МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Л.М. ЛОМОНОС, Н.П. МУРАНОВА,
Т.Г. ПІЛЯВСЬКА

МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Київ 2007

УДК 517.3 (076.5)
ББК В 161 р
Л 753

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Н.О. Вірченко* (Національний технічний університет України "КПІ");
канд. фіз.-мат. наук, доц. *І.Ю. Каніовська* (Національний авіаційний університет)

Затверджено методичною радою Інституту довузівської підготовки НАУ 24 квітня 2004 року.

Ломонос Л.М., Муранова Н.П., Пілявська Т.Г.
Л 753 **Математика.** Елементи інтегрального числення. Навчально-методичний посібник. - К.: НАУ, 2007. – 52 с.

У посібнику розглянуто первісні функції, найпростіші правила знаходження первісних, визначений інтеграл і його застосування для обчислення площ плоских фігур. Вміщено теоретичні відомості, приклади розв'язування задач і завдання для самостійної роботи.

Призначений для слухачів Інституту довузівської підготовки. Може бути використаний у школах з поглибленим вивченням математики, ліцеях, гімназіях природничо-математичного профілю та для самостійної підготовки до вступних іспитів у вищі навчальні заклади.

УДК 517.3 (076.5)
ББК В 161 р

ПЕРЕДМОВА

У посібнику викладено елементи інтегрального числення – важливого розділу математики. Основний акцент зроблено на розвиток у читача практичних навиків на основі розв'язування задач на обчислення площ плоских фігур. Успішне засвоєння цього розділу буде сприяти подальшому більш глибокому проникненню в вузівський курс вищої математики.

Розгляд кожного питання проводиться в наступному порядку:

1) вводяться основні поняття та означення;
2) у стислій формі (без доведення) наводяться основні формули;
3) наводяться приклади розв'язування основних типових задач та деяких нетрадиційних;
4) подаються завдання (з відповідями) для практичних занять та самостійного розв'язування.

Посібник з успіхом може бути використаний в системі довузівської підготовки при підготовці до вступу як до НАУ, так і до інших вищих навчальних закладів.

1. ОЗНАЧЕННЯ ПЕРВІСНОЇ ФУНКЦІЇ

Відома операція диференціювання, тобто операція відшукання похідної *f'(x)* від заданої функції *f(x)*. Існує і обернена по відношенню до диференціювання операція, її називають інтегруванням. Інтегрування функції *f(x)* – це операція відшукання для даної функції *f(x)* так званої первісної функції.

Означення 1. Первісною називають таку функцію *F(x)*, по відношенню до якої задана функція *f(x)* являється похідною:

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Наприклад, нехай задана функція $f(x) = x^3 + 3x$. В результаті диференціювання цієї функції ми отримуємо похідну $f'(x) = 3x^2 + 3$, а в результаті інтегрування – первісну:

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2,$$

тобто $F'(x) = x^3 + 3x = f(x)$.

При цьому ми скористалися відомим правилом диференціювання, але в оберненому порядку: насправді ми здогадались, який вигляд повинна мати функція *F(x)*, щоб при її диференціюванні отримати задану функцію *f(x)*.

Легко помітити, що за первісну можна взяти функцію

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 + C,$$

де C – довільна стала величина, оскільки відомо, що $C' = 0$.

Таким чином, первісна визначається по заданій функції неоднозначно. Це твердження являється основною властивістю первісної.

Якщо функція *F(x)* є первісною для функції *f(x)*, то при довільній сталій *C* функція

$$F(x) + C \tag{2}$$

також буде первісною для функції *f(x)*.

Враховуючи відомі формули для похідних, означення і основну властивість первісної, складемо таблицю 1, в якій в першому стовпці записані різні функції *f(x)*, в другому стовпці – відповідні цим функціям похідні $f'(x)$, а в третьому стовпці – відповідні функціям *f(x)* первісні $F(x) + C$.

Таблиця 1

	f(x)	*f'(x)*	*F(x)+C*
1	$a = const$	0	$ax + C$
2	$x^n,\ n \neq -1$	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
3	e^x	e^x	$e^x + C$
4	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\lvert x\rvert + C,\ x \neq 0$
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
6	$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$	$tg\, x + C$
9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-2\frac{\cos x}{\sin^3 x}$	$-ctg\, x + C$
10	$\frac{1}{x^2+1}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$arctg\, x + C$

Слід відзначити, що операція інтегрування в загальному випадку значно складніша, ніж операція диференціювання. При диференціюванні елементарних функцій завжди знову отримуються елементарні функції. Але не у кожної елементарної функції первісна являється елементарною функцією.

Наведемо три найпростіших правила знаходження первісних:

1^0. Якщо *F(x)* – первісна для *f(x)*, а *G(x)* – первісна для *g(x)*, то первісною для суми функцій *f(x)+g(x)* є функція *F(x)+G(x)*.

2^0. Якщо *F(x)* – первісна для *f(x)*, то первісною для функції $a \cdot f(x)$, де a – стала, являється функція $a \cdot F(x)$.

3^0. Якщо *F(x)* – первісна для *f(x)*, *a* і *b* – сталі, то первісною для функції $f(ax+b)$ є функція $\frac{1}{a}F(ax+b)$.

Всі три правила легко доводяться, якщо скористатися відомими правилами диференціювання:

1) $(F(x)+G(x))' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$;

2) $(a\cdot F(x))' = a\cdot F'(x) = a\cdot f(x)$;

3) $\left(\frac{1}{a}\cdot F(ax+b)\right)' = \frac{1}{a}\cdot F'(ax+b)\cdot(ax+b)' =$

$= \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$.

Зрозуміло, що розглянуті три правила ні в якому разі не вичерпують всього багатого арсеналу правил інтегрування, яким користуються в математичному аналізі. Вищезгадані правила приведені з метою дати лише початкові відомості про первісну.

Приклад 1. Довести, що функція $F(x) = 4-\cos x$ являється первісною для функції $f(x) = \sin x, x\in R$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції *F(x)*:

$$F'(x) = (4-\cos x)' = 4' - (\cos x)' = 0-(-\sin x) = \sin x = f(x).$$

Згідно з означенням (1) функція $F(x) = 4-\cos x$ являється первісною для функції *f(x)*=sin *x*.

Приклад 2. Знайти первісні функцій:

$a)\ f(x) = x^5+3x^2+2,\ x\in R;\quad б)\ f(x) = 3\cdot\sqrt[3]{x},\ x\in R;$

$в)\ f(x) = \frac{2}{x},\ x\in R^+;\quad г)\ f(x) = \sin^2 x,\ x\in R.$

Розв'язання. Скористаємося правилами інтегрування і таблицею 1.

а) Знайдемо первісні доданків, користуючись пунктом 2 таблиці 1, а потім застосуємо правило 1^0. Функція $F(x) = \frac{x^6}{6}+\frac{3x^3}{3}+2x+C = \frac{x^6}{6}+x^3+2x+C$ являється, таким чином, первісною заданої функції. Дійсно,

$$F'(x) = \left(\frac{x^6}{6}+x^3+2x+C\right)' = \frac{1}{6}\cdot 6x^5+3x^2+2 = x^5+3x^2+2 = f(x).$$

б) Представимо задану функцію у вигляді $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}}$ і застосуємо таблицю 1, пункт 2. Отримаємо функцію $F(x) = 3\cdot\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C = \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}}+C = \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$, яка являється первісною для функції $f(x) = 3\cdot\sqrt[3]{x}$. Дійсно,

$$F'(x) = \left(\frac{9}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}+C\right)' = \frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}} = 3\cdot\sqrt[3]{x} = f(x).$$

в) Скориставшись правилом 2^0 і пунктом 4 таблиці 1, запишемо первісну у вигляді $F(x) = 2\ln x + C$. Дійсно,

$$F'(x) = (2\ln x+C)' = 2(\ln x)'+C' = 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x} = f(x).$$

г) Перетворимо задану функцію:

$$f(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Застосувавши правила 1^0, 2^0, 3^0, а також пункт 7 таблиці 1, отримаємо первісну $F(x) = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+C = \frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

Дійсно, $F'(x) = \left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C\right)' = \frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}\cos 2x+0 =$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \sin^2 x = f(x)$.

