.

Ступінь автономності учнів у навчальній діяльності характеризує рівень результатів навчання й рівень сформованості мислення (табл. 2.2.4 на с. 93).

Таким чином, модель оцінювання результатів навчання учнів із математики має щонайменше три виміри: групи результатів навчання, рівні результатів навчання й автономність учня в навчальній діяльності.

Оцінювання за місцем у навчальному процесі буває: поточним, тематичним та підсумковим. За метою оцінювання: діагностичним, формувальним і для контролю.

Поточне оцінювання рекомендовано проводити здебільшого як формувальне на уроках під час вивчення теми.

Воно може реалізовуватися у вигляді усного опитування, тестування, письмової роботи чи цифрової діяльності за вибором учителя.

Тематичне й підсумкове оцінювання здебільшого має на меті контроль знань та здійснюється наприкінці вивчення теми, семестру чи навчального року на основі результатів поточного оцінювання у формі тестів (із використанням цифрових технологій чи без них) або письмових контрольних робіт.

Поточне формувальне оцінювання рекомендується здійснювати за рівнями. Відповідні рівні навчальних досягнень, отримані в результаті формувального оцінювання, відображають лише результати навчання на певний момент часу. Ці результати залежать від психоемоційного та фізичного стану учня й можуть бути лише підґрунтям для висновків щодо залучення учнів у навчальний процес, демонструють динаміку розвитку знань, умінь і навичок. Тому результати поточного формувального оцінювання не можуть підсумовуватися, накопичуватися, з них не може виводитися середній бал тощо. Під час формуваль-

Таблиця 2.2.3. **Створення інструментів оцінювання результатів навчання учнів математики**

Цілі навчання (рівні мислення)	Знання (запам'ятовування)	Розуміння	Застосування	Аналіз	Синтез	Оцінка, створення
Запитання	Що таке…? Що саме…? Скільки…?	Як ви розумієте…? Як пояснити…?	Де ще застосовується…? Де ще використовується…?	Що спільного між…? Як пов'язані…? Які функції…? Які основні елементи…?	Поясніть, чому… Про що свідчить наявність…? Що потрібно…? Як зробити…?	Чи згодні ви, що…, чому? Істинно чи хибно, що…?
Дієслова	Знайдіть, перелічіть, назвіть, визначте, розташуйте, опишіть, наведіть приклад…	Розпізнайте, поясніть, опишіть, виберіть…	Поясніть, обчисліть, побудуйте, виберіть, застосуйте, завершіть…	Встановіть послідовність, визначте наслідки, структуруйте, порівняйте, зіставте…	Сформулюйте, узагальніть, перегрупуйте, згрупуйте, замініть, спрогнозуйте, знайдіть інший спосіб…	Порівняйте, оцініть, оберіть, доведіть, обґрунтуйте, аргументуйте, перевірте…
Рівні результатів навчання	**Початковий**		**Середній**	**Достатній**		**Високий**

Таблиця 2.2.4. **Ступінь автономності учнів на кожному з рівнів результатів навчання**

Рівні результатів навчання	Початковий	Достатній	Середній	Високий
Ступінь автономності. У навчальній діяльності учень:	відчуває труднощі у визначенні й виправленні власних помилок навіть за допомогою вчителя	вносить уточнення йвиправляє власні помилки за допомогою вчителя	вносить уточнення, корегує власну роботу, виправляє помилки з незначною допомогою вчителя	самостійно аналізує власну роботу, коригує та уточнює її за опосередкованої участі вчителя

Таблиця 2.2.5. **Модель тематичного та підсумкового оцінювання результатів навчання**

Групи результатів	Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4	Тема 5	Тема 6	Підсумкова оцінка
Дослідження ситуацій та створення математичних моделей	С (2)	П (1)	С (2)	Д (3)	В (4)	Д (3)	8 балів (достатній рівень)
Розв'язування математичних задач	Д (3)	П (1)	С (2)	Д (3)	В (4)	В (4)	9 балів (достатній рівень)
Інтерпретація та критичний аналіз результатів	Д (3)	П (1)	С (2)	Д (3)	В (4)	Д (3)	8 балів (достатній рівень)
Тематична оцінка	8 балів (достатній рівень)	3 бали (початковий рівень)	6 балів (середній рівень)	9 балів (достатній рівень)	12 балів (високий рівень)	10 балів (високий рівень)	

ного оцінювання важливою є вербальна оцінка. Учитель має коректно і зрозуміло формулювати оцінку роботи учнів, даючи поради та рекомендації щодо корегування результатів навчання. Саме за результатами поточного оцінювання вчитель корегує методику навчання.

Тематичне оцінювання призначене для отримання висновків про результати навчання учнів із певної теми. Воно може проводитись у формі тесту або письмової тематичної контрольної роботи, що містить завдання на перевірку всіх груп результатів навчання.

Тематичне оцінювання проводиться за темою, що вивчалася.

Підсумкове семестрове та річне оцінювання може проводитися на основі тематичних оцінювань, а також у формі тесту або письмової контрольної роботи.

Наведемо приклад моделі тематичного й підсумкового оцінювання.

Результати тематичного оцінювання можуть бути представлені за рівнями (П — початковий, С — середній, Д — достатній, В — високий) та в балах за 12-бальною шкалою. Щоб здійснити перехід від рівневої шкали до бальної, нехай за результати початкового рівня присвоюється 1 бал, середнього рівня — 2 бали, достатнього рівня — 3 бали, високого рівня — 4 бали.

Наприклад за семестр було вивчено 6 тем. Із кожної теми за кожну групу результатів навчання учень має певний рівень, за який виставляємо відповідний бал. У сумі за кожну тему учень отримує відповідну оцінку (табл. 2.2.5 на с. 94).

Застосувавши таку модель, учитель (за бажанням) може здійснити й підсумкове оцінювання без проведення окремого підсумкового тестування чи контрольної роботи. У цьому разі підсумкова оцінка за групу результатів навчання виставляється, виходячи з переважної більшості рівневих тематичних оцінок за відповідну групу результатів. Наприклад, якщо 5 із 6 тематичних оцінок за якусь групу результатів відповідають середньому рівню, то й підсумкова оцінка за цю групу також має відповідати середньому рівню. Якщо ж виявити переважну більшість серед рівневих тематичних оцінок складно, то підсумкову оцінку можна виставити, використовуючи відношення отриманих балів за групу результатів до максимально можливого балу за цю групу результатів. Наприклад, за групу результатів «Інтерпретація та критичний аналіз результатів» у таблиці 2.2.5 максимально можна було отримати 24 бали (6 тем по 4 бали максимально), а фактично було отримано 16 балів. Отже, підсумкова оцінка може бути обчислена так: $16 : 24 \cdot 12 = 8$ балів (достатній рівень).

Це лише приклад організації тематичного й підсумкового оцінювання з математики. Розуміючи основні підходи до оцінювання результатів навчання. Учитель може розробляти власні моделі, адаптовані до особливостей учнів.

Література до розділу 2

1. Словник української мови: в 11 т. / ред. колег. І. К. Білодід (голова) та ін. Київ: Наукова думка, 1970–1980. Т. 4: І — М / ред. А. А. Бурячок, Г. М. Гнатюк, П. П. Доценко. Київ, Наукова думка, 1973. 840 с.

2. Головань М. С. Компетенція і компетентність: досвід теорії, теорія досвіду. *Вища освіта України*. 2008. № 3. С. 23–30.

3. Постанова Кабінету Міністрів України «Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти» від 30 вересня 2020 р. № 898.
URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF#Text

4. Наказ Міністерства освіти і науки України «Про затвердження типової освітньої програми для 5—9 класів закладів загальної середньої освіти» від 19 лютого 2021 р № 235.
URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0235729-21#Text

5. Закон України «Про освіту» (2017).
URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text

Розділ 3. Методика практико-орієнтованого навчання геометрії в гімназії

Під практико-орієнтованим навчанням геометрії розумітимемо спеціально організований пізнавальний процес, спрямований на формування в учнів уявлень про геометрію як про метод пізнання дійсності, що дає змогу та вивчати реальні об'єкти, а також на розвиток умінь застосовувати вивчені геометричні поняття, результати, методи для дослідження найпростіших об'єктів дійсності, для розв'язання практико-орієнтованих задач. Цей процес розглядатимемо як внесення у сформовану методичну систему навчання геометрії в школі на основі складових частин практико-орієнтованого навчання, а саме: практичне застосування геометрії, представлено комплексом навчальних матеріалів; метод математичного моделювання як розв'язання практико-орієнтованих задач та навчання, спрямоване на формування у школярів відповідних прикладних умінь.

Під практико-орієнтованою задачею розумітимемо завдання, засноване на змістовній моделі реального об'єкта, математична модель якого може бути побудована засобами шкільного курсу математики, геометрії зокрема. Практико-орієнтовані задачі — це задачі, які відповідають таким вимогам:

- загальнокультурна та соціальна значимість одержуваного результату забезпечує пізнавальну мотивацію учня;
- мета розв'язання такої задачі полягає не стільки в отриманні відповіді, скільки в набутті нового знання (методу, способу розв'язання, прийому), з можливим перенесенням на інші предмети;
- за структурою ці задачі — нестандартні, тобто в них обов'язково є невизначені деякі компоненти;
- можлива наявність кількох шляхів розв'язання.

Навчання з використанням практико-орієнтованих задач сприяє більш міцному засвоєнню інформації, оскільки виникають асоціації з конкретними діями та подіями. Особливість цих задач у тому, що вони викликають підвищений інтерес учнів, сприяють розвитку допитливості, творчої активності. Вони розвивають логічне й асоціативне мислення, забезпечують розвиток особистості учня: спостережливості, вміння сприймати та переробляти інформацію, робити висновки; уміння застосовувати отримані знання для аналізу процесів, що спостерігаються; зростання творчих здібностей; розкриття ролі математики в сучасній цивілізації.

На основі загальнодидактичних принципів доступності, послідовності та систематичності сформулюємо низку методичних принципів складання комплексу практико-орієнтованих навчальних матеріалів з геометрії.

1. У геометричних завданнях та ілюстративних матеріалах, що відображають практичне застосування математики, використовуються математичні моделі тієї складності, що відповідає рівню підготовки учнів у галузі математики та інших навчальних предметів (принцип доступності).

2. Практико-орієнтовані навчальні матеріали спрямовані на досягнення запланованих предметних результатів навчання геометрії в заданий відрізок навчального часу (принцип систематичності).

3. Практико-орієнтовані навчальні матеріали є комплексом вправ, завдань та ілюстративних засобів, що забезпечують усі етапи вивчення математичних пропозицій і сприяють формуванню прикладних та математичних умінь школярів (принцип послідовності).

3.1. Стан розроблення проблеми в освітніх системах різних країн

(*В. Волошена*)

Проаналізуємо дослідження вчених із Сінгапуру, Німеччини, США. Вибір країн визначено особливою увагою до практико-орієнтованого навчання математики у шкільних освітніх системах цих країн, а також результатами школярів у Міжнародній програмі з оцінки освітніх досягнень учнів PISA (проводиться один раз на три роки). У 2018 році за результатами оцінки математичної грамотності школярі Сінгапуру посіли 2 місце, Німеччини — 20, США — 37, а Україна 43 місце серед 78 країн-учасниць. Результати сінгапурських учнів статистично значимо не відрізняються від результатів учнів Китаю. Однією із цілей цього дослідження є перевірка рівня сформованості математичної грамотності школярів. На відміну від референтних країн, в Україні найпроблемнішою з-поміж трьох галузей PISA є математика. У більшості країн немає значних відмінностей між результатами учнів / студентів у різних предметних галузях, натомість в Україні особливо помітні відносно низькі результати учнів / студентів із математики [2].

Питання, пов'язані з практичним застосуванням математики і побудовою математичних моделей, були введені в шкільну програму в Сінгапурі ще в 2003 році. Там вважають важливим, щоб учні застосовували математичні навички та вміння розмірковувати для розв'язання різноманітних проблем, зокрема реальних [3]. Однак у дослідженнях інших науковців наголошується, що включення практико-орієнтованих задач до змісту уроків у Сінгапурі йде з труднощами, пов'язаними із відсутністю відповідних рекомендацій для вчителів щодо навчання методу математичного моделювання. Також необхідно, щоб сюжети завдань, які розв'язуються цим методом, сприяли набуттю школярами досвіду застосування математики в реальному світі [4].

Велику увагу в низці європейських досліджень приділено питанням навчання математичного моделювання школярів, причому ці питання досліджуються з різних поглядів — педагогічного, психологічного, математичного та ін. Зазначимо, що в багатьох дослідженнях метою є навчання побудови математичних моделей реальної ситуації. Розглянемо низку наукових праць В. Блюма (університет Касселя, Інститут математики) та його співавторів. Зазначимо, що цей учений входив до складу експертної групи PISA з математики у період з 2000 до 2012 року. Він підготував важливу теоретичну основу для розробки групою експертів з математики (MEG) необхідних завдань, більшість яких була заснована на його досвіді навчання школярів математичного моделювання. Одне дослідження В. Блюма присвячено опису деяких результатів реалізації проєкту DISUM. Це міждисциплінарний проєкт, започаткований у 2002 році та спрямований на підвищення якості навчання математики німецьких школярів. Метою цього проєкту було дослідження результативності застосування низки дидактичних методів навчання математики, орієнтованих на розвиток саморегуляції школярів під час вирішення завдань. Результати дослідження показали, що внесення у процес навчання завдань на моделювання має позитивний вплив на якість знань учнів та підвищує їх мотивацію [5].

Низка досліджень Ж. Релленсманна було присвячено предметній підготовці школярів до зображення фігур під час розв'язання геометричних задач [6], зокрема зазначено, що учні, які мають здібності до малювання, краще освоюють геометрію. А розвитку таких здібностей, у свою чергу, сприяє навчання елементів математичного моделювання у ході розв'язання практико-орієнтованих задач.

Це показано на прикладі такого завдання:

- *Для попередження про землетруси в Індійському океані встановлено 40 додаткових систем раннього сповіщення. Буї висотою 3 м плавають на поверхні моря і з'єднані мотузкою з вимірювальним приладом на морському дні, що розташований на 6000 м нижче поверхні. Оскільки довжина мотузки становить 6025 м, буй може відхилятися від свого положення безпосередньо над вимірювальним приладом. Наскільки далеко буй може максимально відхилитись від положення безпосередньо над вимірювальним пристроєм?*

Учням потрібно було побудувати геометричну модель реальної ситуації. Із цим краще впоралися діти, які вміли малювати. Також автори зазначили, що ця група школярів перевершує за рівнем знань своїх однолітків із того самого класу, у кого такі здібності розвинені недостатньо. Крім того, дослідження виявило, що вміння зображати геометричні фігури входить до складу вміння математичного (геометричного) моделювання. Також автори вказали, що математичне моделювання може стати одним із засобів поліпшення когнітивних здібностей школярів і розвитку образотворчих умінь, особливо серед учнів із низькою успішністю.

У дослідженнях американських учених розглянуто питання використання практико-орієнтованих завдань під час уроків математики з метою навчання побудову математичних моделей реальності. Проаналізуємо дослідження, представлене у статті Р. Збіка та А. Коннера, спрямоване на реалізацію стандарту щодо навчання математичного моделювання. У роботі автори показали, що мотивація до вивчення математики може бути сформована у процесі модельної діяльності. Зазначається, що застосування різних розділів математики мають бути продемонстровані в навчанні інших дисциплін [7]. Дослідники показали, що навчання математичного моделювання сприяє розвитку математичного мислення. Учням запропонували задачу з реального життя, у розв'язанні якої вони повинні були застосувати геометрію. Потім було проведено аналіз того, як діти впоралися із цим завданням. Наведемо приклад задачі:

- *Бойсе (штат Айдахо), Хелена (штат Монтана), Солт-Лейк-Сіті (штат Юта) — три великі міста на північному заході США. У кожному із цих міст є медичні установи. Уяви потенціал будівництва такого ультрасучасного високотехнологічного медичного закладу, який могли б спільно використовувати мешканці цих трьох міст і прилеглих територій! Карта демонструє розташування цих трьох міст, відстань між Хеленою та Солт-Лейк-Сіті становить 780 км, між Бойсе та Хеленою — 565 км, між Бойсе та Солт-Лейк-Сіті — 340 км. Визначте найкраще розташування для будівництва цієї лікарні.*

Автори спостерігали за тим, як учні працювали над завданням: робили до неї геометричний малюнок, аналізували умову та розв'язували її. Було зроблено висновок, що навчання з використанням математичного моделювання, ймовірно, покращить розуміння школярами освітньої програми з математики, геометрії зокрема, а також стане для них поштовхом для отримання нових знань із математики.

Наприклад, у стандарті середньої школи США з геометрії є розділ «Моделювання за допомогою геометрії». Тут описано три типові ситуації. Пропонуємо використовувати:

1) геометричні фігури, їх властивості для опису реальних об'єктів (моделювання стовбура дерева або тіла людини у формі циліндра);

2) поняття щільності, площі й обсягу в ситуаціях, що потребують моделювання (розрахунок щільності населення на квадратну милю та теплової енергії на одиницю обсягу);

3) геометричні методи для розв'язання проєктних задач (наприклад, мінімізація витрат на щось).

Таким чином, в освітніх стандартах із математики у США питання моделювання виділено концептуально в окремий стандарт, а також внесено до всіх інших стандартів.

Узагальнюючи результати досліджень учених різних країн, зауважимо загальні тенденції, що дають змогу зробити висновок про використання практико-орієнтованого навчання математики і геометрії зокрема.

Практико-орієнтоване навчання вимагає спеціального добору задач, що мають враховувати вікові та пізнавальні інтереси учнів.

У більшості досліджень розглядаються питання навчання математичного моделювання як методу опису та дослідження реальності.

Аналізуючи результати розгляду нормативних документів, що регламентують шкільну математичну освіту Сінгапуру, Німеччини та США, зазначимо, що в кожній з них приділено особливу увагу навчанню математичного моделювання. Виділено спеціальні вміння школярів відповідно до етапів математичного моделювання, наведено приклади реальних ситуацій, з якими можна ознайомити школярів.

Математичне моделювання є основним змістовним компонентом практико-орієнтованого навчання математики у школі. Аналіз наукових досліджень низки країн показав доцільність навчання математичного моделювання на уроках математики, зокрема геометрії.

Найважливішими проблемами навчання математики в школі, особливо навчання геометрії, є проблеми, пов'язані з усвідомленим засвоєнням навчальної інформації та застосуванням вивченого.

На розв'язання цих проблем спрямовано системно-діяльнісний підхід, покладений в основу стандартів загальної освіти в Україні, які забезпечують не лише активну навчальну діяльність школярів щодо досягнення предметних результатів, а й діяльність, що застосовується до конкретних життєвих ситуацій.

Можливість працювати з реальними даними та використовувати математичні інструменти для їх аналізу має бути частиною вивчення математики на всіх рівнях. Завдання «на моделювання» дають змогу вивчити весь процес побудови математичної моделі реальної проблеми. Ці проблеми можуть бути відкритими, неструктурованими та складними. Учні також повинні бачити справжній, а не надуманий зміст розв'язання цих проблем.