Відповідь: а) $\frac{x^6}{6}+x^3+2x+C$; б) $\frac{9}{4}\sqrt[3]{x^4}+C$;

в) $2\ln x+C$; г) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$.

Приклад 3. Знайти для функції $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$.

Розв'язання. Кожна первісна для функції $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ записується у вигляді (пункт 8 таблиці 1)

$$F(x)=tg\,x+C. \qquad (3)$$

Для знаходження довільної сталої C підставимо координати точки M в (3) і отримаємо рівняння :

$$0=tg\frac{\pi}{4}+C,$$

звідки

$$C=-tg\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow C=-1.$$

Відповідь: $F(x)=tg\,x-1$.

Приклад 4. Знайти функцію $f(x)$, якщо її похідна $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}$ і $f(1)=-1$.

Розв'язання. Знаходимо первісну для заданої функції $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}=2(5-x)^{-\frac{1}{2}}$, користуючись правилами інтегрування 2^0 і 3^0, а також пунктом 2 таблиці 1, отримуємо:

$$f(x)=\frac{2(5-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\cdot(-1)+C=-4\sqrt{5-x}+C,\ x\in(-\infty;5).$$

Дійсно, $f'(x)=(-4\sqrt{5-x})'+C'=-4\cdot\dfrac{1\cdot(-1)}{2\cdot\sqrt{5-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}$.

Для знаходження довільної сталої C скористаємось умовою $f(1)=-1$:

$$-1=-4(\sqrt{5-1})+C\Leftrightarrow -1=-4\cdot 2+C\Leftrightarrow C=7.$$

Таким чином, шукана функція має вигляд

$$f(x)=-4\sqrt{5-x}+7.$$

Відповідь: $7-4\sqrt{5-x}$.

Приклади для практичних занять і самостійної роботи

1. Довести, що функція $F(x)$ являється первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку, якщо:

1) $F(x)=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$, $\quad f(x)=\sqrt[3]{x}$, $\quad x\in R^+$.

2) $F(x)=tg\,x-2$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3) $F(x)=14-\dfrac{1}{x}$, $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $\quad x>0$.

4) $F(x)=3x^3-\dfrac{1}{2}x^2+1$, $\quad f(x)=9x^2-x$, $\quad x\in R$.

5) $F(x)=\sin 3x+5$, $\quad f(x)=3\cos 3x$, $\quad x\in R$.

2. Знайти первісні функцій.

1) $f(x)=2x+3x^2$. **Відповідь:** x^2+x^3+C.

2) $f(x)=x^{-5}+x^{-2}$. **Відповідь:** $-\left(\dfrac{1}{4}x^{-4}+x^{-1}+C\right)$.

3) $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1}$. Вказівка. Поділити чисельник і знаменник дробу на $x-1$. **Відповідь:** $\dfrac{1}{3}(x-1)^3+C,\ x\neq 1$.

4) $f(x)=\sqrt{2x}$. **Відповідь:** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}+C$.

5) $f(x)=x+\frac{1}{x}$. **Відповідь:** $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+C,\ x\neq 0.$

6) $f(x)=\frac{3}{x+5}$. **Відповідь:** $3\ln|x+5|+C,\ x\neq -5.$

7) $f(x)=x^{3+\sqrt{2}}$. **Відповідь:** $\frac{x^{4+\sqrt{2}}}{4+\sqrt{2}}+C.$

8) $f(x)=2\sin x+\cos 3x$. **Відповідь:** $-2\cos x+\frac{1}{3}\sin 3x+C.$

9) $f(x)=\frac{2}{3\sin^2 2x}$. **Відповідь:** $-\frac{1}{3}ctg2x+C.$

10) $f(x)=\frac{3}{\cos^2 2x}$. **Відповідь:** $\frac{3}{2}tg2x+C.$

3. Для заданої функції *f(x)* знайти первісну *F(x)*, графік якої проходить через задану точку $M(x_0;y_0)$.

1) $f(x)=x^4;\quad M(-1;2)$. **Відповідь:** $\frac{x^5+11}{5}$.

2) $f(x)=\sin 2x;\quad M(0;1)$. **Відповідь:** $\frac{3-\cos 2x}{2}$.

3) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 3x};\quad M\left(\frac{\pi}{12};-1\right)$. **Відповідь:** $-\frac{1}{3}(2+ctg3x).$

4) $f(x)=x^{-4};\quad M(2;-3)$. **Відповідь:** $-\frac{71x^3+8}{24x^3}$.

4. Знайти функцію *F(x)*, якщо відомо, що $F'(x)=4x^3-3x^2$ і що *F(1)=3*.

Відповідь: $F(x)=x^4-x^3+3.$

5. Для функції $f(x)=\cos 4x$ знайти первісну *F(x)*, якщо відомо, що $F\left(\frac{\pi}{24}\right)=-1$.

Відповідь: $F(x)=\frac{1}{8}(2\sin 4x-9).$

2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ ПЕРВІСНОЇ

Розглянемо деяку функцію *f(x)*. Нехай для визначеності будемо вважати, що функція *f(x)* зростаюча. Ця умова необов'язкова, головне, щоб функція *f(x)* була неперервна і визначена на заданому проміжку. На рис.1 заштрихована геометрична фігура (так звана криволінійна трапеція), обмежена графіком функції *f(x)*, відрізком [*a; x*] осі Ox і перпендикулярами, проведеними в точках *a* та *x*. Нехай точка *a* фіксована; точка *x* нефіксована, вона може приймати значення від *a* і більше (в границях області визначення функції). Очевидно, що площа заштрихованої криволінійної трапеції являється функцією від *x*, позначимо її *S(x)*.

Розглянемо далі приріст Δx незалежної змінної. Відрізку $[a;x+\Delta x]$ відповідає площа $S(x+\Delta x)$ (рис. 2). Позначимо $\Delta S(x)=S(x+\Delta x)-S(x)$. Приріст $\Delta S(x)$ є, очевидно, площею криволінійної трапеції, яка заштрихована. Із рис. 2 видно, що площа $ADEF<\Delta S(x)<$ площі $ABCF$, але площа $ADEF$ дорівнює $f(x)\cdot\Delta x$, а площа $ABCF$ дорівнює $f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$, тобто

$$f(x)\cdot\Delta x<\Delta S(x)<f(x+\Delta x)\cdot\Delta x\Leftrightarrow f(x)<\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}<f(x+\Delta x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}-f(x)<\Delta f(x).$$

Тут позначили $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$. Перейдемо до границі при $\Delta x\to 0$. В силу неперервності *f(x)* робимо висновок, що $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$ і тому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}-f(x)\right)=0.$$

Оскільки *f(x)* не залежить від Δx, то можемо записати:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=f(x), \tag{4}$$

а за означенням похідної

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x}=S'(x). \tag{5}$$

Зрівнюючи вирази (4) і (5), отримуємо

$$f(x)=S'(x). \tag{6}$$

Рівність (6) і дає нам геометричний зміст первісної: **первісна** функції *f(x)*, **яка розглядається в точці** *x*, **є площею криволінійної трапеції**, визначеної графіком функції *f(x)* на відрізку [*a; x*] осі Ох.

Нехай тепер *F(x)* – деяка первісна функції *f(x)*, розглядувана в точці *x*. Згідно (5) можна записати: $S(x)=F(x)+C$.