3.2. Практико-орієнтоване вивчення геометричних понять

(*В. Волошена*)

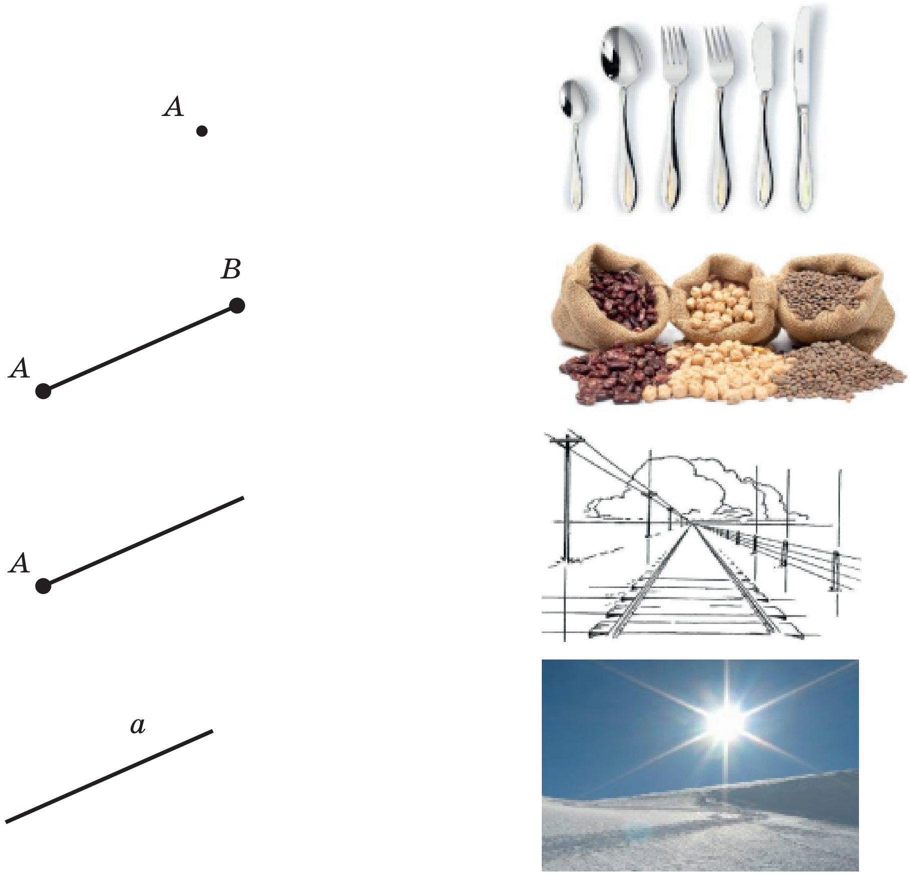
У теорії та методиці навчання математики розроблено закономірності вивчення математики школярами, зокрема визначено етапи опанування математичних понять. Традиційно виділяють три етапи: введення, засвоєння та закріплення означень, понять, теорем, які мають місце й під час навчання геометрії.

Введення понять

На етапі введення поняття на уроці геометрії вчитель за допомогою відповідних завдань і вправ «підводить» учнів до появи нового поняття. Школярі у процесі «відкриття» поняття формулюють його визначення. На цьому етапі використовуються завдання, що сприяють актуалізації знань та вмінь, необхідних для засвоєння поняття, мотивації його вивчення та розпізнавання.

Завдання 1.1. **Встановлення відповідності між набором реальних об'єктів і набором геометричних понять** (відповідність: реальні об'єкти — моделі).

Приклад. Встановіть відповідність, з'єднавши стрілками геометричні фігури і реальні об'єкти. Одній фігурі може відповідати лише один об'єкт (мал. 3.2.1)



Мал. 3.2.1

Виконання цієї вправи передбачає як узагальнення й абстрагування, так і порівняння реального об'єкта з його можливим математичним еквівалентом (математичної моделлю), яким і є в цьому прикладі геометрична фігура. Можлива й інша інтерпретація цього завдання. Наприклад, у першому стовпці подати інформацію не в графічній, а текстовій формі. Аналогічний прийом можна використовувати і в інших вправах. Математичні об'єкти в першому стовпці (або реальні об'єкти другого стовпця) можна подати з надлишком або з нестачею. Одному реальному об'єкту співвіднести кілька математичних і навпаки. Це підвищує рівень складності запропонованих вправ.

Таким чином, схема для складання цієї вправи може бути подана в такому вигляді (мал. 3.2.2).

Математичне поняття (термін / поняття / означення / зображення)	Реальний об'єкт
...	...
Математичне поняття (термін / поняття / означення / зображення)	Реальний об'єкт

Мал. 3.2.2.

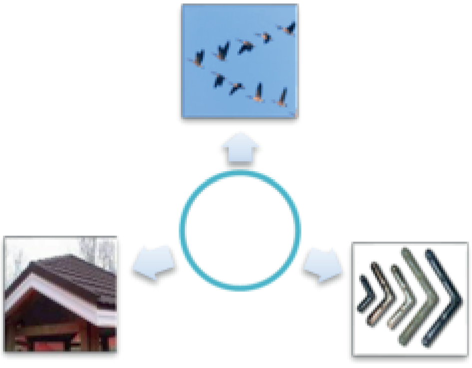
Під час виконання цієї вправи формуються прикладні вміння: замінювати вихідні об'єкти та відношення їх математичними еквівалентами; описувати ці об'єкти та відношення мовою математики.

Завдання 1.2. **Добір математичного еквівалента** (математичної моделі) **до певних реальних об'єктів** (відповідність: модель — реальні об'єкти).

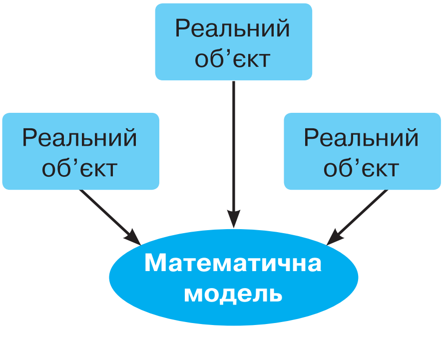
Приклад. Укажіть, якою геометричною моделлю можуть бути реальні об'єкти на малюнку (мал. 3.2.3).

Центральним елементом наведеної схеми є поняття кута — математична (геометрична) модель реальних об'єктів. Ця модель може бути виражена словесно та / або графічно.

Схему для складання цієї вправи можна подати в такому вигляді (мал. 3.2.4).



Мал. 3.2.3



Мал. 3.2.4

У наведеному прикладі показано, що одна математична модель (кут) може бути зіставлена з реальними об'єктами різної природи. Також можна запропонувати і вправи, де реальні об'єкти дібрані з однієї галузі знань або сфери діяльності (одного контексту, за термінологією дослідження PISA). Цей прийом добору реальних об'єктів і ситуацій доцільно використовувати і в інших вправах та завданнях формування цілісного ставлення до застосовності математики у світі.

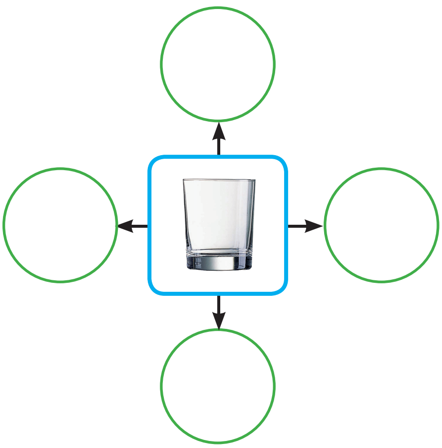
При виконанні цієї вправи формується прикладне вміння етапу формалізації методу математичного моделювання *співвідносити реальні об'єкти різної природи з однією математичною моделлю*.

Завдання 1.3. **Добір кількох математичних еквівалентів** (математичних моделей) **до одного реального об'єкта** (відповідність: моделі — реальний об'єкт).

Приклад. Укажіть, якими геометричними моделями може бути представлений реальний об'єкт (склянка) на малюнку (мал. 3.2.5)

Зазначимо, що математичною моделлю можуть виступати не тільки геометричні фігури, але й поняття рівності чи подібності фігур.

Схема для складання цієї вправи може бути представлена в такому вигляді (мал. 3.2.6).



Мал. 3.2.5

Мал. 3.2.6

Наведені типи вправ спрямовані на формування понять (етап введення), а також сприяють навчанню методу математичного моделювання та формуванню прикладних умінь етапу формалізації в*становлювати відповідність між змістовною та математичною моделлю об'єкта залежно від заданих умов* та *Описувати реальний об'єкт кількома математичними моделями*.

Наведені приклади вправ можуть бути перетворені й на ілюстративний матеріал, якщо учням важко їх виконувати. Наприклад, вправа, у якій необхідно дібрати математичні моделі до реального об'єкта

«Склянка», має рівень вище базового й може спричинити труднощі в учнів під час самостійного виконання.

На цьому етапі доцільно використовувати практико-орієнтовані завдання, що мотивують уведення нового поняття. Це такі завдання, у результаті вирішення яких школярі усвідомлюють, що є об'єктивна необхідність у появі нового математичного поняття для опису реального об'єкта, події чи явища.

Наведемо приклад такого завдання.

Приклад. Існує повір'я, що фігурки слонів не лише прикрашають житло, а й приносять удачу. Розгляньте зображення фігурок слонів на малюнку 3.2.7. Порівняйте їх форму і розміри. Зробіть висновок, чим вони схожі та чим відрізняються.

Мал. 3.2.7

Школярі можуть побачити, що фігурки слонів мають однакову форму, але різні розміри. Далі учнів спонукають зробити висновок, що в геометрії фігури однакової форми називаються подібними. Це завдання базового рівня складності та доступне всім учням, адже наведено подібність у навколишньому світі. Можна пропонувати школярам дібрати схожі ілюстрації після введення цього поняття.

Таким чином, доцільно виділити тип практико-орієнтованих завдань для першого етапу.

Мотивація введення поняття

Для складання такого завдання добираємо відповідний приклад із навколишнього світу і формулюємо питання, що дає змогу зробити висновок про наявність певної математичної закономірності, проявів властивостей і ознак математичного поняття тощо. Ці завдання сприяють формуванню прикладного вміння етапу математизації, а саме *виділяти реальні об'єкти, які можна описати засобами шкільного курсу математики*».

Засвоєння понять

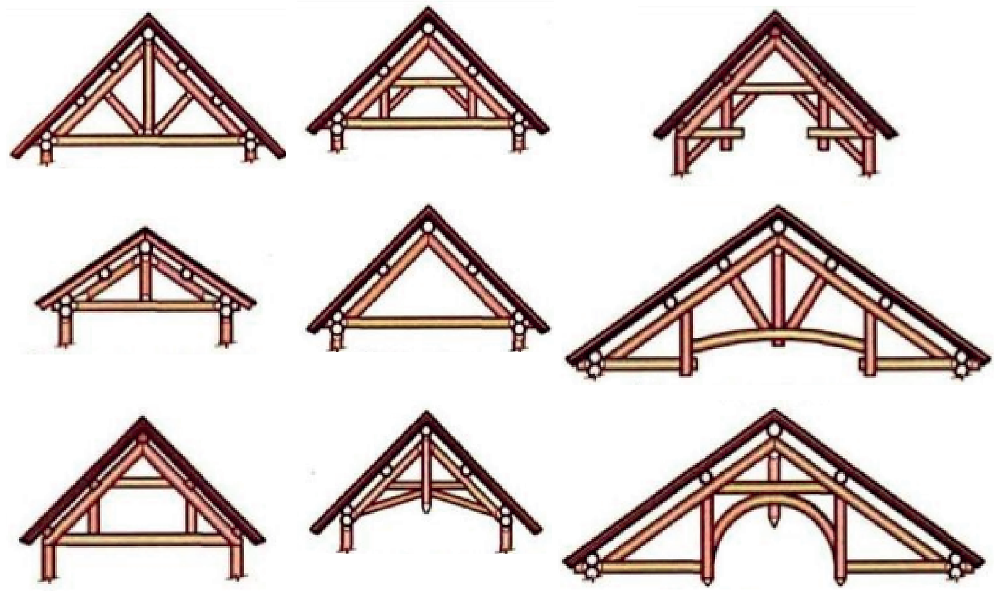
На етапі засвоєння понять, математичних речень школярі навчаються застосовувати вивчені на попередньому етапі визначення, аксіоми, теореми. Завдання на розпізнавання й застосування поняття сприяють первинному закріпленню введеного поняття, так як для їх розв'язання достатньо використовувати щойно вивчений матеріал. Такі завдання, зазвичай, не ускладнені необхідністю застосування інших нововведених фактів.

Вважаємо за доцільне на цьому етапі запропонувати школярам вправи на класифікацію понять. Відомі два види класифікації понять: за видозміненою ознакою та дихотомічна, які можна проілюструвати в курсі геометрії для гімназії.

Прикладами класифікацій за видозміненою ознакою є класифікації трикутників за величинами внутрішніх кутів, за кількістю рівних кутів, за кількістю рівних сторін. Як бачимо, поняття може мати кілька видозмінених ознак, які можуть бути вибрані як основа класифікації. Також можна навчити школярів класифікувати об'єкти за дихотомічною ознакою. Наприклад, застосувати дихотомію для класифікації чотирикутників на опуклі та неопуклі. Покажемо, які практико-орієнтовані задачі на класифікацію можна запропонувати школярам, виділивши відповідний тип вправ.

Завдання 2.1. **Виявлення основи класифікації поняття** (за видозміненою ознакою або дихотомічною ознакою), (класифікація понять: основа).

До прикладу. На малюнку (мал. 3.2.8) показано різні види крокв'яних систем, що використовуються для облаштування дахів малоповерхових будинків. Доберіть одну математичну модель, якій відповідають усі представлені крокв'яні системи, та вкажіть ознаку, за якою обрано саме цю модель.



Мал. 3.2.8

Наведемо можливий перебіг міркувань школярів. Як математичну модель, що підходить до всіх поданих об'єктів, можна вибрати кут. Тепер слід знайти потрібну ознаку. Кути можуть бути прямими, гострими й тупими. На малюнку зображено об'єкти, математичними моделями яких можуть бути прямі й тупі кути. У завданні потрібно визначити одну модель (це кут) і вказати відповідну ознаку (величина кута).

Виберемо іншу модель — трикутник. Тоді вивчення форм кроквяних систем показує, що як ознаку слід узяти рівність двох сторін трикутника. Таким чином, ще однією відповіддю на запитання завдання буде: математична модель — рівнобедрений трикутник, ознака — рівність двох сторін.

Отже, для конструювання такої задачі вибираються математичні поняття, класифікацію яких необхідно продемонструвати з обраної основи. До цих понять як до математичних моделей добираються відповідні реальні об'єкти. Задача конструюється за такою словесною формулою: «На малюнку показано (або перераховано) реальні об'єкти. Доберіть одну математичну модель, якій відповідають усі подані об'єкти, та вкажіть ознаку, за якою обрано саме цю модель».

Завдання 2.2. **Розпізнавання введеного поняття чи математичної пропозиції під час опису реального об'єкта або процесу** (розпізнавання поняття / математичної пропозиції).

Суть конструювання вправ цього типу в тому, що наводиться опис (зображення) реального об'єкта чи явища та складаються запитання, які дають змогу розпізнати й дібрати відповідну математичну модель: поняття або математичну пропозицію.

На малюнку (мал. 3.2.9) показано форму для садової доріжки, виготовлену з поліпропілену. Форму встановлюють на попередньо розмічену та підготовлену ділянку землі, потім у неї заливається бетон або інший відповідний розчин. Після цього форму виймають і поміщають у наступну частину доріжки.


Мал. 3.2.9

1. Форма поділена на 9 багатокутників. Позначте їх цифрами на малюнку та запишіть номери опуклих і неопуклих багатокутників.

2. Чи можна вказати два багатокутники, які мають спільну сторону й утворюють разом опуклий / неопуклий багатокутник?

3. Укажіть, який вид руху можна використовувати для опису процесу виготовлення доріжки під час переміщення форми? (Відповідь: паралельне перенесення на вектор, довжина якого дорівнює довжині форми.)

Звернімо увагу, що цю вправу можна використовувати у двох навчальних ситуаціях: під час засвоєння понять «опуклий» та «неопуклий багатокутник» (запитання 1 та 2) та на етапі засвоєння поняття «паралельне перенесення» (запитання 3). Такі вправи дають змогу перейти до розв'язання практико-орієнтованих задач, у яких для побудови математичної моделі необхідно вибрати відповідний до реальної ситуації математичний еквівалент або побудувати модель як сукупність математичних понять і відношень. Таким чином, вправи сприяють формуванню прикладних умінь *замінювати вихідні об'єкти та відношення їх математичними еквівалентами; описувати ці об'єкти та відношення мовою математики*.

Завдання 2.3. **Застосування введеного поняття чи математичної пропозиції для пояснення подій реального світу** (застосування поняття / математичної пропозиції (чому?))

Наведемо приклади

1. Чому тротуарну плитку часто виготовляють у формі правильних багатокутників, наприклад, шестикутників чи квадратів?

2. Якщо у вас немає креслярського косинця, то прямий кут можна отримати дворазовим перегинанням аркуша паперу довільної форми. Чому кут буде прямим?

3. Поясніть, чому що далі предмет від ока, то менших розмірів він нам здається? Проілюструйте своє пояснення малюнком.

Зазначимо, перші дві вправи — базового рівня. У їх змісті вже названо геометричне поняття, яке допоможе в пошуку відповіді на поставлене запитання. У третій вправі такої підказки немає, математичні поняття у формулюванні не згадуються, отже, знайти відповідну математичну модель складніше.

Ці завдання спрямовані на формування прикладних умінь: *вибирати раціональні методи дослідження реальних об'єктів залежно від поставленого завдання* та *аналізувати математичні методи розв'язання з погляду їх раціональності для дослідження реального об'єкта*.

Завдання 2.4. **Встановлення зв'язку між математичним поняттям та / або математичною пропозицією і практичними діями в реальному світі** (зв'язок: модель — реальний об'єкт (як?)).

1. Як використовується ознака паралельності площин під час вирівнювання підлоги?

2. Як використовувати твердження «вписаний кут, що спирається на півколо, — прямий» для того, щоб знайти центр круглої тарілки?

3. Як застосовується властивість жорсткості трикутника під час облаштування даху будинку?

Вправи цього типу спрямовані на формування прикладного вміння *аналізувати математичні методи розв'язання з погляду їх раціональності на дослідження реального об'єкта*.

Перший тип практико-орієнтованих задач на цьому етапі— це задачі з одно-двох кроковим внутрішньо модельним розв'язанням, вкладених у первинне закріплення вивченого. Ці задачі не ускладнені необхідністю застосування інших нововведених понять, математичних пропозицій тощо. Однак побудова математичної моделі ускладнена надлишком чи нестачею даних. У цьому полягає особливість прийому конструювання.

Закріплення понять

Завдання 3.1. **Первинне закріплення вивченого поняття / математичної пропозиції.**

Візьмемо задачу. У день літнього сонцестояння (21–22 червня) Сонце на широті Каїра піднімається над горизонтом на кут приблизно 83°. Знайдіть, якої довжини буде ваша тінь у цей момент.

Бачимо, що розв'язання цієї задачі однокрокове. Вона може бути використана щодо поняття тангенса кута в прямокутному трикутнику. Звернемо увагу: це задача з прихованими даними. В умові не наведено зріст людини, під час розв'язання учень повинен здогадатися, що необхідно використовувати дані про власний зріст.

Цей тип задач на етапі закріплення дає змогу формувати прикладні вміння школярів, відповідні етапу формалізації методу математичного моделювання, а саме *оцінювати повноту вихідних даних для побудови математичної моделі*.

Завдання 3.2. **Включення нового поняття / математичної пропозиції до системи відомих.**

Цей тип задач сприяє осмисленому застосуванню і тривалому збереженню в пам'яті учнів змісту пройденого матеріалу. Особливість прийому конструювання задачі полягає в доборі такої реальної ситуації, для розв'язання якої використовується кілька понять і математичних пропозицій. Водночас певну складність під час розв'язання мають усі або окремі етапи методу математичного моделювання.

Типи вправ на цьому етапі виділяти немає необхідності. Підготовча робота до закріплення й застосування вивченого завершена на етапах введення та засвоєння. На поточному етапі закріплення доцільно пропонувати практико-орієнтовані задачі, внутрішньомодельне розв'язання яких передбачає складнішу математичну діяльність, ніж на попередніх етапах. Установлення відповідності між реальним й абстрактним світом геометрії на цьому етапі не є самоціллю, а потрібне для розв'язання задачі.

Приклад. На мотузці зав'язали п'ять вузликів. На скільки частин ці вузлики розділили мотузку? Скільки треба зав'язати вузликів, щоб поділити мотузку на сім частин? Сформулюйте правила для розв'язання цієї задачі.

Зазначимо, що вузлики можна зав'язувати трьома способами (мал. 3.2.10).

Мал. 3.2.10

Для того щоб розібратися з таким розташуванням вузликів, необхідно відповісти на запитання: якими математичними еквівалентами можна уявити цей реальний об'єкт? Це — пряма, промінь чи відрізок (залежно від наявності або відсутності вузликів на кінці мотузки)?

Практико-орієнтований підхід до вивчення понять і математичних пропозицій, що встановлює зв'язки між реальним світом та геометрією, дає змогу активізувати пізнавальний інтерес школярів, сприяє більш глибокому й міцному засвоєнню навчальної інформації.

3.3. Реалізація змістово-методичної лінії практико-орієнтованого навчання

(*В. Волошена*)

Аналіз сучасних тенденцій розвитку шкільної математичної освіти показує, що зміст навчання геометрії у школі має переважно загальнокультурну значимість для учнів. Якщо раніше школярі докладно вивчали, наприклад, принципи низки геодезичних приладів, виконували практичні роботи, пов'язані з вимірами й побудовами на місцевості, то сьогоднішні учні не завжди навіть знають назви найпростіших вимірювальних приладів. У сучасних школярів немає потреби збагачувати свій життєвий досвід подібними знаннями й навичками, вони стали суто професійними.

Відповідно до Державного стандарту загальної освіти, розкриття математичних законів у природі, взаємозв'язків математики з мистецтвом, практичними сферами діяльності — одне з основних завдань практико-орієнтованого навчання математики у школі. Проте нині ще не сформована загальнотеоретична база, форми і прийоми навчання школярів практичним додаткам математики розрізнені, немає встановленого змісту.

Аналізуючи зміст підручників геометрії інших авторів, відзначимо, що в них також використано практичні додатки для ілюстрації теоретичного матеріалу у фабулі навчальних завдань. Однак це швидше зроблено «за традицією», кількість додатків зовсім невелика, їхня тематика не відрізняється різноманітністю. Найчастіше це завдання та приклади, пов'язані з вимірами на місцевості. Як показав наш аналіз, автори підручників тією чи іншою мірою використовують практичне застосування геометрії в навчанні. Проте становище з методично обґрунтованим використанням практико-орієнтованих задач у геометрії в школі не можна визнати задовільним.

Традиційними практико-орієнтованими задачами, які трапляються майже у всіх навчальних посібниках з геометрії для школи, є побудови та вимірювання на місцевості. Такі завдання передбачають формування в учнів здатності застосовувати наукові знання (і не лише математичні) для розв'язання проблем, що виникають під час взаємодії людини з реальним світом.

Набуті школярами вміння застосовувати геометрію виявляються й щодо низки шкільних предметів: фізики, хімії, географії тощо. Для розвитку таких умінь у курс геометрії зазвичай вносять міжпредметні завдання. Щоб уроки геометрії не замінювали уроки інших дисциплін, під час добору задач міжпредметного змісту основний акцент робиться на побудову математичної моделі, вибір відповідного математичного апарату. Використовувані фізичні, хімічні чи будь-які інші моделі завдання досить прості. Цей підхід переносять на вибір усіх видів завдань на використання математики. Адже під час уроків математики школярі передусім навчаються математики.

Практико-орієнтовані задачі з геометрії повинні бути дібрані не випадково, а за певною системою, найліпше виділити їх в окрему змістову лінію. Ця лінія практичного застосування геометрії є змістовно-методологічною. Методологічна функція полягає у вивченні понять і методів, що поєднують зміст не лише методичних, а й предметних ліній всього шкільного курсу математики. Лінія практико-орієнтованого навчання поєднує зміст, який не можна назвати лише математичним. Це загальні відомості про можливі сфери використання геометрії, знання про сутність процесу встановлення відповідності між реальними й математичними об'єктами тощо. Математичним методом, що інтегрує цей зміст, очевидно, є метод математичного моделювання. До базового поняття лінії природно зарахувати поняття математичної моделі, адже воно виявляється у всіх засобах навчання практичного використання математики у школі. Математичне моделювання одночасно є спеціальним (частково-методичним) методом навчання і методом розв'язання задач на використання математики в школі.

Керуючись викладеною думкою, сформулюємо провідну ідею реалізації лінії практико-орієнтованих задач у геометрії та практико-орієнтованого навчання математики загалом. Зміст та методи навчання, що використовуються під час реалізації лінії практико-орієнтованого навчання, спрямовані на формування у школярів розуміння ролі математики у розв'язанні широкого кола проблем, що виникають у навчальній, науковій і професійній діяльності та повсякденному житті, а також можливості використовувати отримані знання поза межами навчального процесу.

Спираючись на провідну ідею і відомі загальнодидактичні принципи зв'язку навчання із життям, теорії з практикою, виділимо принципи конструювання лінії практико-орієнтованого навчання геометрії у школі.

1. Математизація знань.

2. Відповідність галузей практичного використання геометрії пізнавальним можливостям та інтересам учнів.

3. Доступність вивчення на шкільному рівні засобів математизації знань.

4. Достовірність змісту практичного використання геометрії.

5. Відкритість змісту лінії практико-орієнтованих задач.

Розкриємо, що ми розуміємо під кожним із цих принципів.

1. Принцип математизації знань

Цей принцип означає, що процес застосування математики для вивчення й перетворення реальних об'єктів є методологічною основою конструювання лінії практико-орієнтованого навчання геометрії. Нагадаємо, що процес проникнення методів математики до інших наук, упорядкування наукових знань за допомогою математики називають математизацією. Сутність математизації полягає в побудові математичних моделей процесів та явищ і розробці методів їх дослідження. До основної особливості процесу математизації ми відносимо необхідність виділення із загальної ситуації проблеми, яку можна розв'язати засобами математичних теорій. Далі треба побудувати її змістовну модель, а це безпосередньо прикладна задача.

Отже, у процесі пізнання дійсності математика грає дедалі більшу роль. Сьогодні немає такої галузі знань, де тією чи іншою мірою не використовувалися б математичні поняття та методи. Проблеми, розв'язання яких раніше вважалося неможливим, успішно долаються завдяки використанню математики, розширюються можливості наукового пізнання. Сучасна математика поєднує різні галузі знань у єдину систему. Цей процес відображено у змісті навчання та його цілях, спрямованих на оволодіння учнями способами вивчення й опису реальності за допомогою математики. Відповідно до цього, школярі повинні вміти виділяти математичні закономірності та розуміти можливість і необхідність використання математичних відомостей для вирішення ситуацій, що виникають у реальному світі. Урахування в навчанні математики сформульованого нами принципу математизації знань дасть змогу забезпечити цілісне сприйняття учнями ідей прикладної математики та сформує в них розуміння ролі математичних знань для розв'язання кола проблем.

Таким чином формується «математичний погляд» на навколишній світ. Водночас учень може не володіти широкими математичними знаннями, але він повинен розуміти, як у розв'язанні проблеми (побутової чи професійної), що стоїть перед ним, допоможе математика у властивих їй прийомах розумової діяльності (синтез, аналіз, аналогія тощо).

2. Принцип відповідності галузей практичного застосування геометрії пізнавальним можливостям та інтересам учнів

Другий принцип означає, що добір проводять серед наукових галузей знань, практичних сфер діяльності, побутових і цікавих ситуацій із реальним сюжетом з урахуванням вікових інтересів і пізнавальних можливостей школярів.

3. Принцип доступності вивчення засобів математизації знань на шкільному рівні

Такий принцип означає, що математичні поняття та методи, які використовуються для вивчення вибраних прикладних галузей, не повинні виходити за межі шкільного курсу математики. Його зміст можна розглядати як теоретичну основу задля практичного застосування. Наприклад, шкільна геометрія є теоретичною основою деяких розділів геодезії та астрономії. Такий підхід мотивує вивчення математики й підвищує її значущість для освоєння інших дисциплін, сприяє формуванню математичного сприйняття дійсності («математичний погляд» на навколишній світ).

4. Принцип достовірності змісту практичного застосування геометрії

Цей принцип означає необхідність достовірного відображення реальних об'єктів у сюжетах задач та прикладних ілюстрацій. Практична частина програми математики повинна демонструвати школярам дієвість математичних методів вивчення процесів і явищ навколишнього світу. Опис реальних об'єктів через їхню складність і багатоаспектність часто можна дати лише у спрощеному, «очищеному» вигляді. Однак неприпустимо вихолощування суті описуваної реальної ситуації та використання її лише з дидактичною метою. Це спотворює уявлення школярів про вивчення реальності з допомогою математики, робить їх недостатньо достовірними.

5. Принцип відкритості змісту лінії практико-орієнтованих задач

Принцип означає, що набори задач, дослідницькі та проєктні завдання, методичні розробки елективних курсів тощо, які забезпечують реалізацію лінії практико-орієнтованих задач, допускають можливість доповнення їх освітніми продуктами, створеними вчителем. У результаті методичної підготовки студентів до реалізації лінії практико-орієнтованих задач майбутні вчителі математики мають набути досвіду створення таких продуктів та їх використання у своїй майбутній професійній діяльності.

У результаті аналізу раніше проведених досліджень методики навчання математики виявлено, що в більшості з них виділяють етапи (ступені) навчання розв'язування задач прикладного характеру або етапи навчання елементів методу математичного моделювання.

Математичне моделювання є ідейною основою практико-орієнтованого навчання математики в школі. Його значення під час реалізації лінії практичних додатків математики у школі виявляється у: *виділенні етапів лінії; визначенні прикладних математичних умінь школярів; класифікації та виділенні рівнів складності завдань, пов'язаних із практичними додатками математики; створенні освітніх продуктів, призначених для реалізації лінії на уроці та в позаурочний час.*

Функції навчання математичного моделювання (освітня, контролю навчальної діяльності учнів, інтерпретаційна, реалізації міжпредметних зв'язків).

Методичні особливості навчання математичного моделювання у практико-орієнтованому навчанні школярів полягають у: використанні підготовчих вправ; супроводі теоретичного матеріалу прикладами практичного застосування; використанні пошукових домашніх завдань; реалізації бінарного підходу у виборі практичного застосування математики.

Виділимо низку особливостей методу математичного моделювання, які може використати вчитель під час навчання школярів практичного застосування математики.

1. Математика застосовується не до реального об'єкта, а до змістової моделі.

2. Один об'єкт може мати кілька математичних моделей. Створювана модель має відображати властивості реального об'єкта, які входять у проблему його дослідження. Для вивчення реального об'єкта можна використовувати математичні моделі різних типів. Для ви-

вчення різних об'єктів можна застосовувати одну модель (принцип множинності моделей).

3. Відповідність математичної моделі реальному об'єкту лише відносна і має рамки застосування (вимога адекватності моделі реальному об'єкту).

4. Якщо вибрані математичні засоби дають змогу провести дослідження реального об'єкта у прийнятні терміни й економні за витратами праці та коштів, то обрана модель є досить простою (вимога достатньої простоти).

5. Модель має давати можливість за допомогою математичних методів отримати необхідну інформацію про реальний об'єкт (властивість повноти математичної моделі).

6. Складний об'єкт, як правило, можна розчленувати на низку агрегатів (підсистем), для адекватного математичного опису яких придатні стандартні, добре вивчені математичні моделі (принцип агрегування).

7. Оцінка результатів дослідження математичної моделі відбувається за такими напрямами: верифікація (перевірка адекватності результату поставленого завдання); оцінка точності та єдиності отриманих результатів.

Передбачено чотири рівні складності практико-орієнтованих завдань: у задачі є пряма вказівка на математичну модель; об'єкти та відповідності задачі легко співвідносні з математичними об'єктами та відповідностями; об'єкти і задачі співвідносні з математичними об'єктами та відповідностями неоднозначно — потрібна реалізація певних умов; об'єкти та відповідності задачі явно не виділені або їх математичні еквіваленти невідомі школярам.

Спираючись на результати цих досліджень, виділено чотири етапи реалізації лінії практико-орієнтованого навчання геометрії у школі: пропедевтичний, підготовчий, основний та заключний, сформульовано конкретні завдання кожного етапу для досягнення спільних цілей реалізації лінії.

Часові рамки для реалізації етапів практико-орієнтованого навчання:

1. Пропедевтичний (основний ступінь, 5–6 класи).
2. Підготовчий (основний ступінь, 7 клас).
3. Основний (основний ступінь, 8–9 класи).
4. Заключний (старший ступінь, 10–11 класи).

Пропедевтичний (5–6 класи)

Спостереження і практика роботи багатьох методистів-математиків показали, що спроба створити єдиний курс математики для 5–6 класів не мала успіху, але й спроби розділити теж були невдалими. Це стосується як змісту самого геометричного матеріалу, так і стикування геометричного і числового матеріалу. По-перше, геометричного матеріалу мало, він в основному спрямований на пропедевтику майбутніх систематичних знань; по-друге, важко зрозуміти, що за ці два роки вивчено, сформовано, відпрацьовано хоча б на рівні уявлень, а це означає, що в наступних класах усе доведеться починати спочатку.

Основна проблема полягає в тому, що для цього віку має бути створений спеціальний геометричний матеріал, який відповідатиме високій активності й великим можливостям учнів 5–6 класів.

На цьому етапі в підручниках продовжують пояснювати, що таке пряма, площина, відрізки, ламана та їх довжини, різноманітний задачний матеріал є практико-орієнтованим. Наприклад, у підручнику математики за 5 клас пропонують розглянути задачу на ламану [12].

- *Мишко проїхав 3 км по дорозі AB на північ, потім 5 км по дорозі BC на схід, а потім ще 4 км по дорозі CD у північно-східному напрямку. Зобрази схему руху та знайди довжину маршруту.*

Цей підручник містить багато практичних задач.

В іншому підручнику можемо спостерігати розширені завдання, однак вони поодинокі й містяться наприкінці теми в розділі «Прояви компетентність» [14].

- *Михайлик вирішив намалювати власний план руху. Для цього він пройшов від свого будинку 100 м прямо, потім повернув ліворуч під прямим кутом і пройшов 30 м, а потім знову повернув ліворуч під прямим кутом і пройшов ще 100 м.*

1) Який план руху зможе намалювати Михайлик, якщо в зошиті 100 м зобразити як 10 см, а 30 м — як 3 см?

2) Скільки метрів пройшов Михайлик від свого будинку?

3) Що, на вашу думку, треба зробити Михайлику, щоб потрапити додому?

4) Продумайте й намалюйте власний план руху від будинку до школи.

У шостому класі також є вкраплення геометрії: повторюються поняття, міри кута, периметр, об'єм тощо. Наприклад, така задача [13]:

- *Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 80 см, 60 см і 40 см. Скільки дволітрових банок води потрібно залити в акваріум, щоб поверхня води була на відстані 20 см від дна? Скільки розв'язків має задача?*

Під час розгляду цих етапів шкільного курсу геометрії не було спеціально досліджено пропедевтичний етап (тимчасовий відрізок, що відповідає 5–6 класам основного ступеня загальної освіти), оскільки тут досить добре відображена робота з учнями з формування інтуїтивних уявлень про модель, математичну модель, процес моделювання. Однак дуже важливо зрозуміти, що не можна з першого по шостий клас вивчати з геометрії «щось і якось». Необхідно побудувати чітко сплановану, продуктивну й цікаву роботу із засвоєння геометричних знань, яка до 11 класу покаже свій результат.

Учні набувають найпростіших навичок роботи з моделями на прикладі розв'язання текстових завдань та зіставлення реальних об'єктів із їх математичними прообразами. Будемо вважати, що пропедевтичний етап практико-орієнтованого навчання геометрії проходить на інтуїтивному рівні.

Підготовчий (7 клас)

До сьомого класу школярі розширюють свої знання про світ. Кількість досліджуваних ними навчальних предметів збільшується: математика поділяється на дві дисципліни (алгебра і геометрія), починається вивчення фізики, продовжується вивчення біології та географії. Отже, з'являється можливість використовувати змістовні приклади застосування геометрії до природознавства.

До цього віку в учнів накопичено певний практичний досвід у повсякденному житті.

З погляду вікової психології, у віці 12–13 років активно формується продуктивна уява, а також довільна увага, також починає переважати словесно-логічне, абстрактне мислення. Ці особливості особистості школярів дають змогу здійснити підготовчий етап реалізації лінії практико-орієнтованого навчання.

На підготовчому етапі ми ставимо такі окремі освітні завдання:

- створити мотивацію вивчення геометрії у взаємозв'язку з її практичним застосуванням до дослідження навколишнього світу;
- запровадити поняття математичної моделі на геометричному матеріалі;
- сформувати уявлення про етапи методу математичного моделювання під час розв'язання задач, пов'язаних із застосуванням геометрії;
- націлити учнів на виявлення можливостей застосування математичного апарату до природничого блоку шкільних дисциплін.

На цьому етапі передбачається розвинути поняття математичної моделі, на інтуїтивному рівні сформоване у школярів на пропедевтичному етапі.

На перших уроках геометрії в 7 класі про основні властивості вимірювання кутів є можливість показати застосування методу математичного моделювання за чотирма етапами. Наприклад, під час розв'язання такого завдання:

- *Спостерігаючи на пристані за кораблем, що відпливає, можна помітити, що з віддаленням від берега його видимий розмір зменшується. Як пояснити це явище?*

Наведемо приклад розв'язання задачі відповідно до виділених етапів, який учні реалізують разом із учителем.

Пропонуємо етап математизації проводити за таким планом:

1. Математизація. З'ясування сенсу нематематичних понять, що входять до умови завдання.

2. Виділення реальних об'єктів, значимих для розв'язання завдання. Установлення зв'язків між цими об'єктами.

3. Добір математичних інтерпретацій, адекватних виділеним реальним об'єктам.

1. Математизація. З'ясування сенсу нематематичних понять, які входять до умови задачі

Почнемо з пояснення, що означають слова «видимий розмір». В іншому разі не зрозуміло, яке явище треба пояснити. Ми добре знайомі з лінійними розмірами предметів. Скільки їх? Як їх зазвичай називають?

(*Відповідь*: три розміри — довжина, ширина та висота.)

Під час опису якостей математичних об'єктів трапляється поняття видимого розміру. Часто воно використовується у спрощеному вигляді. Ми говоримо, наприклад: «З точки A відрізок a видно під кутом» Такий кут називають видимим чи кутовим розміром предмета?

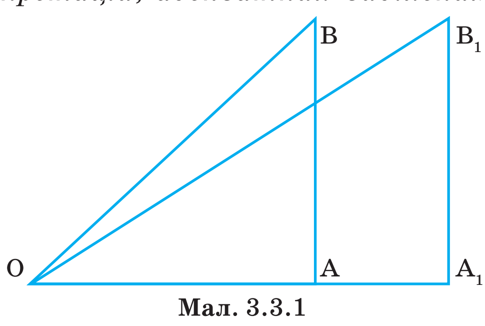
Поняття кутового розміру дуже важливе в астрономії. Знання кутового розміру (астрономи говорять кутового діаметра чи видимого діаметра) небесного тіла дає змогу обчислити його лінійні розміри. Кутових розмірів у предмета може бути нескінченно багато, оскільки є незліченна кількість точок спостереження — вершин кутів зору, під якими видно предмет. Інакше висловлюючись, кутовий розмір предмета залежить від обраної точки спостереження. Для вирішення практичних завдань вибирають «зручний» кут зору, наприклад той, під яким видно висоту предмета, що розглядається.

2. Виділення реальних об'єктів, значимих для розв'язання задачі. Установлення зв'язків між цими об'єктами

Тепер виділимо об'єкти умови задачі: спостерігач, корабель, відстань від берега до корабля. Вони пов'язані між собою. Є ще об'єкти (берег, пристань), які не впливають на розв'язання задачі. Але на початковому малюнку ми їх зобразимо. (Можна запропонувати школярам готовий малюнок до умови).

3. Добір математичних інтерпретацій, адекватних виділеним реальним об'єктам

За цим малюнком зробимо креслення, добираючи необхідні об'єкти та встановлюючи до них відповідні геометричні еквіваленти. Зобразимо на одному кресленні два положення корабля за різного віддалення від берега (мал. 3.3.1).



Мал. 3.3.1

Точкою O позначимо спостерігача (точніше його очі), відрізки AB та A_1B_1 — корабель (або його висота над поверхнею води), відрізки OA та OA_1 ($OA < OA_1$) — відстань від спостерігача до корабля.

У цьому прикладі етап математизації описано досить детально. Його викладення може бути скорочено з урахуванням рівня математичної підготовки школярів, їх інтересів, життєвого досвіду та наявності навчального часу. Однак план реалізації цього етапу необхідно довести до учнів.