Знайдемо сталу *C*, враховуючи, що $S(a)=0$:

$S(a)=F(a)+C=0$, звідки $C=-F(a)$. Таким чином,

$$S(x)=F(x)-F(a), \tag{7}$$

тобто, якщо *F(x)* – деяка первісна функції *f(x)*, то площею *S(x)* криволінійної трапеції, визначеної графіком функції *f(x)* на відрізку [*a; x*], є різниця $F(x)-F(a)$.

3. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Як було показано в п. 2, різниця значень первісної в двох будь-яких точках (7) залежить тільки від вибору цих точок і від вигляду заданої функції *f(x)*. Візьмемо точки *a* і *b* і розглянемо приріст первісної $F(b)-F(a)$.

Цей приріст відіграє важливу роль в апараті математичного аналізу і називається **визначеним інтегралом**.

Означення 2. Інтегралом від *a* до *b* функції *f(x)* називається приріст первісної *F(x)* цієї функції:

$$F(b)-F(a).$$

Визначений інтеграл позначається так:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

Формула (8) читається наступним чином: "інтеграл від а до бе, еф від ікс де ікс". Числа *a* і *b* **називаються границями** інтегрування, *a* – нижньою, *b* – верхньою. Знак $\int$ називається **знаком інтеграла.** Функція *f(x)* називається **підінтегральною функцією**, а змінна *x* – **змінною інтегрування.** Проміжок [*a; b*] називається **проміжком інтегрування.** При цьому слід відмітити, що може бути $a>b$, $a<b$, $a=b$.

Таким чином, якщо *F(x)* – одна з первісних функцій *f(x)*, то за означенням інтеграла, враховуючи (8), одержуємо:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b. \tag{9}$$

Рівність (9) відома в математичному аналізі як **формула Ньютона-Лейбніца.**

У відповідності з геометричним представленням первісної робимо висновок, що інтегралом від *a* до *b* функції *f(x)* є площа криволінійної трапеції, визначеної графіком функції *f(x)* на відрізку [*a; b*].

На основі правил знаходження первісних можна сформулювати основні правила інтегрування:

1^0. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=F(x)\Big|_a^b+G(x)\Big|_a^b. \tag{10}$$

2^0. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx=k\cdot F(x)\Big|_a^b, \tag{11}$$

де *k* – стала.

3^0. Справедлива наступна формула заміни змінної:

$$\int_a^b f(kx+p)dx=\frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)dt=\frac{1}{k}F(t)\Big|_{t=ka+p}^{t=kb+p}, \tag{12}$$

або

$$\int_a^b f(kx+p)dx=\frac{1}{k}F(kx+p)\Big|_{x=a}^{x=b}, \tag{13}$$

де $t = kx + p$, k і p – сталі, причому нові границі інтегрування отримуються за формулою $t = kx + p$ заміною x на a і на b.

$$4^0.\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (14)$$

$$5^0.\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx, \text{ якщо } c \in [a;b]. \qquad (15)$$

$$6^0.\ \int_a^a f(x)dx = 0. \qquad (16)$$

7^0. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[-a;a]$, $a>0$, і являється парною функцією, тобто $f(-x) = f(x),\ x \in [-a;a]$,

то
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx. \qquad (17)$$

8^0. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[-a;a]$, $a>0$, і являється непарною функцією, тобто $f(-x) = -f(x)$,

$x \in [-a;a]$, то
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0. \qquad (18)$$

Наведемо тепер декілька прикладів обчислення інтегралів за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 (x^2 + 2)dx.$$

Розв'язання. Використовуючи правила 1^0, 2^0, таблицю 1 для первісних та формулу (9), одержуємо:

$$\int_0^1 (x^2+2)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_0^1 2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot(1^3-0) + 2\cdot(1-0) =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 = 2\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $2\frac{1}{3}$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{0,5}\left(4x - \frac{1}{2x+1}\right)dx.$$

Розв'язання. $\displaystyle\int_0^{0,5}\left(4x - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \int_0^{0,5} 4xdx - \int_0^{0,5}\frac{dx}{2x+1} =$

$$= 2x^2\Big|_0^{0,5} - \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_0^{0,5} = \left(\frac{1}{2} - 0\right) - \frac{1}{2}(\ln 2 - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \ln 2) = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$.

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx.$$

Розв'язання. Обчислимо даний інтеграл, використовуючи заміну змінної за правилом 3^0. Нехай $t = \frac{\pi}{3} - 3x$, тоді нижня границя інтегрування по новій змінній буде $t_н = \frac{\pi}{3} - 3\cdot 0 = \frac{\pi}{3}$, а верхня $t_в = \frac{\pi}{3} - 3\cdot\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3}$. Отже,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx = -\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{5\pi}{3}} \sin t dt = \frac{1}{3}\cos t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{-\frac{5\pi}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Відповідь: 0.

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt.$$

Розв'язання. Перед обчисленням заданого інтеграла необхідно спочатку перетворити підінтегральну функцію:

$$(\sin 2t - \cos 2t)^2 = \sin^2 2t - 2\sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t =$$
$$= 1 - 2\sin 2t \cdot \cos 2t = 1 - \sin 4t.$$

Таким чином,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin 2t - \cos 2t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 4t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt =$$

$$= t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\cos 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{4}\left(\cos 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \cos 0\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(-1-1) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt$ може бути обчислений за допомогою заміни $x = 4t$, при цьому нижня границя буде дорівнювати 0, а верхня π, тобто

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin x dx = -\frac{1}{4}\cos x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{4}(-1-1) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx.$$

Розв'язання.

Оскільки $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2}|\sin x|$, то

$$\int_0^{4\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{4\pi} |\sin x| dx.$$

Скориставшись основним правилом інтегрування (15), маємо

$$\int_0^{4\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx =$$

$$= (-\cos x)\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos x)\Big|_{2\pi}^{3\pi} - (-\cos x)\Big|_{3\pi}^{4\pi} =$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Відповідь: 8.

Приклад 6. Обчислити інтеграл.

$$\int_0^2 |1 - 5x| dx.$$

Розв'язання. Оскільки $|1 - 5x| = \begin{cases} 1 - 5x, & x \le \frac{1}{5} \\ 5x - 1, & x > \frac{1}{5} \end{cases}$, то

$$\int_0^2 |1 - 5x| dx = \int_0^{\frac{1}{5}} (1 - 5x) dx + \int_{\frac{1}{5}}^2 (5x - 1) dx = \left(x - 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{5}} +$$

$$+ \left(5\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{2} = \frac{1}{5} - \frac{5 \cdot 1}{25 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{2} - 2 - \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 25} + \frac{1}{5} = \frac{41}{5}.$$

Відповідь: $\frac{41}{5}$.

Приклади для практичних занять і самостійної роботи

Група А

1. $\int\limits_{-1}^{1}(x+2)dx.$ **Відповідь:** 4.

2. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}.$ **Відповідь:** $\frac{\pi}{2}$.

3. $\int\limits_{3}^{-2}\left(x^2-\frac{x}{2}\right)dx.$ **Відповідь:** $-\frac{125}{12}$.

4. $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{4}\left(x^2-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x\sqrt{x}}\right)dx.$ **Відповідь:** $-27\frac{21}{32}$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi}\sin x dx.$ **Відповідь:** 2.

6. $\int\limits_{0}^{1}e^{kx}dx.$ **Відповідь:** $\frac{1}{k}(e^k-1)$.

7. $\int\limits_{0}^{3}(1+2x)^9dx.$ **Відповідь:** $\frac{7^{10}-1}{20}$.

8. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{3-2x}.$ **Відповідь:** $\frac{1}{2}\ln 5$.

9 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{2dx}{\cos^2 x}.$ **Відповідь:** 2.

Група Б

1. $\int\limits_{-\pi}^{2\pi}\sin\frac{x}{3}dx.$ **Відповідь:** 3.

2. $\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}.$ **Відповідь:** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

3. $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^3+x+x^2+1}{1+x^2}dx.$ **Відповідь:** 4.

4. $\int\limits_{3}^{-18}\sqrt[3]{2-\frac{x}{3}}dx.$ **Відповідь:** $-33{,}75$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi}\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)dx.$ **Відповідь:** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2 2x\,dx.$ **Відповідь:** $\frac{3\pi}{4}$.

7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx.$ **Відповідь:** $\frac{1}{2}$.

8. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(tg\,x+ctg\,x)^{-1}dx.$ **Відповідь:** $\frac{1}{8}$.

9. $\int\limits_{0}^{\pi}\sin 2x\cdot\cos 3x\,dx.$ **Відповідь:** $-\frac{4}{5}$.

10. $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{9+16x}}.$ **Відповідь:** $\frac{11}{96}$.

11. $\int\limits_{0}^{2}|1-x|dx.$ **Відповідь:** 1.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В ГЕОМЕТРІЇ

Як було показано в п. 3, визначений інтеграл являє собою, з точки зору геометрії, площу криволінійної трапеції. Крім того, відомо, що з точки зору фізики визначений інтеграл може бути тлумачений як робота, виконана силою *f(x)* на відрізку $[a; b]$.

Можливість використання визначеного інтеграла в прикладних задачах геометрії та фізики визначає те практично важливе місце, яке посідає інтеграл при вивченні курсу математичного аналізу.

Обчислення площ плоских фігур

1^0. Площа плоскої фігури, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, яка приймає тільки невід'ємні значення, віссю Ох $(y = 0)$ та двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, (рис. 1), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad \text{або} \quad S = \int_a^b y(x)dx. \qquad (19)$$

2^0. Площа плоскої фігури, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, яка приймає лише недодатні значення, віссю Ох $(y = 0)$ та двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, (рис. 3), обчислюється за формулою:

$$S = -\int_a^b f(x)dx. \qquad (20)$$

3^0. Розглянемо фігуру, обмежену неперервною функцією *f(x)*, $x \in [a; b]$, що приймає як додатні, так і від'ємні значення, (рис. 4). Нехай, наприклад, $a < c < d < b$, $f(c) = f(d) = 0$; на множині $[a; c) \cup (d; b]$ функція *f(x)* приймає тільки додатні значення, а на інтервалі $(c; d)$ – тільки від'ємні значення. Якщо позначити через S_1 величину площі між графіком функції $f(x)$, $x \in [a; c]$ (відповідно S_2 при $x \in [c; d]$, S_3 при $x \in [d; b]$) і віссю Ох, то

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx, \quad S_2 = -\int_c^d f(x)dx, \quad S_3 = \int_d^b f(x)dx.$$

Для відрізка $[a; b]$ маємо

$$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3. \qquad (21)$$

Таким чином, якщо *f(x)*, $x \in [a; b]$, приймає як додатні так і від'ємні значення, то число, що дорівнює визначеному інтегралу $\int_a^b f(x)dx$, співпадає з величиною, що дорівнює сумі площ фігур між графіком функції *f(x)*, $x \in [a; b]$ та віссю Ох, що знаходяться вище осі Ох, мінус сума площ фігур між графіком функції $y = f(x), x \in [a, b]$ та віссю Ох, що знаходяться нижче осі Ох. Таким чином, при обчисленні сумарних площ треба виконувати правило знаків: площі, що знаходяться над віссю Ох, беруться зі знаком плюс, а площі, що розташовані під віссю Ох, зі знаком мінус.

4^0. Площа плоскої фігури, обмеженої двома неперервними кривими $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, причому всюди на відрізку $[a; b]$ $f_2(x) > f_1(x)$, і двома прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 5), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (22)$$

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y_1 = e^x$, $y_2 = 0$, $x = 0$, $x = 3$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, площу якої треба знайти (рис. 6). Згідно з формулою (17) одержуємо:

$$S = \int_0^3 e^x dx = e^x\Big|_0^3 = \left(e^3 - 1\right)(кв.од.).$$

Відповідь: $(e^3 - 1)$ *кв.од.*

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ і віссю Ох.

Розв'язання. Зобразимо графічно задану фігуру (рис. 7). Для обчислення площі цієї фігури необхідно спочатку знайти точки перетину параболи з віссю Ох:

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, в нашому випадку відрізок інтегрування $[0;4]$, тобто $a = 0$, $b = 4$. Тепер, згідно з формулою (17), одержуємо:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{4}{2}(16-0) - \frac{1}{3}(4^3 - 0) =$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \ (кв.\,од.).$$

Відповідь: $\frac{32}{3}$ *кв. од.*

Приклад 3. Знайти площу, обмежену синусоїдою $y = \sin x$ на відрізку $[0;2\pi]$ і віссю Ох.

Розв'язання. Задана фігура графічно зображена на рис. 8. З рисунка видно, що частина шуканої площі розташована над віссю Ох (на відрізку $[0;\pi]$) і її беремо зі знаком плюс, а частина площі розташована під віссю Ох (на відрізку $[\pi;2\pi]$) і її беремо, згідно з правилом знаків, зі знаком мінус, тобто

$$S = S_1 + S_2,\ де\ S_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx;\ S_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx.$$

Таким чином,

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4\,(кв.од.).$$

Якби ми застосували формулу (17) без урахування правила знаків, то отримали б абсурдний результат:

$$S = \int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0\,(кв.од.).$$

Такий результат вийшов тому, що на відрізку $[0;2\pi]$ функція $y = \sin x$ змінює знак. Тому слід розбивати цей відрізок на два: $[0;\pi]$ та $[\pi;2\pi]$, на кожному з яких функція зберігає свій знак (на першому – плюс, на другому – мінус), що ми вище і виконали.

Відповідь: 4 *кв.од.*

Приклад 4. Обчислити площу, обмежену прямою $x = 4$, кривою $y = 3x^2 - 6x$ та віссю Ох на відрізку $[0;4]$.

Розв'язання. Побудуємо графіки заданих ліній (рис. 9). Парабола $y = 3x^2 - 6x$ перетинає вісь Ох в точках (0; 0) і (2; 0), причому точка (2; 0) належить відрізку інтегрування [0; 4]. Розіб'ємо його на два: [0; 2] і [2; 4]. На кожному з цих відрізків функція $y = 3x^2 - 6x$ зберігає свій знак: на першому – від'ємний, на другому – додатній.

Користуючись формулою (17) і правилом знаків, одержуємо:

$$S = -\int_0^2 (3x^2 - 6x)dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x)dx = -(x^3 - 3x^2)\Big|_0^2 + (x^3 - 3x^2)\Big|_2^4 =$$

$$= -(8 - 3\cdot 4) - (4^3 - 2^3 - 3(4^2 - 2^2)) = 24\,(кв.од.).$$

Відповідь: 24 *кв.од.*

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1(x) = 5^x$, $y_2(x) = 3^{-x}$, $x = 2$.

Розв'язання. Графічно задана фігура зображена на рис. 10. Задані криві перетинаються при $x = 0$, а тому проміжок інтегрування в даному випадку буде [0; 2].

Використовуючи формулу (18), отримаємо:

$$S=\int_0^2(5^x-3^{-x})dx=\frac{5^x}{\ln 5}\bigg|_0^2+\frac{3^{-x}}{\ln 3}\bigg|_0^2=\frac{5^2-1}{\ln 5}+\frac{3^{-2}-1}{\ln 3}=$$

$$=\left(\frac{24}{\ln 5}-\frac{8}{9\ln 3}\right)(кв.од.).$$

Відповідь: $\left(\frac{24}{\ln 5}-\frac{8}{9\ln 3}\right)$ *кв.од.*

Приклад 6. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1(x)=-2(x^2-x-2)$ і $y_2(x)=x+1$ для $x\in[-1;2]$.