1 етап. Формалізація. Побудоване креслення і є геометричною моделлю умови завдання. Проте бракує запитання завдання. Сформулюємо його так: «Промінь OB_1 проходить між сторонами кута AOB. Який кут більший: AOB чи A_1OB_1? Чому?».

2 етап. Внутрішньомодельне розв'язання. Оскільки на малюнку промінь OB_1 проходить між сторонами кута AOB і перетинає відрізок AB з кінцями на його сторонах, то за властивістю вимірювання кутів (градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами) $AOB > A_1OB_1$.

3 етап. Інтерпретація. Оскільки кут, під яким видно корабель, зі збільшенням відстані зменшується, то і його видимі розміри зменшуються.

На прикладі розв'язання цього завдання вчитель має змогу продемонструвати всі чотири етапи методу математичного моделювання.

Спеціальну увагу тут приділено навчанню етапу математизації, його виконання є найскладнішим. Зміст цього етапу націлює учнів на застосування математики у взаємозв'язку з фізикою.

Під час розв'язання низки завдань на застосування математики в школі ситуація, описана в умові, практично не потребує математизації. Проведення нульового етапу не потрібне.

Отже, на підготовчому етапі вчителю необхідно ввести поняття «математична модель» та «метод математичного моделювання» на геометричному й алгебраїчному матеріалі. Такий підхід сприяє формуванню у школярів найбільш повних уявлень про ці центральні для аналізованої лінії поняття. Наведені приклади демонструють можливість виконання завдань першого, підготовчого етапу реалізації лінії практико-орієнтованого навчання геометрії в школі.

Основний етап (8–9 класи)

Змістом цього етапу є накопичення знань про практичні застосування геометрії та набуття учнями досвіду застосування методу математичного моделювання щодо розв'язання задач.

На основному етапі вирішуються такі часткові освітні цілі, що розвивають завдання попереднього етапу:

- підтримувати мотивацію вивчення геометрії у взаємозв'язку з її практичними додатками до навколишнього світу;

- розширити уявлення про етапи методу математичного моделювання під час вирішення завдань, пов'язаних із додатками геометрії (виділяти етапи розв'язання задачі на додатки, будувати математичну модель за змістовною моделлю відповідно до заданої мети, вибирати раціональний метод розв'язання задачі, інтерпретувати отриманий результат);
- формувати вміння виділяти математичний апарат, що використовується під час опису реальних об'єктів у навчальній та науково-популярній літературі. (Тут ідеться про процес взаємодії особистості з математичним знанням. Навчити всіх «рецептів» розв'язання задач неможливо. Необхідно формувати в учнів здатність розуміти сенс поставленого перед ним завдання, а потім навчати пошуку математичних методів (або будь-яких інших) відповідно до порушеної проблеми).

На цьому етапі продовжується навчання школярів побудови математичних моделей, відповідних запропонованій у задачі ситуації.

Школярам для розв'язання пропонуються задачі на додатки, математична модель яких може бути обрана кількома способами або з різним ступенем точності, тощо.

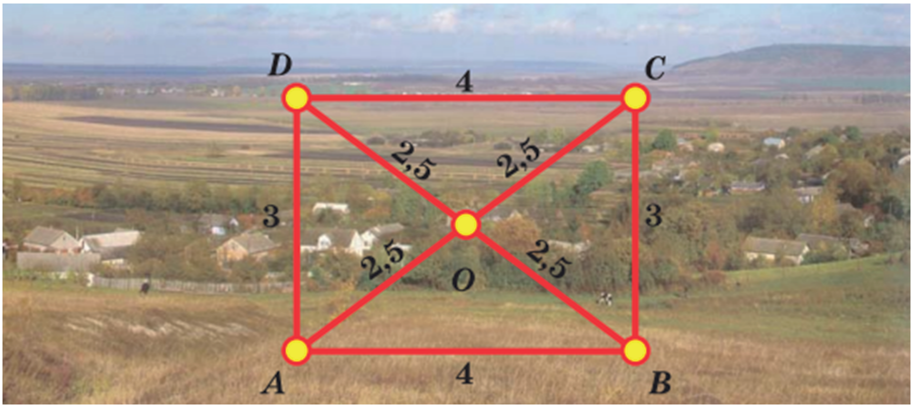
У чинних підручниках є небагато практико-орієнтованих задач. Наприклад, у підручнику [1] вони є після кожного параграфа під назвою «Прояви компетентність», це дуже зручно. Ось одна із таких задач у формі відкритого запитання:

- *Потрібно виготовити чотирикутну рамку для повітряного змія. Взяли чотири планки й закріпили їхні кінці. З'ясувалося, що виготовлена рамка нежорстка — змінюється її форма. Як можна укріпити рамку?*

Розглядаючи певний приклад (або серію прикладів), учні переконуються, що математична модель — це наближений опис будь-якого класу об'єктів реального світу мовою математики, водночас один об'єкт може мати більше однієї моделі. Геометрична модель описує геометричні властивості об'єкта відповідно до заданої мети.

Можемо розглянути запропоновану в підручнику задачу, яка цілком відповідає всім етапам математичного моделювання, а також є справді практико-орієнтованою [1]:

- *Чотири населені пункти розташовані у вершинах чотирикутника (мал. 3.3.2) і попарно з'єднані дорогами (відповідні відстані вказано на малюнку). На цій місцевості планують побудувати завод, де зможуть працювати мешканці кожного із цих населених пунктів. На роботу та з роботи працівників возитиме заводський автобус.*



Мал. 3.3.2

1) *Чому дорівнює сума відстаней від заводу до заданих пунктів, якщо завод побудують в одному із цих населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?*

2) *Чому дорівнює сума відстаней від заводу до заданих пунктів, якщо завод побудують посередині між двома із цих чотирьох населених пунктів? Чи може ця відстань бути найменшою?*

3) *У якому місці потрібно побудувати завод, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох заданих пунктів була найменшою?*

4) *Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса перед початком робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті забирає робітників на одній зупинці та привозить усіх разом на завод.*

5) *Розробіть найкоротший маршрут заводського автобуса після робочого дня, якщо він вирушає з території заводу, у кожному населеному пункті висаджує робітників на одній зупинці, але не повертається на завод.*

Основна методична лінія курсу геометрії — взаємопов'язане вивчення властивостей плоских і просторових фігур. Плоскі фігури та їх властивості найчастіше вивчаються не самі по собі, а як частини просторових геометричних фігур. Отже, необхідний комплексний підхід до вивчення цих властивостей, продиктований єдиною підставою — взаємним розташуванням об'єктів у навколишньому світі (з позицій геометрії).

Особливо багато таких проблем виникає під час вивчення геометричних перетворень.

Розглянемо поворот фігури навколо цієї точки на певний кут.

Під час вивчення цього виду геометричних перетворень ми виходимо з такого визначення.

- *Поворотом фігури F навколо точки на кут α називається таке перетворення даної фігури, при якому:*

1) *точка O залишається на місці;*

2) *будь-яка точка X фігури F перетворюється на таку точку* X_x *Фігури F', що* $OX_x = OX$ *завжди дорівнює a;*

3) $OX = OX_x$.

Можна довести, що поворот фігури навколо точки O на кут є ізометрією.

Але під час вивчення властивостей повороту виникає питання, що у шкільній геометрії практично не ставилося: ми розглянули поворот на площині. А чи можна поворот фігури навколо точки здійснювати у просторі?

Часто як приклад повороту фігур навколо точки наводять поворот стрілок годинника. Однак стрілка не повинна мати товщини (а так не буває) і центром повороту має бути точка, а годинник має вісь обертання, на якій кріпляться стрілки. Отже, на практиці широко використовується не поворот фігур на площині, а обертання фігури навколо осі на певний кут, і справді ми бачимо безліч прикладів обертань фігур навколо цієї осі.

Земля обертається навколо Сонця приблизно по круговій орбіті. Цей процес міг би бути витлумачений як поворот навколо точки, але тоді і Сонце, і Землю слід вважати точками.

Насамперед Земля, обертаючись навколо Сонця, сама обертається навколо осі. Поки Земля здійснює оберт навколо Сонця, вона 365 разів встигає обернутися навколо своєї осі.

Усі ми беремо участь відразу у двох рухах: за 24 год обертаємося навколо земної осі й за 365 діб обертаємося навколо Сонця. Сонце, виявляється, теж має вісь обертання й обертається довкола неї. Але ці приклади з далеких світів. Наочний земний приклад — рух лопатей млина навколо своєї осі.

Подивимося, що відбувається безпосередньо довкола нас. Ви відчиняєте двері в клас — це обертання дверей (прямокутного паралелепіпеда) навколо осі — прямої, на якій розташовані петлі. Ви пішли набрати води з колодязя й витягуєте наповнене відро, обертаючи комір-циліндр.

Безліч прикладів обертання є в техніці: обертання пропелера літака, обертання валу турбіни, деталі верстата і т.д.

Наведені приклади досить переконливо свідчать про важливість обертання фігури навколо осі.

У 8–9 класах спеціальну увагу учнів звертають на особливості роботи з моделлю на кожному етапі. Із цією метою добирають приклади завдань, що мають кілька внутрішньомодельних рішень. Тут залежно від вимог умови слід провести роботу щодо вибору раціонального рішення. Для ілюстрації особливостей такої роботи добирають завдання, у яких інтерпретація відповіді нетривіальна — учням необхідно вибрати потрібне число, форму, уявлення тощо. Також на цьому етапі вчитель звертає увагу дітей на те, що одна математична модель може бути використана для інтерпретації різних за своєю природою об'єктів.

Позакласна робота

Позакласна робота — одна з форм організації математичної підготовки школярів. У теорії та методиці навчання математики виділяють два види позакласної роботи: робота з відстаючими учнями; робота з учнями, які виявляють підвищений інтерес до вивчення математики. Робота з відстаючими учнями полягає не тільки в повторному проходженні незасвоєного програмного матеріалу. Більшість таких школярів мають низьку мотивацію до навчання в цілому та відсутність інтересу до математики зокрема. Без усунення первинних причин неуспішності такі додаткові заняття будуть малоефективними. Тому позитивним результатом позакласної роботи із цією групою школярів вважається не лише ситуативна ліквідація прогалин в освоєнні навчальної дисципліни, а й досягнення стійких успіхів у пізнавальній діяльності на уроці. Цьому і сприяють практико-орієнтовані задачі.

Позакласна робота, орієнтована на учнів, які виявляють підвищений інтерес до вивчення математики, є природним продовженням та доповненням урочної форми математичної підготовки і спрямована на розширення й поглиблення знань.

Розкриємо докладніше окремі форми позакласної роботи, у межах яких можна продовжити практико-орієнтоване навчання геометрії, розпочате під час уроків: елективні курси, курси на вибір, навчальні дослідження, проєктна діяльність учнів [13]. Дотримуючись цього документа, основна функція курсів за вибором, що проводяться на основному ступені загальної освіти, — профорієнтаційна. Зміст таких курсів спрямовано на допомогу школяреві у визначенні своїх нахилів і виборі подальшого профілю навчання. Тому для охоплення більшого спектру профілів вони, як правило, мають короткостроковий характер і чергуються з навчальними модулями.

Наприклад, для орієнтації на природничо-математичний профіль можна організувати для дев'ятикласників курс за вибором прикладної спрямованості «Бесіди про кут зору», що пов'язаний із вивченням планіметрії та складається з таких модулів-розмов: 1. Що ми бачимо? Поле зору та його межі. 2. Як побачити власний ніс? 3. Що таке кут зору? 4. Геометрія допомагає перевірити гостроту зору. 5. Під одним кутом зору. 6. Що таке паралакс? 7. Геометрія викриває обмани зору. 8. Навіщо фотографу геометрія? Питання, що розглядаються в цьому курсі, не вимагають підвищеної математичної підготовки й доступні більшості школярів. Учням знадобляться деякі відомості з біології та фізики, які на той час уже засвоєні з відповідних шкільних дисциплін. Одна із цілей такої позакласної роботи полягає в тому, щоб показати застосування знань, отриманих під час уроків геометрії за програмою базового курсу, до дослідження та пояснення деяких механізмів зору.

Існують різноманітні форми позакласної роботи з математики: гуртки, факультативи, турніри, естафети, конкурси, олімпіади, екскурсії, тематичні тижні, КВК, позакласне читання науково-популярної літератури з математики, вечори, преса (класна і шкільна газети, бюлетені, стенди, стінгазети тощо), шкільні наукові конференції, інтелектуальні ігри, виготовлення математичних моделей тощо. Зазначені форми роботи, особливо їх елементи, часто переплітаються, між ними складно провести чітку межу.

Значні можливості для формування здатності учнів до математичного моделювання вбачаємо в умовах позакласної роботи. Математичне моделювання широко використовується для розв'язування задач різних галузей науки, економіки, виробництва. Практичні вміння й навички з математики необхідні, зокрема, для майбутньої професійної діяльності випускників школи. Формування здатності учнів до математичного моделювання має бути одним із першочергових завдань, які ставить перед собою вчителі математики. Однак досягти бажаного результату повною мірою неможливо використовуючи лише уроки. Однією з найбільш ефективних форм позакласної роботи, у цьому контексті, ми вважаємо гурткову роботу з учнями.

Метою роботи математичного гуртка є пробудження творчого потенціалу школярів, розвиток здібностей до плідної розумової діяльності. Основне завдання вчителя — за допомогою раціонально й ретельно дібраних завдань розкрити значення математики, силу її ідей і методів, забезпечити умови розвитку прийомів мислення, формувати інтерес і здатність учнів до математичного моделювання. Щоб діти добре засвоювали нові знання і не втрачали інтересу до гурткової роботи, кожній темі доцільно присвячувати 2–3 заняття, використовувати завдання ігрового і практичного характеру, різні прийоми активізації діяльності учнів. Нарівні з традиційними слід використовувати й активні та інтерактивні прийоми: мозковий штурм, математичний бій, карусель, марафон та ін. На нашу думку, варто практикувати домашні завдання за тематикою гурткової роботи. Серед завдань мають бути як прості, аналогічні тим, що розглядалися на занятті, так і більш складні, які вимагають певних зусиль, наполегливості або навіть дотепності. Такі завдання допоможуть не дуже сильним, але старанним учням досягти успіхів і порадіти здобутим результатам, а з іншого боку, зрозуміти, що не все так просто. Кожне завдання, запропоноване для виконання вдома, обов'язково треба розібрати на наступному засіданні гуртка й обговорити всі способи розв'язання, знайдені учнями.

У разі методично грамотної роботи вчителя математичні гуртки стимулюють інтерес до предмета, сприяють розширенню світогляду, розвитку творчих здібностей, прищепленню навичок самостійної роботи і тим самим — підвищенню якості математичної підготовки учнів.

3.4. Розвиток просторового мислення учнів під час навчання геометрії

(*В. Волошена*)

Довгі роки геометрія як навчальний предмет у школі будувалася на дедуктивній (аксіоматичній) основі та вимагала добре розвиненого теоретичного (понятійного) мислення.

Разом із тим основною метою вивчення геометрії визнавався й розвиток просторової уяви учнів. Але наочні (інтуїтивні) уявлення про просторові властивості та взаємозв'язки були в аксіоматичній геометрії лише своєрідною ілюстрацією її теоретичних постулатів (аксіом, визначень, теорем, понять) і виконували в цьому сенсі допоміжну роль.

Така побудова змісту математичної освіти відповідала закономірностям математики як науки, але не відповідала природі дитячого мислення, яке цілісно, багатовимірно, креативно спирається на образне сприйняття предметного світу, організованого певним чином у просторі (видимому чи уявному).

У курсі шкільної геометрії просторове мислення (як і всяке мислення, воно існує в поняттях), яке має виконувати не допоміжну (ілюстративну), а основну функцію, що реалізує можливість людини орієнтуватися в навколишньому просторі (у якому, до речі, немає жодного плоского об'єкта), вивчається у планіметрії.

Основним для геометрії має бути поняття «простір» (похідною для нього — «площина»), воно як і поняття «точка», визначається в математиці аксіоматично (у шкільних підручниках не визначається взагалі). У дитини ці поняття формуються інтуїтивно й дуже рано в її суб'єктному досвіді. Водночас важливо розрізняти два терміни: «реальний» та «геометричний» простір.

Термін «геометричний простір» виник як своєрідна абстракція, що фіксує положення об'єктів, позбавлених третього виміру, розташованих строго певним способом на площині.

З психологічного погляду до поняття «простір» входять три складові частини:

1) розуміння сукупності об'єктів (предметів, чисел, знаків, геометричних фігур);

2) розрізнення цієї сукупності за просторовою належністю, тобто відношення один до одного (зовнішній та внутрішній простір, замкнутість, розірваність, лінійність, кривизна тощо);

3) перерозподіл цієї сукупності залежно від вибраної точки відліку.

Однак слід наголосити, що цілеспрямовано та системно у традиційних курсах шкільної геометрії складові частини просторового мислення не формуються. Багато уваги приділяють ознайомленню з окремими геометричними фігурами, їх властивостями та відношеннями, переважно метричними. Проєктивні уявлення як об'єкт аналізу використовуються лише у разі переходу від планіметрії до стереометрії, а також у курсі креслення (становище цього предмета у школі всім добре відомо). Щодо базових топологічних уявлень, то вони взагалі не виділяються та цілеспрямовано не формуються у відповідних поняттях. Занадто багато часу, на наш погляд, надається виміру та побудові геометричних фігур (причому в їхньому стандартному положенні); зникає у практиці навчання геометрії такий важливий методичний прийом, як стимулювання дітей працювати «в уяві».

Сьогодні удосконалюються навчальні програми з геометрії, які за всього різноманіття освітніх цілей вирішують три основні завдання:

- подолання чинного розриву між вивченням плоских і просторових фігур;
- створення в учнів гнучких, багатовимірних просторових образів, що охоплюють топологічні, проєктивні, метричні властивості та відношення об'єктів, що досліджуються;
- поєднання інваріантного й варіативного навчального матеріалу, що дає змогу враховувати пізнавальний профіль учня, його індивідуальну вибірковість до виду та форми пропонованих завдань і вправ.

Розроблено курси геометрії з опорою на архітектуру, живопис, художню та комп'ютерну графіку. Намітилася чітка тенденція до раннього введення геометрії в школи, починаючи з п'ятого класу. Є спроби введення їх у початкові класи.

Усе це вимагає подальшого вдосконалення методу викладання геометрії як навчальної дисципліни, посилення її розвивальної ролі. Актуальним є завдання розвитку просторового мислення учнів як важливої складової сучасної математичної освіти.

Освітня практика свідчить про те, що недостатній розвиток просторового мислення перешкоджає ефективному засвоєнню геометрії, особливо у старших класах (при переході до стереометрії); істотно ускладнює оволодіння графічними дисциплінами у вузі.

Сучасна методика навчання математики повинна спиратися на аналіз і проєктування тих видів навчальної діяльності, які забезпечують оволодіння її науковим змістом. Серед цих видів діяльності виділимо два основні:

- створення просторових (геометричних) образів;
- оперування вихідними образами у процесі розв'язання різних геометричних завдань.

Як зазначалося, створення геометричних образів (за сприйняттям чи уявленням) і навіть активне їх перетворення у процесі оволодіння поняттями (під час розв'язання завдань) становить основний зміст просторового мислення. Але саме собою виділення зазначених двох видів діяльності (їх позначення) мало про що каже вчителю. Він повинен знати, як кожен вид діяльності організувати, що потрібно зробити, щоб його побудувати, яким конкретним діям (прийомам, правилам) повинен навчити, за якими критеріями судити про їх сформовані навички. Усе це передбачає систему завдань і вправ, тобто розробку особливого дидактичного матеріалу.

Відтворимо коротку схему побудови системи завдань зі створення геометричних образів і оперування ними під час засвоєння програмного матеріалу.

1. Завдання на створення образу. У геометрії створення образу становить основу креслення (площинного чи об'ємного). Саме креслення — найпоширеніший і найчастіше застосовуваний компонент розв'язання різноманітних завдань на доведення, побудову, вимірювання, обчислення. Використовуються, звичайно, й інші види наочності: таблиці, схеми, картонні моделі геометричних тіл, їх дротяні каркаси тощо.