Розв'язання. Задана фігура зображена на рис. 11. З рисунка видно, що на відрізку [-1; x_0] графік кривої $y_1(x)$ знаходиться вище графіка кривої $y_2(x)$ $(y_1\ge y_2)$, а на відрізку [x_0; 2] графік $y_2(x)$ знаходиться вище графіка кривої $y_1(x)$ $(y_1\le y_2)$. Тут x_0 – абсциса точки перетину графіків заданих ліній, яка розташована всередині інтервала (-1; 2). Неважко визначити, що $x_0=\frac{3}{2}$. Отже, шукана площа $S=S_1+S_2$, де

$$S_1=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(y_1(x)-y_2(x))dx;\quad S_2=\int_{\frac{3}{2}}^{2}(y_2(x)-y_1(x))dx.$$

Таким чином,

$$S=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}(-2x^2+2x+4-x-1)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(x+1+2x^2-2x-4)dx=$$

$$=\int_{-1}^{\frac{3}{2}}\left(-2x^2+x+3\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2x^2-x-3)dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+3x\right)\bigg|_{-1}^{\frac{3}{2}}+$$

$$+\left(2\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x\right)\bigg|_{\frac{3}{2}}^{2}=\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8}+\frac{9}{8}+\frac{9}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+3\right)+$$

$$+\left(2\cdot\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-6-2\cdot\frac{27}{24}+\frac{9}{8}+3\cdot\frac{3}{2}\right)=\frac{71}{12}(кв.од.).$$

Відповідь: $\frac{71}{12}$ *кв.од.*

Приклад 7. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1(x)=2\sin^2\frac{x}{2}$ і $y_2(x)=\frac{2}{\pi}|x-\pi|$.

Розв'язання. Графічно задані лінії зображені на рис. 12, з якого видно, що задані лінії можуть перетинатися в точках з абсцисами $x_1=\frac{\pi}{2}$ і $x_2=\frac{3\pi}{2}$. Переконаємося в цьому перевіркою:

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^2\frac{\pi}{4}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1\ \text{ і }\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\left|\frac{\pi}{2}-\pi\right|=1;$$

$$y_1\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin^2\frac{3\pi}{4}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1\ \text{ і }\ y_2\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}\left|\frac{3\pi}{2}-\pi\right|=1.$$

Враховуючи, що $|x-\pi|=x-\pi$ для $x\ge\pi$ і $|x-\pi|=\pi-x$, *якщо* $x<\pi$, а також застосовуючи формулу (18), отримуємо:

$$S=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi}(\pi-x)\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left(2\sin^2\frac{x}{2}-\frac{2}{\pi}(x-\pi)\right)dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(1-\cos x-2+\frac{2}{\pi}x\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left(1-\cos x-\frac{2}{\pi}x+2\right)dx=$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}x-\cos x-1\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\left(3-\cos x-\frac{2}{\pi}x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{\pi}-\sin x-x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left(3x-\sin x-\frac{x^2}{\pi}\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=\left(\pi-\sin\pi-\pi-\frac{\pi}{4}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(3\cdot\frac{3\pi}{2}-3\pi-\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\pi-\frac{9\pi}{4}+\pi\right)=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)+$$

$$+\left(\frac{9\pi}{2}-3\pi+1+\pi-\frac{9\pi}{4}\right)=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)(кв.\ од.).$$

Відповідь: $\left(2+\frac{\pi}{2}\right)$ *кв. од.*

Приклад 8. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y=(2+\cos x)\sin^2 x$, прямими $x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}$ та віссю абсцис.

Розв'язання. В даному прикладі задану фігуру графічно зображати необов'язково, оскільки очевидно, що функція $y=(2+\cos x)\sin^2 x$ невід'ємна для всіх $x\in D(f)$, тому шукана площа буде:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\sin^2 x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2x+\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos x\cdot\cos 2x}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2x+\frac{\cos x}{2}\right)dx-\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos 3x+\cos x)\,dx=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\sin x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x+\sin x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin(-\pi)+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)=(\pi+1)-\frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{3}\right)=$$

$$=\left(\pi+\frac{2}{3}\right)\ кв.\ од.$$

Відповідь: $\left(\pi+\frac{2}{3}\right)$ *кв. од.*

Приклад 9. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1(x)=1+\sin x$ і $y_2(x)=2-\frac{1}{4}(|x-7|+|x-3|)$.

Розв'язання. На даному прикладі продемонструємо той випадок, коли побудова заданої фігури (рис. 13) обов'язкова, оскільки з рисунка видно, що по-перше, не треба аналітично шукати точки перетину двох заданих кривих, по-друге, шукана площа визначається обчисленням інтеграла (18) на проміжку інтегрування $[\pi;2\pi]$, на якому задана функція $y_2(x)$ має найпростіший вигляд, а саме $y_2(x)=1$, оскільки $[\pi;2\pi]\in[3;7]$. Отже маємо:

$$S=\int_{\pi}^{2\pi}(1-(1+\sin x))dx=-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx=\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=\cos 2\pi-\cos\pi=1-(-1)=2\ (кв.\ од.)$$

Відповідь: 2 *кв. од.*

Приклад 10. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y_1=x^2$; $y_2=4x^2$; $y_3=1$; $y_4=4$.

Розв'язування. Фігура, площа якої підлягає визначенню, симетрична відносно осі Оу (рис. 14), а тому достатньо визначити площу її половини, тобто площу криволінійної трапеції *ABCD* $(x>0)$. Для обчислення площі криволінійної трапеції *ABCD* зручно ввести функції, обернені даним: $y_1(x)=\sqrt{x}$, $y_2(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. Фігура, обмежена графіками цих функцій та прямими $x=1, x=4$, конгруентна криволінійній трапеції *ABCD*, а тому можна обчислити площу S_T криволінійної трапеції *ABCD* за формулою (20):

$$S_T = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{x}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{1}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1) =$$

$$= \frac{1}{3}(2^{2\cdot\frac{3}{2}} - 1) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} \ (кв.\,од.).$$

Площа S заданої фігури буде: $S = 2S_T = \frac{14}{3}$ *кв. од.*

Відповідь: $\frac{14}{3}$ *кв. од.*

Приклад 11. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=-x^2+1$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з точки $(0; 2)$.

Розв'язання. Нехай $M_1(x_0; y_0)$ і $M_2(-x_0; y_0)$ – точки дотику дотичних до параболи $y=-x^2+1$ (рис. 15). Як відомо, рівняння дотичної до заданої параболи має вигляд

$$y - y_0 = -2x_0(x - x_0). \qquad (23)$$

Знайдемо координати точки дотику з умов: по-перше, точка дотику належить параболі, по-друге, дотична проходить через точку $(0; 2)$, тобто отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = -x_0^2+1, \\ 2-y_0 = -2x_0(0-x_0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -x_0^2+1, \\ y_0 = 2-2x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x_0^2 = -x_0^2+1, \\ y_0 = -x_0^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = 1, \\ y_0 = -x_0^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, $M_1(-1; 0)$ і $M_2(1; 0)$ – шукані точки дотику. Рівняння дотичних, відповідно з (23), запишуться у вигляді: $y=2(x+1)$ і $y=-2(x-1)$.

Тепер нам необхідно обчислити площу фігури M_1PM_2K, симетричної відносно осі Оу. Як вже відзначалось, достатньо обчислити площу її половини M_1PK, обмеженої дотичною $y=2(x+1)$, параболою $y=-x^2+1$ і віссю Оу $(x=0)$ на проміжку інтегрування $[-1; 0]$. На підставі формули (20) маємо

$$S = 2\int_{-1}^{0}(2(x+1)-(-x^2+1))dx = 2\int_{-1}^{0}(2x+x^2+1)dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^{0} = 2\left(0 - \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - (-1)\right) = 2\left(\frac{1}{3}-1+1\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \ (кв.\,од.).$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$ *кв. од.*

Приклад 12. Обчислити площу фігури, обмеженої віссю ординат, параболою $y=-3x^2-12x$ і дотичною до цієї параболи, проведеною в точці з абсцисою $x_0=-1$.

Розв'язання. Дотична проходить через точку $(-1; 9)$ і має кутовий коефіцієнт $y'(-1) = (-6x-12)\big|_{x=-1} = -6$. Її рівняння: $y=-6(x+1)+9=-6x+3$.

Шукана площа фігури (рис. 16) дорівнює:

$$S = \int_{-1}^{0}(-6x+3)dx - \int_{-1}^{0}(-3x^2-12x)dx = \int_{-1}^{0}(3x^2+6x+3)dx =$$

$$= 3\int_{-1}^{0}(x+1)^2dx = (x+1)^3\Big|_{-1}^{0} = 1(кв.од.).$$

Відповідь: 1 *кв.од.*

Приклад 13. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y_1 = 2\sqrt{x}$ і дотичною, проведеною до графіка функції $y_2 = 1 + \ln x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції $y_2 = 1 + \ln x$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$ буде мати вигляд: $y - 1 = x - 1$ або $y = x$. Фігура, площу якої належить визначити, заштрихована на рис. 17. Абсцису точки A перетину графіків функцій $y_1 = 2\sqrt{x}$ і $y = x$ знаходимо з рівняння $x = 2\sqrt{x}$. Його розв'язки: $x = 0$ *і* $x = 4$. Отже, точка A має координати (4; 4).

Шукана площа:

$$S = \int_0^4 (2\sqrt{x} - x)dx = \left(2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}\,(кв.од.).$$

Відповідь: $\frac{8}{3}$ *кв.од.*

Приклад 14. Обчислити площу S фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \frac{|4 - x^2|}{4}$ та $y_2 = 7 - |x|$.

Розв'язання. Будуємо графіки даних функцій (рис. 18), враховуючи, що функції парні і

$$\frac{|4 - x^2|}{4} = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{4}, \text{ якщо } x \ge 2, \\ \dfrac{4 - x^2}{4}, \text{ якщо } 0 \le x < 2, \end{cases}$$

$$7 - |x| = 7 - x, \text{ якщо } x \ge 0.$$

Враховуючи симетричність фігури відносно осі Oy, досить обчислити площу частини, що лежить праворуч від цієї осі. Із системи рівнянь $\begin{cases} y = \dfrac{x^2 - 4}{4}, \\ y = 7 - x \end{cases}$ знаходимо координати точки B. Система має два розв'язки: (4; 3) і (-8; 15). Зрозуміло, що точка B має координати (4; 3). Другий розв'язок системи – це друга точка перетину прямої $y = 7 - x$ з параболою $y = \frac{x^2 - 4}{4}$.

Площу фігури $ABDE$ знаходимо як різницю площі трапеції $ABCO$ та суми площ двох криволінійних трикутників OED і DBC. Отримуємо:

$$S_{ABCO} = \frac{7 + 3}{2}\cdot 4 = 20;$$

$$S_{OED} = \int_0^2 \frac{4 - x^2}{4}dx = \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3};$$

$$S_{DBC} = \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{4}dx = \left(\frac{x^3}{12} - x\right)\Bigg|_2^4 = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3};$$

$$S_{ABDE} = S_{ABCO} - (S_{OED} + S_{DBC}) = 20 - \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3}\right) = 16\,(кв.од.)$$

$$S = 2\cdot S_{ABDE} = 2\cdot 16 = 32\;(кв.\,од.).$$

Відповідь: 32 *кв. од.*

Приклад 15. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = -x - 16$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат.

Розв'язання. Нехай $M_1(x_0; y_0)$ і $M_2(x_0; -y_0)$ – точки дотику дотичних до параболи $y^2 = -x - 16$, проведених з початку координат (рис. 19). Знайдемо рівняння цих дотичних. Рівняння дотичної до заданої параболи має вигляд: $x - x_0 = -2y_0(y - y_0)$.

Оскільки дотична проходить через початок координат і має спільну точку з параболою, то для координат точок дотику маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -x_0 = 2y_0^2, \\ x_0 = -y_0^2 - 16. \end{cases}$$

Система має два розв'язки: $x_0 = -32,\ y_0 = 4$ і $x_0 = -32,\ y_0 = -4$. Отже, координати точок дотику є $M_1(-32;4)$ і $M_2(-32;-4)$, а рівняння дотичних: $x = 8y$ і $x = -8y$. Шукана площа дорівнює: $S = 2(S_{AM_1O} - S_{AM_1B})$. Площу трикутника AM_1O легко знайти, бо $|AO| = 32$, а $|AM_1| = 4$:

$$S_{AM_1O} = \frac{1}{2}|AO|\cdot|AM_1| = \frac{1}{2}\cdot 32\cdot 4 = 64\,(кв.\,од.).$$

Площу криволінійного трикутника AM_1B знаходимо інтегруванням:

$$S_{AM_1B} = \int_{-32}^{-16}\sqrt{-x-16}\,dx = -\frac{2}{3}(-x-16)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-32}^{-16} = \frac{128}{3}\,(кв.од.).$$

Отже, шукана площа: $S = 2\left(64 - \frac{128}{3}\right) = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}\,(кв.\,од.).$

Відповідь: $42\frac{2}{3}$ *кв. од.*

Приклад 16. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 2\cos^2 x(1+\sin^2 x)$, прямими $x = 0$ і $x = 2\pi$ та віссю абсцис.

Розв'язання. Для обчислення шуканої площі можна не будувати графік функції $f(x)$. Розглядувана функція невід'ємна, тому шукана площа дорівнює:

$$S = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 x(1+\sin^2 x)dx = \int_0^{2\pi}(2\cos^2 x + 2\cos^2 x\sin^2 x)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)dx = \int_0^{2\pi}\left(1+\cos 2x + \frac{1}{4}(1-\cos 4x)\right)dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{4} + \cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x\right)dx = \left(\frac{5}{4}x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{5}{2}\pi\,(кв.од.).$$

Відповідь: $\frac{5}{2}\pi$ *кв.од.*

Приклад 17. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = 2\sqrt{x}$ і $y_2 = \frac{x}{5-x}$.

Розв'язання. Графіки даних функцій представлені на рис.20. Абсцису точки A знаходимо з рівняння $2\sqrt{x} = \frac{x}{5-x}$. Маємо:

$$\sqrt{x}\left(2 - \frac{\sqrt{x}}{5-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\,\frac{10-2x-\sqrt{x}}{5-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-2)}{x-5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Шукана площа $S = \int_0^4\left(2\sqrt{x} - \frac{x}{5-x}\right)dx = \int_0^4\left(2\sqrt{x} + 1 + \frac{5}{x-5}\right)dx =$

$$= \left(2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x + 5\ln|x-5|\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3} + 4 - 5\ln 5 = \left(\frac{44}{3} - 5\ln 5\right)(кв.од.).$$

Відповідь: $\left(\frac{44}{3} - 5\ln 5\right)$ *кв.од.*

Приклад 18. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y_1 = x^2 - 2x + 2$ і $y_2 = 2 + 4x - x^2$.

Розв'язання. Побудуємо графіки заданих функцій (рис. 21) і знайдемо абсциси точок їх перетину з рівняння $x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2$. Розв'язавши рівняння, маємо $x = 0$ і $x = 3$.

Шукана площа дорівнює:

$$S = \int_0^3((2+4x-x^2) - (x^2-2x+2))dx = \int_0^3(2+4x-x^2-x^2+2x-$$

$$-2)dx = \int_0^3(6x-2x^2)dx = 6\int_0^3 x dx - 2\int_0^3 x^2 dx = 3x^2\Big|_0^3 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3 =$$

$= 27 - 18 = 9$ (*кв. од.*).

Відповідь: 9 *кв. од.*

Приклад 19. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ та прямими $x = 0$ і $x = 2\pi$.