Під умінням працювати з геометричним кресленням розумітимемо види розумової діяльності учня, які допомагають йому усвідомити креслення відповідно до умов завдання, подумки його перетворити, перебудувати і на цій основі відкрити собі нові властивості фігур і відношень між ними.

Пропонуючи такі завдання, учитель може детальніше проаналізувати, у чому саме учень має труднощі під час читання креслень. Адже зазвичай, розглядаючи креслення, він здійснює розумові дії, приховані від зовнішнього спостереження. Пропонуючи учневі виконати ту чи іншу розумову дію, учитель може у разі потреби його коригувати.

Такі завдання мають не лише навчальну, а й діагностичну функцію. Проведені дослідження свідчать, що сприйняття того самого геометричного креслення відбувається в кожного учня індивідуально. Існують різні стратегії розглядання креслення (послідовність виділення необхідних елементів, їх перегрупування, доповнення тощо).

Розуміння вчителем індивідуальних стратегій читання креслень є важливим для забезпечення особистісно-орієнтованого навчання.

2. Завдання на оперування образом. У геометрії дуже багато завдань на перетворення вихідного образу креслення. Вони засновані на тому, що образ, створений за готовим кресленням, необхідно трансформувати в інший, який часто суттєво відрізняється від вихідного.

Розглянемо приклад.

- *Уявімо, що заданий ΔABC повернутий навколо точки так, що одержали новий трикутник, сторони якого є продовженням його сторін. Яку фігуру отримали?*

Виконання цього завдання пов'язане з уявною зміною вихідного трикутника та отриманням нового геометричного образу, відмінного від вихідного.

Слід наголосити, що виконання таких завдань здійснюється, як правило, «методом уяви»: учень дивиться на трикутник, заданий на кресленні, але повинен подумки від нього відволіктися, простежити за його перетвореннями і потім втілити новий образ відповідно до заданих умов. Перетворення може виявитися складним, якщо трикутник на кресленні буде задано в нестандартному положенні.

Щоб розвивати можливості учнів оперувати геометричними образами, учителю необхідно розробити дидактичні картки, у яких (на різному програмному матеріалі) було б представлено основні математичні операції перетворення двох- і тривимірних фігур. Склад цих операцій задається в підручнику і має такий вигляд:

- паралельне перенесення на площині, у просторі;
- поворот, його різноманітні види;
- центральна та осьова симетрія;
- симетрія щодо площини;
- гомотетія (подібність);
- паралельне проєктування;
- ортогональне проєктування.

Пропонуючи завдання на те чи інше перетворення, можна, по-перше, виявити, яку саме математичну операцію школяр виконує успішно (або, навпаки, не може), і, по-друге, визначити композицію перетворень, доступну тому чи іншому учневі. Така своєрідна «діагностика» дозволить учителю забезпечувати адресну педагогічну підтримку, виходячи зі знання індивідуальних можливостей кожної дитини у створенні геометричного образу, оперування ним.

Розробка системи завдань на тренування різних сторін просторового мислення школярів є, на наш погляд, перспективним і дуже важливим завданням методики навчання геометрії, яка повинна не тільки забезпечувати засвоєння змісту знань, визначених освітніми стандартами, а й враховувати особистісні можливості (переваги) кожного учня в роботі із цим змістом.

Такі завдання мають забезпечувати:

- ознайомлення учнів з основними принципами організації геометричного простору;
- усвідомлення ними відмінностей між реальним (видимим або уявним) і геометричним (концептуальним) простором;

- формування узагальнених образів, що поєднують у собі топологічні, проєктивні, метричні властивості та відносини;
- активізацію у школярів різноманітних способів створення геометричних образів, оперування ними в ході виконання різних операцій перетворення, що приводять до «зміни» образу фігури за становищем, структурою, композицією перетворень;
- оволодіння основними логічними операціями, що забезпечують класифікацію геометричних фігур, на основі аналізу, узагальнення, порівняння за різними ознаками з опорою на понятійні знання;
- виявлення індивідуальних особливостей в опрацюванні навчального матеріалу з урахуванням стійкої вибірковості учня до типу, виду, форми запропонованого завдання.

Відповідно до цього зробимо висновок — викладання геометрії у школі має охоплювати три тісно пов’язані, але водночас і протилежні елементи: логіку, уяву та застосування до реальних об’єктів.

Література до розділу 3

1. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія: підр. для 8 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ, Вид-в «Оріон», 2021. 194 с.
URL: http://eprints.cdu.edu.ua/4482/1/8_kl_geometry_2021.pdf

2. Волошена, В. Практико орієнтоване навчання геометрії в гімназії відповідно до етапів вивчення математичних понять. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. 2023. Вип. 31. С. 38–48.
URL: https://ipvid.org.ua/index.php/psp/article/view/688/792

3. Волошена В. (2021). Дидактичні вимоги до компетентнісно-орієнтованих задач в процесі навчання математики. *Проблеми сучасного підручника* : збірник наукових праць. 2021. Вип. 27. С. 36–45.
URL: https://doi.org/10.32405/2411-1309-2021-27-36-45

4. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Харків: Вид-во «Ранок», 2011, 320 с.
URL: https://www.slideshare.net/VovaLozik/ss-54464962

5. Бевз Г. П. та ін. Математика : підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2022. 256 с.
URL: https://lib.imzo.gov.ua/yelektronn-vers-pdruchnikv/5-klas-nush/matematichna-osvtnya-galuz/matematika/matematika-pdruchnik-dlya-5-klasu-zakladv-zagalno-seredno-osvti-avt-bevz-g-p-bevz-v-g-vasilva-d-v-vladmrova-n-g_1/

6. Мазорчук М. та ін. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018. Київ: Український центр оцінювання якості освіти, 2019. 439 с.
URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/PISA_2018_Report_UKR.pdf

7. Скворцова С., Недялкова К. Математика : підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти. У 2-х частинах. Ч. 1. Харків: Видавництво «Ранок», 2023. 233 с.
URL: https://pidruchnyk.com.ua/2587-matematyka-6-klas-skvortsova.html

8. Тарасенкова Н. А. та ін. Математика : підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон», 2022. 304 с.
URL: https://pidruchnyk.com.ua/1639-mat-5-tarasenkova-2022.html

9. Balakrishnan G. et al. Mathematical modelling in the Singapore secondary school mathematics curriculum. *In Mathematical Applications And Modelling*. Association of Mathematics Educators, 2010. Pp. 247—257.
URL: https://www.researchgate.net/publication/257762340_Kaur_B_Dindyal_J_Eds_2010_Mathematical_applications_

10. Blum W., Schukajlow S. Teaching Methods for Modeling Problems and Student's Task-specific Enjoyment, Value, Interest and Self-Effica-

cy Expectations. *Educational Studies in Mathematics*. 2012. № 79 (2). Pp. 215–237.

URL: https://www.researchgate.net/publication/225720419_Teaching_methods_for_modelling_problems_and_students'_task-specific_enjoyment_value_interest_and_self-efficacy_expectations

11. Conference of Ministers of Education in Germany. Educational standards of the Standing Conference.

URL: https://www.kmk.org/themen/allgemeinbildende-schulen/unterrichtsfaecher/mathematik-informatik-naturwissenschaften-technik-mint.html

12. Common Core State Standards Initiative: USA Standards for Mathematical Practice «Geometry».

URL: https://learning.ccsso.org/wp-content/uploads/2022/11/ADA-Compliant-Math-Standards.pdf

13. Ministry of Education Singapore. Mathematics Syllabus forsecondary school.

URL: https://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences

14. Rellensmann J. et al. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. *ZDM Mathematics Education*. 2020. Vol. 52. P. 97–110.

URL: https://www.researchgate.net/publication/335522138_Measuring_and_investigating_strategic_knowledge_about_drawing_to_solve_geometry_modelling_problems

15. Seto C. et al. Mathematical Modelling for Singapore Primary Classrooms: From a Teacher's Lens. Mathematics education : Expanding horizons: Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide : Mathematics Education Research Group of Australasia., 2012. Jul 2-6. P. 672–679.

URL: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED573384.pdf

16. Zbiek R. M., Conner A. Beyond Motivation : Exploring Mathematical Modeling as A Context for Deepening Students' Understandings of Curricular Mathematics. Educ Stud Math. 2006, Vol. 63. P. 89–112.

URL: https://www.jstor.org/stable/25472112

Розділ 4. Методика практико-орієнтованого навчання алгебри

Одним із найважливіших завдань шкільної алгебраїчної освіти є розкриття її прикладних можливостей. Вивчення алгебри слід організувати так, щоб воно було корисним і цікавим. А це можливо шляхом розкриття ролі алгебри в пізнанні навколишнього світу через інтеграцію з іншими шкільними предметами та формування цілісного світогляду учнів.

Практико-орієнтоване навчання алгебри — це підхід, за якого особливу увагу у процесі навчання приділено застосуванню алгебраїчних знань і вмінь у реальних життєвих ситуаціях. Провідна мета цього підходу — набуття учнями конкретних навичок і вмінь математичного характеру, освоєння певних видів діяльності, насамперед математичного моделювання.

Практико-орієнтований підхід важливий для мотивації сучасних учнів та сприяє їх ознайомленню з роботою підприємств і різних галузей господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів щодо здобуття певних професій. Цей підхід також є корисним для дітей, які мають складнощі в розумінні абстрактних понять.

Основною метою практико-орієнтованого навчання алгебри є розвиток практичних навичок розв'язування алгебраїчних задач, у яких ідеться про реальні життєві ситуації або про застосування їх до інших галузей: фінанси, економіка, наука, технології тощо.

Основні принципи практико-орієнтованого навчання алгебри:

— включення у зміст навчання шкільного курсу алгебри тем, що посилюють його прикладну спрямованість;

— формулювання реальних життєвих ситуацій перед введенням алгебраїчних понять;

— використання реальних прикладів і ситуацій із життя під час розв'язування абстрактних задач;

— розв'язування прикладних задач, обговорення й дослідження різних практичних ситуацій засобами алгебри;

— посилення міжпредметних зв'язків алгебри з іншими предметами.

Окремо розглянемо реалізацію кожного з них.

4.1. Включення в зміст навчання 7–9 класів тем, що посилюють прикладну спрямованість шкільного курсу алгебри

(*Д. Васильєва*)

Посиленню прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри 7–9 класів сприяє наявність таких тем:

- Моделювання.
- Наближені обчислення.
- Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів.
- Читання і побудова графіків рівномірного руху.
- Лінійні рівняння як математичні моделі прикладних задач.
- Раціональні рівняння як математичні моделі прикладних задач.
- Квадратні рівняння та рівняння, які зводяться до квадратних, як математичні моделі прикладних задач.
- Нерівності з однією змінною як математичні моделі прикладних задач.
- Системи лінійних рівнянь як математичні моделі прикладних задач.
- Система двох рівнянь із двома змінними як математична модель прикладної задачі.
- Стандартний вигляд числа.
- Системи і сукупності лінійних нерівностей з однією змінною як математичні моделі прикладних задач.
- Множини. Задачі на переріз і об'єднання множин.
- Арифметична та геометрична прогресії.
- Побудова і прочитання різних видів діаграм.
- Опитування та систематизація даних у таблиці. Частотна таблиця. Знаходження середнього арифметичного за частотною таблицею.
- Вибірка. Розмах, середнє арифметичне, мода та медіана вибірки.
- Комбінаторні задачі.
- Ймовірність неможливої, достовірної та випадкової події.
- Прості і складені відсотки.

Кожна із цих тем тісно пов'язана з практичним застосуванням алгебри. Розглянемо детальніше елементи вивчення цих тем, що допоможуть показати учням тісний зв'язок алгебри із життям.

Моделювання. Оскільки багато математичних понять є моделями текстових задач, то важливо виділити у 7 класі окремий час для вивчення теми «Моделювання», у якій би розглядалися поняття «абстрактна задача», «прикладна задача», «математична модель», «математичне моделювання». У цій темі бажано показати учням різні види моделей (рисунки, схеми, рівняння, системи рівнянь, таблиці, графи, діаграми тощо) та етапи розв'язування прикладної задачі.

Необхідною умовою в подальшому успішного розв'язування прикладних задач є усвідомлення учнями триетапної схеми їх розв'язування:

I етап — формалізація (перехід від заданої ситуації в задачі до формальної математичної моделі цієї ситуації, а від неї до чітко сформульованої математичної задачі);

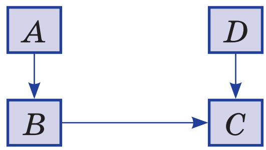
II етап — засобами математики розв'язується математична задача;

III етап — інтерпретація і критичний аналіз відповіді (одержаний розв'язок математичної задачі перекладається на мову вихідної задачі).

Реалізація кожного етапу покращується, якщо здійснюється цілеспрямоване формування відповідних умінь.

Схематично це можна зобразити так, як показано на малюнку 4.1.1.

A — прикладна задача
B — її математична модель
C — відповідь для моделі
D — відповідь для даної прикладної задачі



Мал. 4.1.1

Перехід від **А** до **В** називається моделюванням (процес створення відповідної моделі).

Розпочинаючи ознайомлення учнів з математичним моделюванням, учитель має зосередити їхню увагу на тому, що найбільш відповідальним і складним є перший етап розв'язування — сама побудова математичної моделі. Вона здійснюється логічним шляхом на основі глибокого аналізу явища (процесу), що досліджується, і вимагає вміння описати явище (процес) на мові математики.

Якщо модель складено неправильно, то неправильними будуть розв'язання задачі та її відповідь. Реалізація першого етапу вимагає багатьох умінь, серед яких дуже важливі: виділяти істотні фактори, які визначають досліджуване явище (процес); вибирати математичний апарат для побудови моделі; виділяти фактори, що викликають похибку під час побудови моделі тощо.

Учням можна запропонувати алгоритм для побудови математичної моделі:

- уважно прочитати умову задачі;
- визначити який процес (явище, подія) описується в її умові;
- установити величини, які характеризують (описують) цей процес;
- створити, якщо це потрібно, відповідний рисунок, схему, таблицю тощо;
- виявити серед заданих величин задані й шукані;
- з'ясувати співвідношення між заданими величинами;
- ввести буквене позначення однієї із шуканих величин і скласти вираз, рівняння, нерівність тощо.

Варто показати учням, що існують задачі, які суттєво відрізняються за змістом і сферою діяльності, але мають однакові математичні моделі.

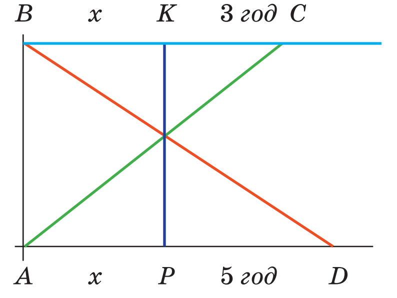
Наприклад:

1. Один 3D-принтер може виконати роботу за 3 год, а другий — за 5 год. За скільки годин виконали б цю роботу обидва 3D-принтери разом?

2. Від станції A до станції B і від B до A одночасно виїхали два автомобілі. Через скільки годин вони зустрінуться, коли відомо, що перший автомобіль відстань AB проходить за 3 год, а другий — за 5 год?

3. Однією з двох труб басейн можна наповнити за 3 год, а другою — за 5 год. За скільки годин наповниться басейн, якщо відкрити обидві труби.

Кожну із цих задач можна розв'язати за допомогою моделі, поданої на малюнку 4.1.2.

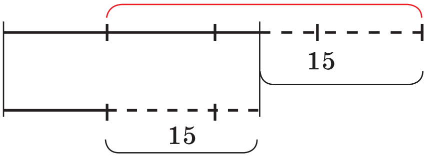


Мал. 4.1.2

Також учні мають усвідомлювати, що одну й ту саму задачу можна розв'язати за допомогою кількох різних видів моделей.

Учням у 7 класі можна запропонувати скласти кілька моделей до задачі: «*У шафі було дві полиці для книжок. На верхній полиці стояло в 4 рази більше книжок, ніж на нижній. Якщо з верхньої полиці переставити на нижню 15 книжок, то на обох полицях книжок стане порівну. Скільки книжок стояло на кожній полиці?*»

Модель 1. Схема (мал. 4.1.3).



Мал. 4.1.3

Модель 2. Рівняння.

$$4x - 15 = x + 15$$

Відпрацювання створення моделей учнями має відбуватися не лише в 7 класі. У 8–9 класах перед повноцінним розв'язуванням прикладних задач учням також корисно пропонувати завдання, де вони мають лише скласти модель до задачі (або скласти якомога більше моделей до однієї задачі). Наприклад, у 8 класі можна запропонувати скласти кілька моделей до задачі: «*Дві будівельні компанії можуть спорудити об'єкт на 12 днів швидше ніж лише перша і на 48 днів швидше ніж тільки сама друга. За скільки днів може побудувати об'єкт кожна компанія окремо?*»

Модель 1. Система рівнянь:

x — час, за який I компанія збудує об'єкт,

y — час, за який II компанія збудує об'єкт,

тоді за умовою задачі: $\begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x+y} = x - 12; \\ \dfrac{x \cdot y}{x+y} = y - 48. \end{cases}$

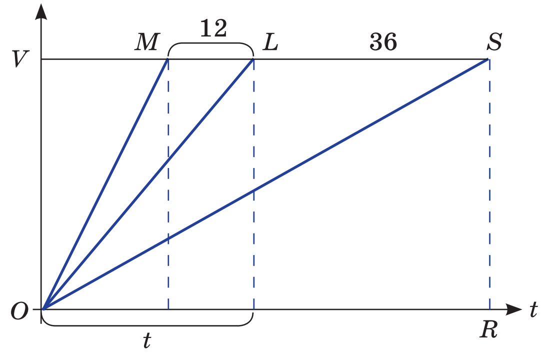
Модель 2. Рівняння.

t — час, за який I компанія збудує об'єкт,

$t + 36$ — час, за який II компанія збудує об'єкт,

тоді за умовою задачі: $t-12=\dfrac{t(t+36)}{2t+36}$.

Модель 3. Графічна модель (мал. 4.1.4).



Мал. 4.1.4

Для 9 класу під час вивчення теми «Квадратична функція» можна запропонувати таке завдання.

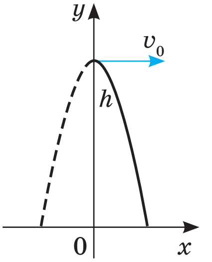
Наведіть приклад конкретної математичної моделі фізичного процесу, що розглядається в задачі: «*Вантаж, який скинули з літака на висоті h над точкою A з початковою швидкістю* v_0, *упав у точці B. Знайдіть відстань AB. Обчисліть, якщо* h = 5000 м, v_0 = 250 м/с, $g = 10$ м/с^2».

Учні можуть скласти дві моделі до цієї задачі:

— у вигляді графіка чи малюнка (мал. 4.1.5);

— у вигляді формули, що задає закон руху

$$y = h - \frac{gx^2}{2v_o^2}$$



Мал. 4.1.5

Доцільно показати дітям випадки, коли для розв'язування важчих задач доводиться складати послідовно кілька моделей. Наприклад, для задачі на спільну роботу чи рух можна спочатку скласти математичну модель у вигляді таблиці, а потім перейти до рівняння або системи рівнянь. Наведемо приклади задач, які можна запропонувати учням (у 7 класі — задача 1, в 8 класі — задача 2).

Задача 1. Перший робітник може пофарбувати всі рами за 10 год, а другий — за 15 год. За скільки годин можуть пофарбувати всі рами обидва робітники, працюючи разом?

Розв'язання. Позначимо час спільної роботи через x і побудуємо модель цієї задачі у вигляді таблиці (табл. 4.1.1 на с. 136).

Таблиця 4.1.1

	Робота	**Час**	**Продуктивність**
І робітник	1	10	$\frac{1}{10}$
ІІ робітник	1	15	$\frac{1}{15}$
Разом	1	x	$\frac{1}{x}$

Враховуючи, що швидкість спільної роботи дорівнює сумі швидкостей роботи кожного з робітників, складаємо ще одну модель у вигляді рівняння: $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{x}$.

Задача 2. Катер проплив 100 км за течією річки і 64 км проти течії за 9 год. Іншим разом, рухаючись із тією самою швидкістю, за той самий час він проплив 80 км за течією і 80 км проти течії. Визначте швидкість катера у стоячій воді і швидкість течії річки.

Розв'язання. Складемо таблицю (табл. 4.1.2).

Таблиця 4.1.2

Етапи	**Напрям руху**	**Відстань, км**	**Швидкість, км/год**	**Час, год**	**Витрачено часу, год**
Перший	**за течією**	100	$x+y$	$\frac{100}{x+y}$	9
	проти течії	64	$x-y$	$\frac{64}{x-y}$	
Другий	**за течією**	80	$x+y$	$\frac{80}{x+y}$	9
	проти течії	80	$x-y$	$\frac{80}{x-y}$	

За таблицею можна скласти систему: $\begin{cases} \frac{100}{x+y}+\frac{64}{x-y}=9; \\ \frac{80}{x+y}+\frac{80}{x-y}=9. \end{cases}$

Математична модель не тотожна реальному явищу чи процесу, а є його наближеним відображенням. Проте вона дає змогу скористатися універсальним математичним апаратом, який не залежить від конкретної природи явищ чи процесів.

Правила наближених обчислень. Важливим є і останній етап розв'язування прикладної задачі — аналіз відповіді. Відповідь для абстрактної задачі може не задовольняти задану прикладну задачу або задовольняти її не повністю. Відповідь може бути точною для абстрактної задачі, відповідь до прикладної задачі майже завжди може бути тільки наближеною. Тому її слід записувати відповідно до правил наближених обчислень.

Саме тому, для посилення прикладної спрямованості важливо включати в шкільний курс алгебри 7–9 класів окрему тему «Наближені обчислення». Або хоча б частково включати її в тему «Моделювання».

У 7 класі з учнями бажано не лише актуалізувати правила округлення, а й ознайомити з округленням із надлишком та округленням із недостачею.

Оскільки іноді в задачах ідеться про вже наближені значення величин, то можна ознайомити учнів і з правила підрахунку цифр, у яких мова йде про десяткові знаки і значущі цифри. Вони не забезпечують високої точності обчислень, але для більшості практичних застосувань цієї точності цілком достатньо.

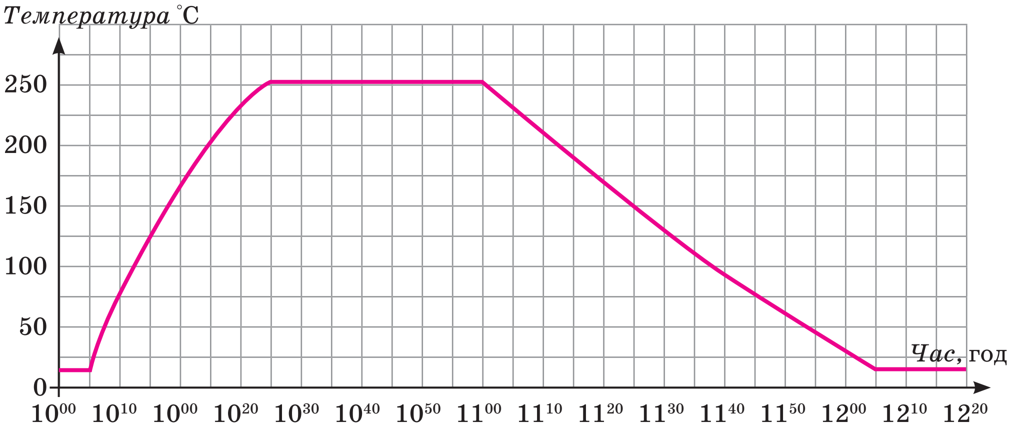
Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів. Для того щоб учні краще уявляли таке абстрактне поняття, як функцію, можна його вводити через функціональні залежності між величинами. Наприклад:

«У звичайному житті ми постійно маємо справу з різними величинами: температурою, вартістю, масою, довжиною, площею, об'ємом і таке інше. При цьому одні величини змінюються, а інші ні.

Величину, яка може набувати різних числових значень, називають змінною величиною. Серед змінних величин розрізняють незалежні та залежні величини. Наприклад, довжина шляху, який людина проходить зі швидкістю 40 м/хв, залежить від часу прогулянки. Формула відстані $s = v \cdot t$ для наведеного випадку матиме вигляд $s = 40 \cdot t$. Залежність між величинами, які дають змогу однозначно визначити значення шуканої величини, є найбільш важливими. Такі залежності назвали функціональними залежностями, або функціями».

На уроках алгебри під час вивчення різних видів функцій доцільно розглядати з учнями залежність температури повітря від часу доби, зросту людини від часу, вартості покупки від кількості куплених однакових товарів, відстані від часу тощо.

У 7 класі під час вивчення теми «Функція. Графік функції» учням можна запропонувати завдання: «*Подано графік зміни температури в духовці під час приготування страви*» (мал. 4.1.6).



Мал. 4.1.6

а) *Яка температура була: а) о 10:10; б) об 11:00?*

б) *О котрій годині температура була 100°С?*

в) *Яка була найвища температура в духовці? Упродовж якого часу трималася така температура?*

г) *Упродовж якого часу температура: а) зростала? б) спадала?*

ґ) *О котрій годині увімкнули духовку? О котрій вимкнули?*

Важливо, щоб учні могли і самостійно задавати формулою залежність між двома змінними величинами. Такого роду завдання є складними для учнів, тож можна розпочати з тестових завдань, а потім запропонувати записати формулами функціональні залежності, що вже їм знайомі.

Наприклад:

1. Сторони поля прямокутної форми дорівнюють x і y, а його площа 60 м². *Укажіть формулу залежності y від x.*

А $xy = 60$ **Б** $y = \frac{60}{x}$ **В** $x = \frac{60}{y}$ **Г** $x + y = 60$

2. Поїзд, який рухається зі швидкістю 70 км/год, *проходить за t год відстань S км. Задайте формулою залежність S від t.*

3. Бригада за планом повинна виготовити 150 *деталей за зміну. Однак вона перевиконала план на x%. Запишіть формулу, яка виражає залежність y від x, де y — число виготовлених бригадою деталей. Знайдіть за формулою:*

1) *значення y, якщо* $x = 10$; 2) *значення x, при якому* $y = 180$.

4. У книжці 280 *сторінок. Дівчинка щодня читає по* 20 *сторінок. Скільки сторінок (y) їй залишиться прочитати через x днів? Чи є залежність функціональною? Якщо так, то вкажіть область допустимих значень цієї функції. Які значення y узгоджуються із відповідним значенням x:* 1) 1; 2) 7; 3) 12; 4) 14?

Посиленню практичної спрямованості сприяє введення в навчальний процес прикладних задач на дослідження, де учні безпосередньо встановлюють залежність між двома величинами або виконують пошукову роботу й аналізують знайдені залежності.

Наприклад:

1. Кожні 2 години впродовж 10 годин вимірюйте температуру повітря. А потім за результатами вимірювань побудуйте таблицю й відповідний графік.

2. Знайдіть в інтернеті графік, проаналізуйте його. Сформулюйте запитання до нього для однокласника / однокласниці.

Рівняння, нерівності та їх системи як математичні моделі прикладних задач. Рівняння (нерівності) є однією з моделей для прикладних задач. Конструювання правильного рівняння (нерівності) — найскладніший етап розв'язування таких задач. Варто привчити учнів, щоб вони не поспішали і на кожному з кроків перевіряли себе. Досить часто складанню рівняння (нерівності) передує скорочений запис чи таблиця. Оскільки розв'язування прикладних задач за допомогою рівнянь (нерівностей) зазвичай потребує багато часу, то доцільно на початку уроку пропонувати серію задач, до яких учні мають скласти лише рівняння, а вже потім розв'язувати кілька задач повністю, звертаючи особливу увагу на інтерпретацію та критичний аналіз результатів.

Доцільно розглянути кілька задач, до яких уже складене й розв'язане рівняння (нерівність). За таких умов учні здійснюють лише останній крок: інтерпретують і критично оцінюють отриманий результат.

Школярі засвоюють навички складати рівняння до текстових задач ще з 5 класу. Але в курсі алгебри перед тим як пропонувати розв'язувати прикладні задачі за допомогою рівнянь (нерівностей) чи їх систем, доцільно опрацювати: а) завдання на складання виразу до задачі; б) задачі тестового характеру, де учні мають вибрати правильну модель до поданої задачі; в) завдання, що містять не лише умову задачі, а й серію додаткових запитань до неї, які допомагатимуть виявити залежності між невідомими величинами тощо.

Наприклад:

1. Створіть вирази для розв'язування задач:

а) Таня йшла по шосе a км, а потім по стежці b км. Із якою швидкістю йшла Таня, якщо на весь шлях вона витратила t год?

б) Костя пройшов лісом a км протягом 1,5 год, а полем за той самий час — на b км більше. Із якою швидкістю йшов Костя?

в) Відстань від села Маківки до села Світле a км, а від Світлого до міста в x разів менше. Вантажівка проїхала від Маківки до міста через Світле зі швидкістю v км/год. Скільки часу їхала вантажівка?

2. Мотоцикліст проїхав 36 км зі швидкістю x км/год, а потім 50 км, збільшивши швидкість на 10 км/год, і витратив на весь цей шлях 3 год. Знайдіть початкову швидкість мотоцикліста. Укажіть математичну модель цієї задачі.

А $\frac{36}{x}+\frac{50}{x}=3$ **Б** $\frac{36}{x}-\frac{50}{x}=3$

В $\frac{36}{x}+\frac{50}{x+10}=3$ **Г** $36x + 50(x + 10) = 3$

3. *В одному сховищі було 440 т картоплі, а в іншому — 408 т. Із першого сховища щоденно вивозили по 60 т картоплі, а до другого завозили по 48 т. Через скільки днів у другому сховищі картоплі стане втричі більше ніж у першому?*

1) Позначте шукане число днів буквою x і виразіть:

а) кількість (число тонн) картоплі, яку було вивезено за x днів із першого сховища;

б) кількість картоплі, яку було завезено за x днів до другого сховища;

в) кількість картоплі, яка залишилися через x днів у першому сховищі;

г) кількість картоплі, якою вона стала через x днів у другому сховищі.

2) Порівняйте кількість картоплі, яка буде через x днів у сховищах, запишіть рівняння. Розв'яжіть його. Перевірте правильність отриманого результату й запишіть відповідь.

Стандартний вигляд числа. Ця тема вивчається в курсі алгебри, але знання з неї найчастіше використовуються на уроках фізики і хімії. Вивчення цієї теми теж доцільно подавати з прив'язкою до фізичного і хімічного змісту.

Оскільки в 7 класі вивчаються степені з натуральним показником, то доцільно пропедевтично ввести поняття стандартного вигляду чисел, що не менші 1. У такому разі запис чисел у стандартному вигляді буде мати натуральний показник. Наприклад:

Запиши у стандартному вигляді значення величин:

а) радіус Сонця — 696 000 000 м;

б) швидкість світла — 300 000 000 м/с;

г) відстань від Землі до Сонця — 149,6 млн км.

У 8 класі поняття стандартного вигляду числа вивчається більш детально, оскільки вже відомі степені із цілими показниками. Учням можна пропонувати такі завдання:

Запиши у стандартному вигляді значення величин:

а) радіус атома Оксигену — 0,0000000066 см;

б) товщина плівки мильної бульбашки — 0,00000006 см.

Оскільки на уроках фізики і хімії учні не лише записують значення величин у стандартному вигляді, а й порівнюють їх та виконують дії з ними, то необхідно і в курсі алгебри ознайомити школярів із цим матеріалом і запропонувати серію завдань. Наприклад:

У таблиці 4.1.3 наведено середні відстані від планет Сонячної системи до Сонця (у млн км).

Таблиця 4.1.3

Планета	Відстань, млн км	Планета	Відстань, млн км
Меркурій	57,89	Марс	227,99
Венера	108,16	Юпітер	778,36
Земля	149,6	Сатурн	1427,01

а) Запишіть ці відстані у стандартному вигляді (у км).

б) Яка планета розташована найближче до Сонця?

в) На скільки кілометрів Венера ближче до Сонця, ніж Земля?

г) На скільки кілометрів Юпітер далі від Сонця, ніж Марс?

Множини. Задачі на переріз і об'єднання множин. Тема «Множини. Переріз та об'єднання множин» можна пропонувати у 8 чи 9 класі для підготовки учнів до розв'язування нерівностей та їхніх систем.

Під час викладення цієї теми доцільно пропонувати не лише абстрактні задачі, а прикладні на переріз (об'єднання) множин різного рівня. Наприклад:

1. У 8-А класі кожен з учнів грає на гітарі або на фортепіано. 20 учнів уміють грати на гітарі, 9 — на фортепіано, 6 — і на гітарі, і на фортепіано. Знайдіть:

а) кількість учнів у класі;

б) кількість учнів, які вміють грати тільки на гітарі;

в) кількість учнів, які вміють грати тільки на фортепіано.

2. У класі 35 учнів. Із них 20 займаються в математичному гуртку, 11 — у гуртку робототехніки, а 10 — не відвідують ці гуртки. Скільки учнів класу відвідують обидва гуртка?

3. Група учнів з України виїхала у мовний табір за кордон. Із них англійську мову будуть вивчати 28 учнів, французьку — 13, німецьку — 10, англійську і французьку — 8, французьку і німецьку — 5, англійську і німецьку — 6. Три мови вивчатимуть двоє. 41 учень у рамках цього табору буде удосконалювати українську і не вивчатиме жодної іншої. Скільки всього учнів поїхало в табір?

Арифметична та геометрична прогресії. Викладення тем «Числові послідовності», «Арифметична прогресія», «Геометрична прогресія» можуть супроводжуватися великою кількістю прикладів із життя.

Наприклад, веденням поняття арифметична послідовність можна розпочати з розглядання проблемної ситуації, коли учениці, що вже має 200 грн, щотижня видають 50 грн на кишенькові витрати. Учениця гроші не витрачає, а накопичує.

Запропонуйте учням записати послідовність, що утвориться:

200, 250, 300, 350, 400, 450...

Запитайте:

1) Через який час в учениці буде 450 грн?
2) Скільки грошей буде в учениці через 2 тижні?
3) Скільки буде через 10 тижнів?

тощо.

Попросіть учнів описати утворену послідовність. Запропонуйте знайти спільне в цій задачі й наступних 3 повсякденних ситуаціях:

— зведення багатоповерхового будинку (щоразу висота будівлі збільшується на 3 метри),

— рівноприскорений рух (швидкість тіла щосекунди змінюється на однакову величину),

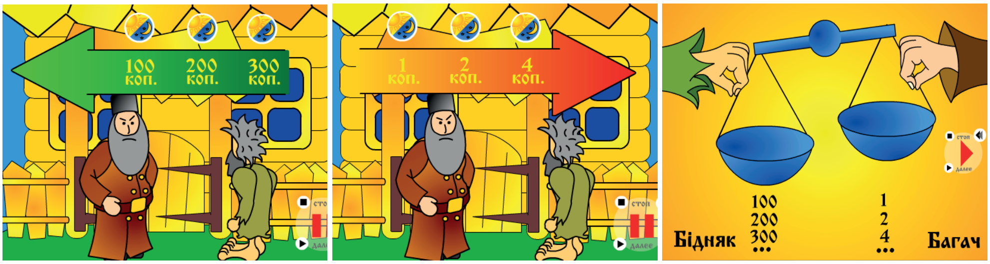
— деякі вклади в банках збільшуються за схемами простих відсотків (збільшення початкового внеску в арифметичній прогресії).

Поясніть, що числові послідовності, у яких кожен наступний член відрізняється від попереднього на одне й те саме число, називають арифметичною прогресією. Запропонуйте учням навести свої приклади життєвих ситуацій, що можна описати арифметичною прогресією.

Числові послідовності — це навчальна тема, яку також можна супроводжувати великою кількістю історичного й наочного матеріалу. Наприклад, після арифметичної прогресії, перед вивченням геометричної прогресії можна запропонувати історичну задачу про бідняка і багатія. У такому разі ця задача створить проблемну ситуацію для учнів, що мотивуватиме їх до вивчення теми «Геометрична послідовність».

Одного разу розумний бідняк попросив у скупого багатія притулку на два тижні на таких умовах: «За це я тобі першого дня заплачу 1 карбованець, другого — 2, третього — 3, і т. д., збільшуючи щоденну плату на 1 карбованець. Ти ж будеш подавати милостиню: першого дня 1 копійку, другого — 2 копійки, третього — 4 копійки і т. д., збільшуючи щодня милостиню вдвічі». Багатій з радістю на це згодився, вважаючи умови вигідними. Скільки грошей одержав багатій?

Цю громіздку умову задачі доцільно візуалізувати у формі анімації (мал. 4.1.7). Це допоможе кращому сприйняттю матеріалу.



Мал. 4.1.7

Доцільно також розглянути числові послідовності, що трапляються в природі.

Статистика, комбінаторика і теорія ймовірностей. У сучасному інформаційному суспільстві люди постійно працюють із даними, як у буденному житті, так і в різних професіях.

Типові освітні програми з математики для початкової школи містять окрему змістову лінію «Робота з даними», яку необхідно продовжувати і в середній школі. У модельній програмі Алгебра, 7–9 класи авторського колективу М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва пропонується вивчати елементи стохастики в кожному з класів, постійно актуалізуючи та поглиблюючи знання учнів із цього розділу математики (табл. 4.1.4).

Таблиця 4.1.4

Елементи стохастики в 7–9 класах

7 клас	8 клас	9 клас
Побудова та аналіз різних видів діаграм Опитування та систематизація даних у таблиці Вибірка. Середнє арифметичне вибірки. Середнє значення величини Поняття комбінаторної задачі. Правила додавання і множення для комбінаторних задач Поняття ймовірності. Ймовірність неможливої, достовірної та випадкової події	Збирання та систематизація даних. Частотна таблиця. Діаграми Вибірка. Середнє арифметичне, мода вибірки Комбінаторні задачі Поняття ймовірності	Основи комбінаторики. Правила розв'язування комбінаторних задач Елементи статистики. Способи подання даних і їх обробки Розмах, медіана, середнє арифметичне, мода вибірки Частота і ймовірність випадкової події

Вивчення тем з розділу «Статистика (Збирання та систематизація даних. Вибірка та її характеристики. Частотна таблиця. Діаграми)» дають змогу учням у процесі навчання аналізувати інформацію з різних джерел, у тому числі й інтернету. У процесі вивчення цих тем школярі проводитимуть опитування, аналізуватимуть актуальні дані, систематизуватимуть дані в частотних таблицях, читатимуть і будуватимуть діаграми й інфографіки, а також характеризуватимуть вибірки. Усе це посилить розуміння учнів, для чого потрібні математичні компетентності у житті.

Вивчення тем з розділу «Комбінаторика (Поняття комбінаторної задачі. Правила додавання і множення для комбінаторних задач)» посилює зв'язок шкільного предмета алгебра з життям, а також допоможе учням розвинути варіативне мислення і створити необхідну базу для подальшого засвоєння теорії ймовірностей.

Вивчення тем із розділу «Ймовірність (Поняття ймовірності. Ймовірність неможливої, достовірної та випадкової події)» допоможе учням розвинути навички прогнозування і побачити, що деякі події у житті є закономірними.

Прості і складені відсотки. Відсотки дуже часто трапляються в житті сучасної людини. І доцільно вивчати їх впродовж більшого проміжку часу. У модельній програмі авторського колективу М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва пропонується продовження вивчення відсотків в 7, 8 і 9 класі (в 7–8 класах діти розв'язують задачі на прості відсотки, в 9 класі учні ознайомлюються зі складними відсотками).

Щоб викладення цієї теми зацікавило учнів, можна побудувати його на основі роботи банківської системи. Комерційні банки виконують дві основні функції: 1) зберігають грошові вклади; 2) надають кредити (позики). Якщо розмістити у банку грошовий вклад, то банк виплачує вкладнику певну суму грошей за те, що користується його капіталом для надання позик. Важливо, щоб на кінець 9 класу учні розрізняли прості і складені відсотки і розуміли, що банки можуть нараховувати відсотки за двома схемами, тож важливо уважно читати умови договору.