Розв'язання. Шукана площа (рис. 22) дорівнює:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x - \cos x)dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x - \sin x)dx =$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + (\sin x + \cos x)\Big|_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $4\sqrt{2}$ *кв. од.*

Приклад 20. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = \ln(x+6)$, $y_2 = 3\ln x$ та прямими $x = 0$ і $y = 0$.

Розв'язання. Рівняння $\ln(x+6) = 3\ln x$, як легко переконатися, має єдиний корінь $x = 2$. Тому площа фігури, що показана на рис. 23, дорівнює:

$$S = \int_0^2 \ln(6+x)dx - \int_1^2 3\ln x dx = \int_0^2 \ln(6+x)d(6+x) - 3\int_1^2 \ln x dx =$$

$$= \left((x+6)\ln(x+6) - (x+6)\right)\Big|_0^2 - 3(x\ln x - x)\Big|_1^2 = 8\ln 8 - 8 - 6\ln 6 + 6 -$$

$$- 6\ln 2 + 3 = (12\ln 2 - 6\ln 3 + 1) \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $(12\ln 2 - 6\ln 3 + 1)$ *кв. од.*

Приклад 21. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = tg\, x$, $y_2 = \frac{2}{3}\cos x$ та прямою $x = 0$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Рівняння $tg\, x = \frac{2}{3}\cos x$, тобто рівняння $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ рівносильне рівнянню $\sin x = \frac{1}{2}$. Звідки, враховуючи умову $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, знаходимо, що $x = \frac{\pi}{6}$. Тому шукана площа (рис. 24) дорівнює

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2}{3}\cos x - tg\, x\right)dx = -\int_0^{\frac{\pi}{6}} tg\, x dx + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d(\cos x)}{\cos x} +$$

$$+ \frac{2}{3}(-\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\right) \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $\left(-\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\right)$ *кв. од.*

Приклад 22. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = 6x^2 - 5x + 1$, $y_2 = \cos \pi x$ та прямими $x = 0$ і $x = 1$.

Розв'язання. Рівняння $6x^2 - 5x + 1 = \cos \pi x$, як легко довести, використовуючи монотонність функцій, має два кореня: $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$. Тому шукана площа (рис. 25) дорівнює

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}}(\cos \pi x - 6x^2 + 5x - 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(6x^2 - 5x + 1 - \cos \pi x)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\sin \pi x - 2x^3 + \frac{5x^2}{2} - x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(2x^3 - \frac{5x^2}{2} + x - \frac{1}{\pi}\sin \pi x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\pi} - \frac{2}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2} + 1 - \frac{2}{8} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{4}\right) \text{ (кв.од.)}.$$

Відповідь: $\left(\frac{2}{\pi}+\frac{1}{4}\right)$ *кв.од.*

Приклад 23. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y_1 = x^{\frac{1}{\alpha}}$, $y_2 = x^{\alpha}$ та прямими $x=0$ і $x=1$ $(\alpha>1)$.

Розв'язання. Шукана площа (рис. 26) дорівнює

$$S=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{\alpha}}-x^{\alpha}\right)dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{\alpha}}dx-\int_0^1 x^{\alpha}dx=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}x^{\frac{1}{\alpha}+1}\Big|_0^1-$$

$$-\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\Big|_0^1=\frac{\alpha}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\ (\textit{кв. од.}).$$

Відповідь: $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ *кв. од.*

Приклад 24. Визначити, при якому значенні a пряма $y=a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y_1=0$ і $y_2=3-x^2-2x$, навпіл.

Розв'язання. Графік функції $y=3-x^2-2x=4-(x+1)^2$ отримується з графіка функції $y=4-x^2$ при паралельному перенесенні на одиницю вліво (рис. 27). Тому задача рівносильна такій: при якому значенні a пряма $y=a$ ділить площу фігури, обмеженої лініями $y=0$, $x=0$ і $y=4-x^2$, навпіл? З рис.27 видно, що

$$S_{OMD}=\int_0^2(4-x^2)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3};$$

$$S_{ABC}=\int_0^{\sqrt{4-a}}\left(4-a-x^2\right)dx=\left((4-a)x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-a}}=\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}.$$

Шукане значення a визначаємо з рівняння $2\cdot\frac{2}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=\frac{16}{3}$.

Таким чином, пряма $y=a$ ділить навпіл площу вищевказаної фігури при $a=4-2\sqrt[3]{2}$.

Відповідь: $4-2\sqrt[3]{2}$.

Приклад 25. Визначити, при якому $a>0$ графіки функцій $y_1=\frac{x+|x|}{2}$ і $y_2=ax-x^2$ обмежують фігуру з площею $\frac{9}{2}$ *кв.од.*

Розв'язання. Графіки даних функцій представлені на рис. 28. Оскільки при $x\ge 0$ $\frac{x+|x|}{2}=x$, то абсцису точки A перетину графіків даних функцій знаходимо з рівняння $ax-x^2=x$, розв'язки якого $x=0$ і $x=a-1$. Зрозуміло, що абсциса точки A дорівнює $a-1$. Графіки даних функцій обмежують фігуру, площа якої:

$$S=\int_0^{a-1}(ax-x^2-x)dx=\left(\frac{(a-1)x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{a-1}=\frac{(a-1)^3}{2}-\frac{(a-1)^3}{3}=$$

$=\frac{(a-1)^3}{6}$. Ця площа буде дорівнювати $\frac{9}{2}$, коли $\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{9}{2}$, тобто при $a=4$.

Відповідь: $a=4$.

Приклад 26. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,\quad a>0.$$

Розв'язання. Графік функції $y=\sqrt{a^2-x^2}$ являє собою півколо радіуса a (рис. 29). Оскільки визначений інтеграл являє собою площу півкола з тим же радіусом, то $S=\frac{\pi a^2}{2}$.

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{2}$.

Приклад 27. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити $\int\limits_{-1}^{2}\left||x|-1\right|dx$.

Розв'язання. Графік функції $y=\left||x|-1\right|$, $x\in[-1;2]$ представлений на рис. 30. Отже, величина шуканого інтеграла дорівнює сумі площ двох трикутників. Таким чином,

$$\int\limits_{-1}^{2}\left||x|-1\right|dx=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=1\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{2}$.

Приклад 28. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

$$\int\limits_{-1}^{1}\arccos x dx\cdot$$

Розв'язання. Шуканий інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, показаній на рис. 31.
Якщо доповнити цю криволінійну трапецію до прямокутника, сторони якого визначені рівняннями $x=-1, x=1, y=0,$ $y=\pi$ і площа якого дорівнює 2π, то із властивості симетрії графіка функції $y=\arccos x$ і прямокутника відносно точки $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ випливає, що шуканий інтеграл представляє собою половину площі прямокутника, тому

$$\int\limits_{-1}^{1}\arccos x dx=\pi.$$

Відповідь: π.