Схема простих відсотків. Інвестор розміщує на рахунку в банку суму 20 000 грн під 5 %. Тоді через рік він одержить суму 20000 + 1000 грн, яка дорівнює початково інвестованим коштам плюс нараховані відсотки. 1000 грн банк переводить на інший рахунок. А на наступний рік знову 5 % нараховуються на 20 000 грн. Коли інвестор забирає гроші через два роки сума на рахунку становитиме: 20000 + 1000 + 1000 грн і т. д.

Схема складних відсотків. Припустимо, що вкладник помістив у банк 1000 грн під 5 % річних. Це означає, що через 1 рік розмір вкладу збільшиться на 50 грн (5 % від 1000 грн) і складатиме 1050 грн. Наступного року додаткові 5 % будуть нараховуватися вже на суму 1050 грн і т. д. У такому разі розмір вкладу зростає за законом геометричної прогресії. Очевидно, що першим членом цієї прогресії є сума початкового вкладу. Нехай A — початковий вклад, на який нараховується p % річних. Тоді через рік розмір вкладу становитиме:

$$A+\frac{A}{100}\cdot x=A\cdot(1+\frac{x}{100}).$$

Як бачимо, перший множник — це сума, на яку нараховуються відсотки, а другий множник від цієї суми не залежить, тобто він є сталим для будь-якої суми грошей. Отже, наступного року розмір вкладу становитиме: $A\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)=A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$ і т. д.

4.2. Формулювання реальних життєвих ситуацій перед введенням алгебраїчних понять

(*Д. Васильєва*)

Обговорення проблемної ситуації з життя на початку вивчення нової теми з алгебри допомагає сформувати перші уявлення учнів про виучувані поняття, показати застосування алгебри в реальному житті та мотивувати школярів.

Наприклад, вивчення теми «Числові послідовності» можна розпочати з прикладів послідовностей у житті: «У повсякденному житті зустрічаються послідовності деяких об'єктів: послідовність подій, що з нами трапляються; послідовність днів тижнів, які ми проживаємо; послідовність учнів у списку класного журналу; послідовність днів у місяці, сторінок у книзі тощо».

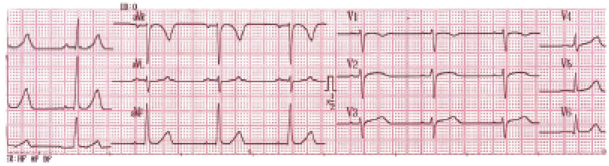
Вивчення теми «Наближені обчислення» можна розпочати з проблемної ситуації про кількість мешканців певного міста: «Назвати точну кількість мешканців Києва не можна, бо щодня сотні людей приїздять, сотні від'їжджають, хтось народжується, а хтось помирає. Говорять, що нині в Києві мешкає приблизно 2,9 млн людей. Але що це означає?».

Вивчення теми «Нерівності» можна розпочати з таких вступних слів: «Життя людини важко уявити без постійного порівнювання числових значень різноманітних величин. Наприклад, результатів вимірювань зросту, маси, артеріального тиску, частоти пульсу, кількості підтягувань чи присідань, розмірів цін на товари та послуги, показників економічного розвитку, даних соціологічних досліджень і багато іншого. Результати таких порівнянь виражаються одним із трьох можливих співвідношень: «a більше за b» ($a > b$), «a менше за b» ($a < b$) або «a дорівнює b» ($a = b$)...».

Вивчення теми «Графік функції» можна розпочати з аналізу учнями малюнків 4.2.1 та 4.2.2, на яких зображено кардіограф та кардіограму, і запитаннями від учителя: «Чи бачили ви такий пристрій? Що він робить? Що ілюструють ці криві?».

електрокардіограф

Мал. 4.2.1

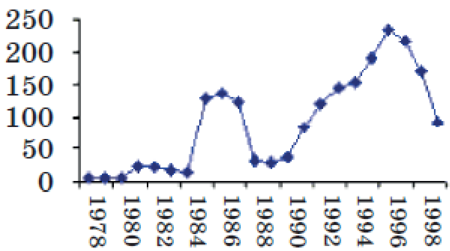


кардіограма

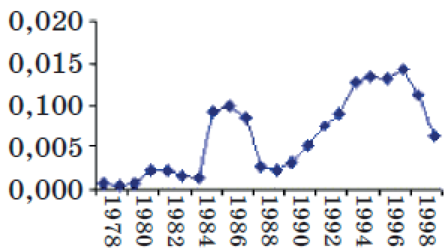
Мал. 4.2.2

І лише після обговорення вчитель оголошує тему уроку.

Або ж учитель може навести інші 2 графіки, пов'язані із землетрусами, і запитати учнів, чи знають вони про те, що в геології використовують такі наочні зображення зміни середньорічних значень числа землетрусів (мал. 4.2.3) та енергії землетрусів (мал. 4.2.4). Такі зображення називають графіками і їх аналіз дає можливість зробити висновки про сейсмічну активність на різних глибинах.



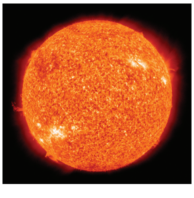
Мал. 4.2.3



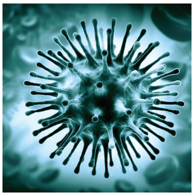
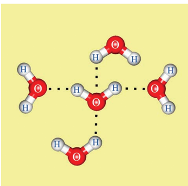
Мал. 4.2.4

Вивчення теми «Стандартний вигляд числа» можна розпочати з аналізу учнями таблиці 4.2.1 і записів у ній: «Які величини яких об'єктів записані у таблиці? Чим відрізняються записи в таблиці?»

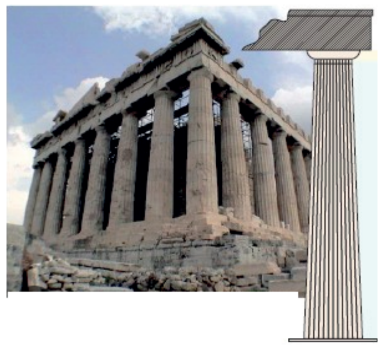
Таблиця 4.2.1

Стандартний вигляд числа		Значуща частина	Порядок числа
	Маса Землі $m = 5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ т $m = 5{,}97 \cdot 10^{21}$ т	5,97	21
	Діаметр Сонця $d = 1\,390\,000\,000$ м $d = 1{,}39 \cdot 10^{9}$ м	1,39	9

Продовження таблиці 4.2.1

Стандартний вигляд числа		Значуща частина	Порядок числа
	Розмір вірусу грипу $r = 0{,}000\,000\,103$ м $d = 1{,}03 \cdot 10^{-7}$ м	1,03	–7
	Діаметр молекули води $d = 0{,}000\,000\,000\,28$ м $d = 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ м	2,8	–10

Вивчення теми «Геометрична прогресія» можна розпочати з ілюстрації колон у різних будівлях (мал. 4.2.5). Досить часто в будівельній справі використовують колони, які мають форму не циліндра, а зрізаного конуса. Площі поперечних перерізів, рівновіддалених один від одного, відрізняються в однакову кількість разів, тобто утворюють числову послідовність, що називають геометричною прогресією.



Мал. 4.2.5

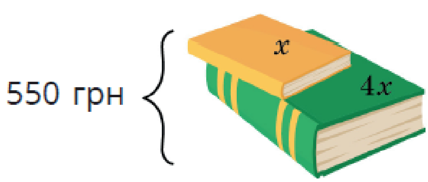
4.3. Використання реальних прикладів і ситуацій під час розв'язування абстрактних алгебраїчних задач

(*Д. Васильєва*)

Пропонуючи учням абстрактну задачу з алгебри, вчитель може почути від когось із них: «А для чого мені вміти її розв'язувати? Як це допоможе мені в житті?». У такому разі доречним буде коментар із можливим варіантом застосування на практиці описаного.

1. Розв'яжіть рівняння $x + 4x = 550$.

Коментар учителя: «Спробуймо сформулювати ситуацію, моделлю до якої буде це рівняння. Наприклад, у магазині ваша подруга купила книжку і блокнот. Вартість покупки становить 550 грн. Книжка була у 4 рази дорожча за блокнот (мал. 4.3.1). Яка ціна книжки і блокнота?



Мал. 4.3.1

2. Розв'яжіть нерівність $600 \cdot x \le 2700$.

Коментар учителя: «Нам знадобиться вміння розв'язувати таку нерівність, якщо матимемо проблемну ситуацію: «*Маса будівельної плити 600 кг. Яку кількість таких плит можна перевезти за один раз вантажівкою із вантажопідйомністю 2 700 кг?*».

3. За таблицею 4.3.1 побудуйте неперервний графік $y = f(x)$.

Таблиця 4.3.1

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	3	6	9	12	15	16	17	17

Знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргументу 15, 23, 77;

б) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 8.

Це завдання можна переформулювати для учнів, описуючи досить конкретну життєву ситуацію.

У таблиці 4.3.2 відображено зміну висоти сосни залежно від її віку. Побудуйте графік залежності висоти сосни від її віку.

Таблиця 4.3.2

Вік (р.)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Висота (м)	0	3	6	9	12	15	16	17	17

Знайдіть:

а) висоту сосни у 15 років, 23 роки, 77 років;

б) у якому віці висота сосни дорівнювала 8 м.

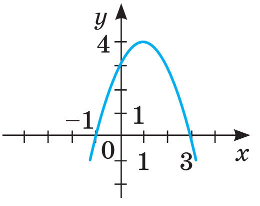
4. Укажіть формулу, що задає функцію, графік якої зображено на малюнку 4.3.2.

А $y = -(x - 1)(x + 3)$

Б $y = (x - 1)(x + 3)$

В $y = (x + 1)(x - 3)$

Г $y = -(x + 1)(x - 3)$



Мал. 4.3.2.

Можливий коментар учителя: «Рух угору під кутом відбувається по параболі (мал. 4.3.3). Для того щоб сконструювати фонтан зі струменів води, направлених угору під кутом, потрібно розуміти, як вони будуть падати. Знаючи рівняння, можна спрогнозувати рух води у струмені і, навпаки, — маючи готовий струмінь води, можна описати його рівнянням».

Мал. 4.3.3.

Доречним буде пропонувати учням і самим сформулювати відповідні життєві ситуації до поданих абстракцій. Наприклад, учитель може попросити учнів не лише розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 6, \\ x + y = 30 \end{cases}$, а й сформулювати задачу, моделлю до якої могла б бути ця система. Наприклад: «*На двох полицях лежать книжки. На першій із них на 6 книжок більше ніж на другій. Скільки книжок на кожній полиці, якщо всього їх 30?*».

4.4. Розв'язування прикладних задач, обговорення та дослідження різних практичних ситуацій засобами алгебри

(*Д. Васильєва*)

Функції прикладних задач

У процесі навчання алгебри прикладні задачі мають надзвичайно важливі й різноманітні функції: *навчальну, розвивальну, виховну, контролю, корегувальну*.

Навчальна функція. За допомогою задач практичного змісту вчитель може підвести учнів до вивчення нової теми, подати нові поняття, створити проблемні ситуації, актуалізувати опорні знання і вміння, мотивувати введення того чи іншого прийому, посилити мотивацію тощо. Під навчальними функціями прикладних задач розуміють такі функції, які спрямовані на формування предметних і ключових компетентностей на різних етапах.

Із допомогою задач, що пропонуються перед викладом нового матеріалу, систематизують раніше отримані знання й готують учнів до свідомого засвоєння нових.

Вивчення понять не повинно завершуватися обговоренням задач, які приводять до них, і на введені формальних означень. Після того, як учні ознайомляться з формулами й теоремами, що стосуються певних алгебраїчних понять курсу, слід розглянути з ними серії прикладних задач, у розв'язанні яких ці поняття відіграють першорядну роль.

Розвивальна функція. Під розвивальними розуміють функції, що направлені на розвиток мислення учнів, формування якостей, притаманних науковому мисленню, оволодіння прийомами ефективної розумової діяльності. Розв'язуючи прикладні задачі, учні не тільки обчислюють, запам'ятовують формули, але й навчаються чіткого мислення, уміння міркувати, зіставляти і протиставляти факти, знаходити в них спільне та відмінне, робити правильні висновки.

Виховна функція. Зв'язок між навчанням і вихованням є об'єктивною закономірністю, як і зв'язок між навчанням та розвитком. Коли говорять про виховні функції прикладних задач, мають на увазі виховання культури мови (усної та письмової), графічної культури, наукового світогляду, ключових компетентностей тощо.

Розв'язування спеціально дібраних прикладних задач сприяє підвищенню інтересу учнів до алгебри; вихованню позитивних рис особистості (наполегливість, воля, охайність, свідомість, інноваційність тощо). За допомогою задач можна виховувати позитивне ставлення учнів до навчання та потребу в самостійній пізнавальній діяльності.

Функція контролю. У процесі навчання алгебри окремі прикладні задачі використовують для контролю знань й умінь учнів, з'ясування прогалин і недоліків у знаннях, встановлення рівня математичного розвитку тощо. Такий контроль здійснюється на різних етапах навчального процесу. На початку уроку (контроль наявності опорних знань і умінь), у процесі вивчення нового матеріалу (контроль правильності сприйняття й осмислення виучуваної теми), на етапі закріплення, після вивчення теми (тематичний контроль).

Прикладні задачі також є в контрольних роботах, роботах державної підсумкової атестації та зовнішнього незалежного оцінювання.

Коригувальні функції. Під коригувальними функціями прикладних задач розуміють такі, що спрямовані перш за все на попередження і своєчасне виправлення помилок, які виникають, на усунення наявних прогалин у знаннях. Вони досить тісно пов'язані з функціями контролю і навчальними. Використання прикладних задач із метою корекції дає змогу учням уникнути негативного імпринтингу, підвищити свідомість у засвоєнні знань, активізувати пізнавальну діяльність, виховати звичку до самокорекції. Неправильно розглядати корекцію лише у зв'язку з результатами контрольно-оцінювальної діяльності. Діяльність учнів можна й необхідно коригувати ще до того, як у них з'являються помилки. Найкраще це робити в процесі доцільно дібраних прикладних задач.

Корекції слід відводити значне місце в навчальному процесі. Знаючи наперед, у якому місці навчальної теми можуть бути допущені помилки, учитель за допомогою спеціально дібраних прикладних задач створює проблемні ситуації, розгляд яких допомагає не просто уникнути помилок, але й акцентувати увагу учнів на можливості їх появи.

Баланс між прикладними та абстрактними алгебраїчними задачами на уроках алгебри

Посилення прикладної спрямованості шкільного курсу алгебри першочергово має позначитися на задачному матеріалі. У курс алгебри має проникати більше задач практичного змісту.

Система прикладних задач з алгебри є підсистемою задач усього курсу математики і складає лише їх частину. Завдання вчителя — виважено підійти до визначення співвідношення кількості абстрактних та прикладних задач як у загальній системі, так і для конкретного заняття.

Різні теми мають різний потенціал щодо використання на уроках прикладних задач. Наприклад, тема «Формули скороченого множення» все-таки призначена для збагачення математичного апарату учнів.

Важко уявити успішне розв'язування учнями рикладних задач без ґрунтовної математичної бази. Тобто, якщо вчитель і розпочинає вивчення теми з прикладної ситуації задля мотивації учнів, то потім він запропонує низку абстрактних задач, спрямованих на формування конкретних математичних компетентностей. І лише після того, як школярі будуть мати певний досвід розв'язування абстрактних задач, учитель пропонує серію прикладних задач. Щоправда, учителі досить часто переходять до прикладних задач лише наприкінці опанування теми. Цей підхід доцільно змінити, чергуючи абстрактні та прикладні задачі, наприклад, пропонувати пари задач (абстрактна-прикладна). Спершу учні розв'язують певну абстрактну задачу, а після неї — одразу відповідну прикладну задачу, що ґрунтується на розглянутій абстрактній. Збірник таких задач для 7–9 класів розроблено співробітниками відділу математичної та інформатичної освіти Інституту педагогіки (авт. Васильєва Д. В., Вашуленко О. П.).

Буває так, що вчителі, захопившись практичними задачами, не приділяють належної уваги строгості математичних обґрунтувань. У результаті в учнів розвивається легковажне ставлення до питання теорії, що шкодить усьому процесу навчання. Тож важливий баланс.

Процес розв'язування задач на уроках алгебри має бути системним і неперервним, лише тоді він забезпечуватиме цілісність знань та широке їх використання учнями у повсякденному житті. Такий підхід дасть змогу створити органічний зв'язок із теоретичним матеріалом.

Трапляється й таке, що вчителі поряд зі справді цікавими прикладними задачами пропонують досить невдалі, нереалістичні, які лише спотворюють дійсність. Добору задач із практичним змістом треба приділити більше уваги й давати учням лише такі, які реально відображають довкілля.

На основі дидактичних принципів навчання математики до системи прикладних задач також висуваються певні вимоги. Зважаючи на них система прикладних задач має містити:

— лише коректно складені задачі (мати реальний практичний зміст, доступні формулювання і зрозумілу мову, числові дані повинні бути реальними);

— задачі із сучасною й актуальною тематикою;

— задачі різного рівня складності;

— задачі, які забезпечують реалізацію всіх дидактичних функцій;

— усі види задач (усні, напівусні; на обчислення, доведення, побудову, дослідження тощо);

— задачі, що стосуються різних наукових галузей, навчальних дисциплін та сфер діяльності людини;

— різні за змістом задачі, розв'язування яких зводиться до побудови однієї і тієї самої моделі;

— певну кількість задач, для розв'язування яких доцільно використовувати сучасні інформаційно-комунікаційні технології на основі спеціальних, педагогічних, програмних засобів.

У процесі розв'язування прикладних задач розкривається широке застосування алгебри. В учнів формуються уявлення про алгебру як універсальний, потужний метод наукового пізнання та перетворення навколишньої дійсності (формування таких уявлень виступає одним із головних завдань сучасної математичної освіти практично в усіх розвинених країнах світу).

Засоби формування вмінь розв'язувати прикладні задачі

Під час формування вмінь учнів розв'язувати прикладні задачі, крім різноманітних форм і методів навчання, необхідно використовувати велику кількість різних засобів (ідеальних та матеріальних).

Велика кількість засобів навчання дає змогу варіативно використовувати на уроках різні, впливаючи на емоційну складову учнів і підвищуючи інтерес до алгебри.

Одним із цікавих засобів для сучасних учнів є ІКТ (інформаційно-комунікаційні технології). З використанням ІКТ прикладна спрямованість курсу алгебри може посилитися, бо деякі процеси можна візуалізувати або проілюструвати в динаміці. Комп'ютерне моделювання стимулює глибше вивчення математики, вимагає осмислення суті проблеми та пошуку різних засобів розв'язування, відкриває додаткові можливості візуального й числового аналізу явища або процесу, що вивчається.

Комп'ютер, що використовує вчитель, разом із проєктором й екраном чи мультимедійною дошкою є необхідним засобом візуалізації. Крім того, гаджети (нетбуки, смартфони тощо) можуть використовуватися на заняттях індивідуально кожним учнем як для обчислень, так й для створення моделей до прикладних задач. Для цього потрібне відповідне програмне забезпечення загального призначення (Power Point, Paint, Word, Excel) або спеціального (Desmos, GeoGebra, Maple, GRAN). Можна спробувати залучати школярів до створення моделей прикладних задач, використовуючи різне програмне забезпечення. Це зумовить не лише краще розуміння теми і вміння створити правильну математичну модель до певного процесу чи явища, а й сприятиме підвищенню цифрової компетентності учнів.

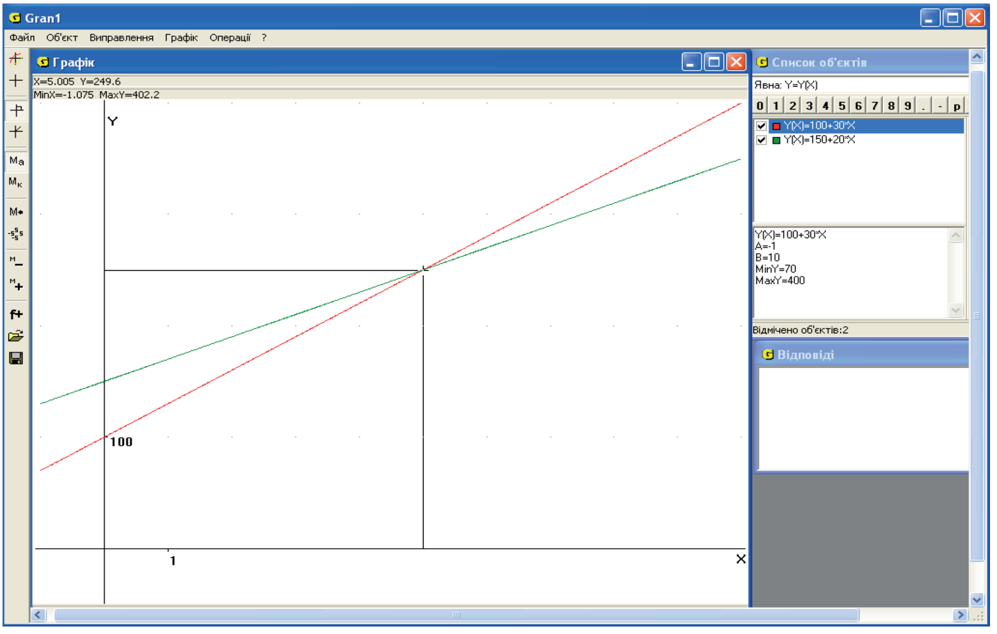
Іноді найскладніше в прикладній задачі не побудувати модель, а саме правильно інтерпретувати результати. У таких випадках для побудови моделі й розв'язування математичної задачі можна використати програмні засоби (для економії часу), але важливо звернути увагу учнів саме на інтерпретацію отриманих результатів. Наприклад:

Витрати під час перевезення вантажу двома видами транспорту обчислюється за формулами: $y_1 = 100 + 30x$, $y_2 = 150 + 20x$; *де* x *— відстань перевезень у сотнях кілометрів,* y *— транспортні витрати під час перевезення вантажу першим і другим видами транспорту в сотнях гривень. Знайдіть, на якій відстані і яким видом транспорту перевезення вантажу буде економнішим.*

За допомогою Desmos Calculator, GeoGebra чи Gran побудуємо графіки транспортних витрат, які виражаються лінійними залежностями.

За допомогою програмних засобів легко одразу бачити точку перетину і її координати (мал. 4.4.1). Отже, робимо висновки:

- вантаж на відстань менше 500 км економніше везти першим видом транспорту;
- вантаж на відстань більше 500 км економніше везти другим видом транспорту.



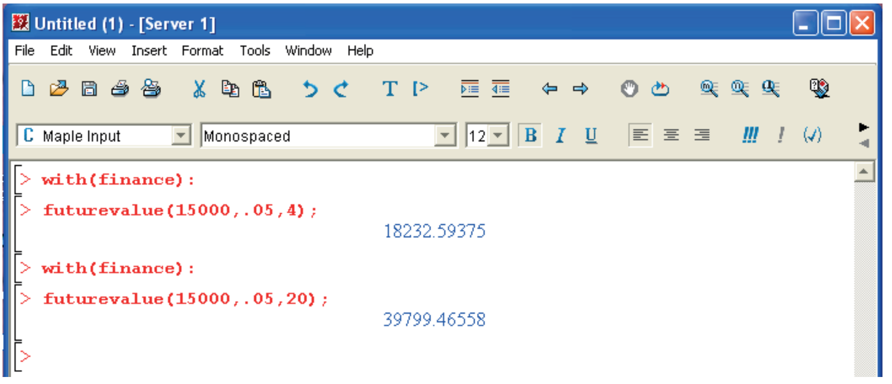
Мал. 4.4.1

Інколи програмні засоби можна використовувати задля перевірки отриманого результату прикладної задачі, особливо якщо йдеться про дистанційне навчання, де надання миттєвого зворотного зв'язку від учителя ускладнене. Наприклад:

Підприємець вніс у банк 15 000 грн під складні 5 % річних. Якою буде сума його вкладу через 4 роки?

Формула знаходження складних відсотків: $P_n = P\left(1+\frac{i}{100}\right)^n$.

Через 4 роки сума його вкладу за формулою складних відсотків становитиме $P_4 = 15000\left(1+\frac{5}{100}\right)^4$. Цей вираз потрібно обчислити. Для перевірки отриманого результату можна використати функцію *futurevalue* в *Maple* (мал. 4.4.2) або запит до штучного інтелекту, наприклад до *ChatGPT*.



Мал. 4.4.2.

Мотивація учнів до розв'язування прикладних задач

Прикладні задачі відображають реальні ситуації та процеси, що відбуваються в побуті, техніці та науці, а їх розв'язування сприяє ознайомленню учнів із поняттями та відношеннями, що стосуються різних галузей людського знання, а також формуванню вмінь будувати та досліджувати математичні моделі реальних ситуацій. Для успішного застосування практико-орієнтованого навчання алгебри вчителі можуть використовувати різноманітні прийоми, які дають змогу стимулювати інтерес учнів до розв'язування прикладних задач.

Одна з причин втрати учнями зацікавленості полягає в тому, що вони не бачать найближчої, а тим більше віддаленої мети цієї діяльності. Якщо ж фабула задачі звична і зрозуміла, то інтерес до розв'язування прикладної задачі навпаки посилюється. Бажано описувати ситуації, в яких справді діти надалі зможуть застосувати набуті навички.

Розв'язування прикладної задачі вимагає більшої затрати ресурсів. Тут задіяно складний комплекс умінь, найважливіші з яких: читати текст, аналізувати подану ситуацію, співвідносити відомі елементи з невідомими, виявляти приховані властивості, конструювати допоміжні моделі, висловлювати гіпотези, здогадки, інтерпретувати результати тощо.

Зацікавити учнів розв'язуванням прикладної задачі можна, запропонувавши спершу відгадати відповідь до неї. Запорукою успіху є впевненість дитини в тому, що вона зможе розв'язати запропоновану йому задачу.

Щоб учні не боялися прикладних задач, доцільно розібрати з ними, як працювати з текстом задачі: читати кілька разів, розбивати на підзадачі, подавати ту саму текстову інформацію в іншому вигляді (моделювати) тощо. Варто виділяти типові практичні ситуації, для розв'язання яких найчастіше використовується певна математична модель.

Оскільки розв'язування прикладної задачі займає багато часу, іноді доцільно пропонувати учням лише дібрати чи створити модель до задачі. Наприклад:

Кішка Лаванда з'їла x г корму, а кішка Джульєта — на 3 г більше. Разом вони з'їли 88 г. Скільки з'їла кожна з них?

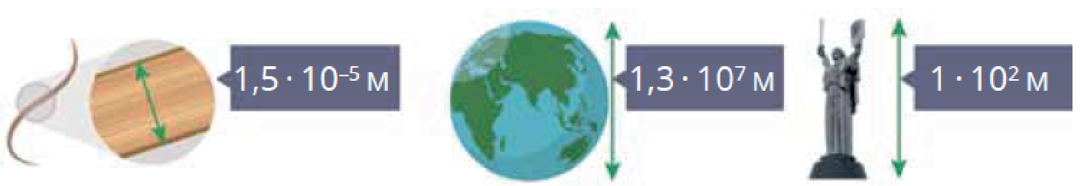
Яке з рівнянь є математичною моделлю задачі?

А $x + (x - 3) = 88$ **В** $x + (x + 3) = 88$

Б $x(x + 3) = 88$ **Г** $x - (x + 3) = 88$

Цікавими будуть і різноманітні практичні завдання, де можна провести опитування чи виміряти певні величини. Наприклад, під час вивчення теми «Стандартний вигляд числа» можна запропонувати учням виразити довжину свого підручника з математики: а) у міліметрах; б) у метрах; а потім записати це значення у стандартному вигляді.

Для розвитку креативності учнів важливо залучати їх до складання власних прикладних задач (за виразом, рівнянням, графіком, схемою, малюнком тощо). Сучасні діти дуже люблять завдання на вибір. Наприклад, коли їм пропонують три малюнки з даними, а використати треба лише два з них для формулювання своєї задачі (мал. 4.4.3).



Мал. 4.4.3

Збільшити кількість прикладних задач, які розв'язуватимуть учні, можна за рахунок їх самостійної та індивідуальної роботи, а також реалізації міжпредметних зв'язків з іншими навчальними дисциплінами.

4.5. Посилення міжпредметних зв'язків алгебри з іншими предметами

(*Д. Васильєва*)

Застосування вивченого матеріалу в інших предметах

Одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання алгебри є встановлення природних міжпредметних звязків алгебри з іншими предметами, насамперед із природничими. Адже мета навчання полягає не лише в набутті знань окремих предметів, а й у всебічному пізнанні навколишнього світу за допомогою цих предметів. Саме така організація навчального процесу дає змогу підвищити його ефективність. Усвідомлення знань неможливе без установлення міжпредметних зв'язків.

Доцільно повідомляти учням, як саме алгебраїчні знання використовуються на інших предметах чи курсах. Наприклад, під час вивчення теми «Числові послідовності» доцільно розказати про використання прогресій у різних галузях.

Прогресія в економіці. Багато банківських операцій побудовано на геометричній прогресії.

Прогресії у фізиці. Прогресії виражають закони деяких фізичних явищ. Наприклад, за законом геометричної прогресії здійснюється поділ нейтронів у ядерній ланцюговій реакції.

У фізиці є таке поняття, як «рівноприскорений рух». Якщо кажуть, що тіло рухається рівноприскорено, то це означає, що відстань, яку воно проходить за кожну наступну одиницю часу, збільшується на одну й ту саму величину. Тоді як під час рівномірного руху тіло за кожну одиницю часу проходить однакову відстань. Рух також може бути і рівносповільненим. Отже, відрізки шляху, які проходить тіло за рівноприскореного руху, за 1-шу, 2-гу, 3-тю, 4-ту... одиниці часу, утворюють арифметичну прогресію.

Прогресія в біології. У біології також є явища, які можна охарактеризувати за допомогою прогресій. Розмноження живих організмів теж відбувається за законами геометричної прогресії. Знаючи такі характеристики організму, як періодичність відтворення та кількість потомства, можна за допомогою прогресій спрогнозувати кількість популяції за певний проміжок часу. Аналогічно в соціологічних науках теорія прогресій дає змогу обчислювати приріст населення.

Прикладні задачі, що посилюють міжпредметні зв'язки

Дієвість включення прикладних задач, які задіюють міжпредметні зв'язки, зумовлена їх спрямованістю на реалізацію трьох аспектів навчання:

— змістового (формування системи наукових понять);

— операційного (вироблення прийомів розумової діяльності, практичних умінь та навичок);

— мотиваційного (усвідомлення цілей і значення навчання).

Тобто, розв'язуючи вдало дібрані задачі із фізичним, хімічним, географічним чи іншим змістом, учні формують повнішу картину світу, усвідомлено засвоюють математичні поняття й закономірності, що загалом підвищує якість їх математичної підготовки.

Наприклад, під час вивчення теми «Степінь із цілим показником» у 8 класі можна запропонувати задачу: *Суміш утворили, взявши* $8 \cdot 10^{-5}$ м^3 *рідини з густиною* $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3 *і* $2 \cdot 10^{-5}$ м^3 *рідини з густиною* $1{,}5 \cdot 10^3$ км/м^3. *Яка маса утвореної суміші?*

Прикладні задачі можуть допомагати в опануванні інших галузей, адже для розв'язування природничих задач потрібна певна математична база. Для посилення міжпредметних зв'язків алгебри з фізикою бажано пропонувати учням вправи на перетворення фізичних формул, на вираження одних змінних, які входять у формулу, через інші. Доцільно вживати різні змінні замість невідомих.

Наприклад, учням 7 класу можна запропонувати ситуацію: *Катер ішов зі швидкістю v упродовж часу t і пройшов відстань S.* Учні мають перетворити описану ситуацію у три різні задачі, вимогою яких буде знайти одну з величин $\left(S = vt,\ v = \dfrac{S}{t},\ t = \dfrac{S}{v}\right)$.

Аналогічні завдання можна запропонувати і для інших фізичних формул, наприклад, $\rho = \dfrac{m}{V}$, $Q = cm(t_2 - t_1)$, $S = \pi R^2$, $Q = I^2Rt$.

Наповнення задач практичним змістом може активізувати розумову діяльність учнів, сприяти розвитку системного мислення, здатності бачити всі можливі варіанти і здійснювати вибір оптимального, передбачати наслідки обраних рішень, формувати особисті мотиви навчання та позитивне ставлення, розвивати інтерес до алгебри. Прикладні задачі також можуть заохочувати школярів здобувати нові знання і збагачувати їх відомостями з різних галузей.

Але потрібно врахувати, що, пропонуючи прикладні задачі зі специфічним змістом, важливо, щоб цей зміст був знайомим для учнів або його можна було легко з'ясувати. Зміст не повинен відволікати увагу від математичної сутності.

Наведемо приклад. У темі «Відсотки» розглядають задачі на змішування (у яких ідеться про суміші, розчини, сплави). Розв'язування подібних задач потребує додаткового пояснення таких понять, як «процентна концентрація», «міцність», «проба», і певних застережень щодо їх використання.

Отже, щоб сформувати в учнів уміння розв'язувати задачі на змішування, їм бажано повідомити додатковий міжпредметний (фізика, хімія) матеріал. Зокрема такий:

1. Якщо в задачі йдеться про відношення об'ємів, то вживається термін «міцність». Наприклад: якщо на 10 л спирту припадає 4 л чистого безводного спирту, то кажуть, що міцність цього спирту 40°. Учням варто підкреслити, що 40° спирт і 40 % — це не одне й те саме.

2. Якщо змішати m грамів солі і n грамів води, то утвориться розчин, маса якого дорівнює $m + n$, але якщо змішати m літрів солі і n літрів води, то утвориться розчин, об'єм якого буде менший ніж $m + n$.

Наведемо ще низку задач, які посилюють міжпредметні зв'язки алгебри й інших дисциплін.

1. (Математика і фізика). *Обчисліть густину речовини, з якої виготовлено брусок об'ємом* V *і масою* m. *Користуючись таблицею 4.5.1, з'ясуйте, з якої речовини його виготовлено, якщо*:

1) $0{,}0064$ м$^3 \le V \le 0{,}0065$ м^3 і $17{,}3$ кг $\le m \le 17{,}5$ кг;

2) 12 см$^3 \le V \le 13$ см^3 і $228{,}12$ г $\le m \le 247{,}65$ г.

Таблиця 4.5.1

Назва речовини	Густина речовини	
	Густина, кг/м^3	Густина, г/м^3
алюміній	2700	2,7
бензин	710	0,71
береза	550	0,55
залізо	7800	7,8
золото	19 300	19,3

2. *Густина заліза* $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. *Знайдіть масу залізної плити, довжиною* 1,2 м, *шириною* $6 \cdot 10^{-1}$ м *і товщиною* $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м.

3. (Математика і хімія). *Визначте масу молекули хлору* Cl_2.

4. (Математика і біологія). *Використовуючи правило екологічної піраміди, визначте площу* (*у* м^2) *відповідного біогеоценозу, на якій може прогодуватися лев масою* 150 кг (*ланцюг живлення: трав'янисті рослини → парнокопитні → лев*). *Біомаса рослинності савани становить* 750 г/м^2.

Залучення учнів до дослідницьких і проєктних робіт прикладної спрямованості

Проєктні роботи — це можливість зацікавити учнів алгеброю, показати її застосування в житті, розширити кругозір учнів і, можливо, вийти за межі вивчення шкільної програми. Навчальна діяльність творчого характеру досить часто розкриває математичні задатки у здібних учнів і залучає до вивчення алгебри немотивованих.

Учням можна запропонувати задати певні залежності формулою, графіком чи таблицею. Наприклад, відстань, що проїде машина зі швидкістю 50 км/год за певний час, можна задати функцією $S = 50t$, а появу комети, що була зафіксована в 1985 році, можна розрахувати за допомогою формули $t = 1985 + 75x$ (якщо вона з'являється кожні 75 років). Учитель може запропонувати зробити плакат із поясненнями, візуалізацією і влаштувати у класі виставку таких робіт (або створити колективно сторінку «Функції» в соціальній мережі й розташувати фото цих плакатів там).

Або ж можна попросити учнів виконати проєктну роботу, де вони досліджуватимуть необхідність алгебраїчних знань у людей різних професій. Перелік професій визначений заздалегідь або можна досліджувати ту професію, яка цікава. Наприклад, розглянемо кілька прикладів застосування алгебраїчних знань у професійній діяльності.

Персональний фітнес-тренер. Веде облік клієнтів, повинен уміти знаходити індекс маси тіла клієнта, порівнювати його з нормою, розраховувати необхідний раціон із урахуванням особливостей людини, будувати графіки для відстеження результатів клієнтів. Якщо тренер працює як фізична особа — підприємець, то йому потрібно вміти вираховувати ціну індивідуального і групового тренування (вартість різних абонементів), яка містить у собі не лише час тренера, а й оренду приміщення, додаткове устаткування та його амортизацію, сплату податків, форс-мажори, підвищення кваліфікації тренера тощо. Для цього знадобляться знання про обчислення, конструювання буквених виразів, розв'язування рівнянь та нерівностей, складання таблиць і залежностей, читання та побудова графіків тощо. В ідеалі тренер має прогнозувати кількість клієнтів на груповому тренуванні (залежно від дня тижня чи характеру самого тренування) і якщо ресурси обмежені, не проводити невигідне для нього тренування. І тут допоможуть статистика, комбінаторика і теорія ймовірностей.

Дизайнер інтер'єру. Дизайнери перетворюють простір навколо себе, роблять його безпечнішим, зручнішим і привабливішим. І хоча найбільше вони потребують математичних знань про вимірювання, властивості геометричних фігур, але часто мусять обраховувати кількість і вартість матеріалу, щоб запропонувати клієнтам варіанти в різних цінових діапазонах, а ще перш ніж змінити ту чи іншу конструкцію, вони мають переконатися, що навантаження на неї не перевищить допустиме. І тут знову потрібні обчислення, конструювання виразів, розв'язування рівнянь і нерівностей, знання про функції та їх графіки. А знання з комбінаторики знадобляться під час презентації клієнтам всіх можливих рішень.

Література до розділу 4

1. Бевз Г. П. Методика викладання математики : навч. Посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.

2. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка. 7 клас : зошит-конспект. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2019. 80 с.

3. Буковська О. І., Глобін О. І., Васильєва Д. В., Сільвестрова І. А. Алгебра : підруч для 9 кллacy загальноосвітных навчальних закладів. Київ: Педагогічна думка, 2017. 320 с.

4. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. Модельна навчальна програма «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Alhebra.7-9.kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf

5. Васильєва Д. В. Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. *Проблеми сучасного підручника*. 2018. Вип. 19. С. 70 — 78.
URL: https://lib.iitta.gov.ua/713472/1/10.pdf

6. Васильєва Д. В., Вашуленко О. П., Волошена В. В. Методика компетентнісно орієнтованого навчання математики в ліцеї на рівні стандарту : методичний посібник. [Електронне видання]. Київ: КОНВІ ПРІНТ, 2021. 175 с.
URL: https://undip.org.ua/library/metodyka-kompetentnisno-oriientovanoho-navchannia-matematyky-v-litsei-na-rivni-standartu-metodychnyy-posibnyk/

7. Васильєва Д.В., Вашуленко О.П. Практикум з алгебри для 7–9 класів. — Київ : Видавничий дім «Освіта», 2024. — 37 с.
URL: https://lib.iitta.gov.ua/739765/

8. Глобін О. І., Буковська О. І., Васильєва Д. В., Сільвестрова І. А. Алгебра : підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ: Педагогічна думка, 2016. 212 с.
URL: http://matematuka.inf.ua/new_8_klas/globin_pidr_alg8/globin_alg8.html

Виробничо-практичне видання

БУРДА Михайло Іванович
ВАСИЛЬЄВА Дарина Володимирівна
ВАШУЛЕНКО Ольга Петрівна
ВОЛОШЕНА Вікторія Вікторівна
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ В ГІМНАЗІЇ

Методичний посібник

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.