Приклади для практичних занять і самостійної роботи

Група А

Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $y=x^2$, $y=0$, $x=3$. **Відповідь:** 9 *кв.од.*
2) $y=\frac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$, $x=2$. **Відповідь:** 0,5 *кв.од.*
3) $y=\cos x$, $y=0$, $-\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$. **Відповідь:** 1,5 *кв.од.*
4) $y=2x-x^2$, $y=0$. **Відповідь:** $\frac{4}{3}$ *кв.од.*
5) $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$. **Відповідь:** $\frac{8}{3}$ *кв.од.*
6) $y=x^3$, $y=1$, $x=2$. **Відповідь:** $\frac{11}{4}$ *кв.од.*
7) $y=\sqrt{x}$, $y=2$, $x=9$. **Відповідь:** $\frac{8}{3}$ *кв.од.*
8) $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$. **Відповідь:** $\frac{5}{12}$ *кв.од.*
9) $y=2x-x^2$, $y=-3$. **Відповідь:** $10\frac{2}{3}$ *кв.од.*
10) $y=2+\sin x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi$. **Відповідь:** $(2+2\pi)$ *кв.од.*
11) $y=\frac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$. **Відповідь:** $\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)$ *кв.од.*
12) $y=3^x$, $x=-1$, $x=3$, $y=0$. **Відповідь:** $\frac{80}{\ln 27}$ *кв.од.*
13) $y=\sin\frac{x}{3}$, $x=-\pi$, $x=2\pi$, $y=0$. **Відповідь:** 3 *кв.од.*
14) $y=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y=0$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$. **Відповідь:** 1 *кв.од.*

15) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=2$, $x=3$, $y=0$. **Відповідь:** $\frac{2}{3}\left(6\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)$ *кв.од.*

16) $y=x^4-2x^2+5$, $y=1$, $x=0$, $x=1$. **Відповідь:** $\frac{53}{15}$ *кв.од.*

17) $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$. **Відповідь:** $\frac{7}{6}$ *кв.од.*

18) $y=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$. **Відповідь:** $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ *кв.од.*

19) $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{5}{2}$. **Відповідь:** $\frac{8}{5}$ *кв.од.*

20) $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$. **Відповідь:** $\frac{9}{2}$ *кв.од.*

21) $y=\frac{2}{x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$. **Відповідь:** $\frac{15-16\ln 2}{4}$ *кв.од.*

22) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=x^2$. **Відповідь:** $\frac{6-\pi}{3\pi}$ *кв.од.*

23) $y=4-\frac{6}{|x+1|}$, $y=|-x+2|$. **Відповідь:** $(11-6\ln 3)$ *кв.од.*

24) $y=x^2$, $y=2x-x^2$. **Відповідь:** $\frac{1}{3}$ *кв.од.*

25) $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$. **Відповідь:** $\frac{8}{3}$ *кв.од.*

26) $y=4\sin^2 x\cdot(1+\cos^2 x)$, $x\in[-\pi;\pi]$, $y=0$. **Відповідь:** 5π *кв.од.*

27) $y=\cos x$, $y=1+\frac{2x}{\pi}$, $x\in\left[-\pi;\frac{\pi}{4}\right]$. **Відповідь:** $\frac{3\pi-4}{4}$ *кв.од.*

28) $y=2-|2-x|$, $y=\frac{3}{|x|}$. **Відповідь:** $\frac{4-\ln 27}{2}$ *кв.од.*

Група Б

1. Обчислити площі фігур, обмежених лініями:

1) $y=x^4$, $y=x$. **Відповідь:** $\frac{3}{10}$ *кв.од.*

2) $y=\frac{16}{x^2}$, $y=17-x^2$. **Відповідь:** 18 *кв.од.*

3) $y=\frac{x^2}{4}$, $y=\frac{3x-x^2}{2}$. **Відповідь:** 8 *кв.од.*

4) $y=4\cdot e^{-x}$, $y=5-e^{x}$. **Відповідь:** $(5\ln 4-6)$ *кв.од.*

5) $y=\ln(x-2)$, $y=\ln\frac{6}{9-x}$. Вказівка. Фігура, обмежена графіками даних функцій, співпадає з фігурою, обмеженою графіками функцій, обернених до заданих (див. Приклад 10)
Відповідь: $(7\ln 6-10)$ *кв.од.*

6) $y=\frac{1}{2}+\sin^2 x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$. **Відповідь:** 4 *кв.од.*

7) $y=(1+\sin x)\cos^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=2\pi$. **Відповідь:** $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\right)$ *кв.од.*

8) $y=2+\frac{\pi}{2}-\left|x-\frac{3\pi}{2}\right|$, $y=2+\sin x$. **Відповідь:** $\left(2+\frac{\pi^2}{4}\right)$ *кв.од.*

9) $y=1-\cos x$, $y=\frac{1}{4}\left(|x-5|+|x-1|\right)$. **Відповідь:** 2 *кв.од.*

10) $y = tgx$, $y = \sin x$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{4}$. **Відповідь:**

$$\left(\frac{3}{2}\ln(2-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \textit{кв.од.}$$

11) $y = ctg\, x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3\pi}{4.}$ **Відповідь:1**

$$\left(\frac{3}{2}(\ln 2-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \textit{кв.од.}$$

2. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \cos x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, дотичною до графіка цієї функції в точці $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і прямими $x = 0$, $y = 0$.

Відповідь: $\frac{4\sqrt{2}+\pi\sqrt{2}-16}{16}$ *кв.од.*

3. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 0{,}5x^2 - 2x + 2$ і дотичними до графіка цієї функції в точках $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ і $(4;2)$. **Відповідь:** $\frac{9}{8}$ *кв.од.*

4. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - x + 2$ і дотичною до графіка функції $y = \ln x + 3$ в точці $(1;3)$. **Відповідь:** $\frac{4}{3}$ *кв.од.*

5. Знайти площу фігури, обмеженої графіком функції $y = -16 - x^2$ і дотичними до цієї параболи, проведеними з початку координат. **Відповідь:** $\frac{128}{3}$ *кв.од.*

6. До гіперболи $y = \frac{4}{x}$ проведено дві дотичні: одна – в точці

$M(2;2)$, а друга – паралельно прямій $y = -4x$. Знайти площі трикутників, утворених кожною з цих дотичних і осями координат. **Відповідь:** $S_1 = S_2 = S_3 = 8$ *кв.од.*

7. Користуючись геометричним змістом інтеграла, обчислити:

1) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x dx.$ **Відповідь:** $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)-1.$

2) $\int_{-2}^{4} \left||x-2|-1\right| dx.$ **Відповідь:** $4{,}5$.

3) $\int_{-2}^{0} \sqrt{4-x^2}\, dx.$ **Відповідь:** $-\frac{\pi}{2}.$

4) $\int_{-1}^{0} (\sqrt{1-x^2} - x - 1) dx.$ **Відповідь:** $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$

8. Знайти значення a, $a < 0$, при якому площа фігури, яка обмежена параболою $y = (1+a^2)^2 x^2 + a$ і прямою $y = 0$, буде найбільшою. **Відповідь:** $a = -1$.

9. Знайти найменше значення площі фігури, яка обмежена параболою $y = x^2 + 2x - 3$ і прямою $y = ax + 1$.

Відповідь: $S(2) = \frac{32}{3}$ *кв.од.*

10. В якій точці графіка функції $y = x^2 + 1$ треба провести дотичну, щоб вона відтиняла від фігури, утвореної графіком цієї функції і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, трапецію найбільшої площі?

Відповідь: $\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

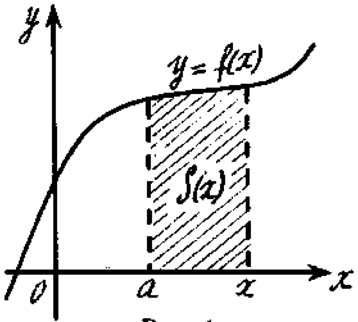

Рис. 1

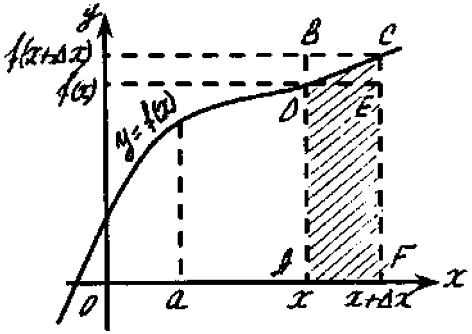

Рис. 2

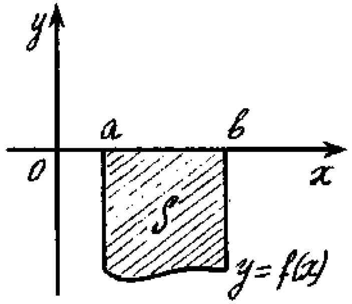

Рис. 3

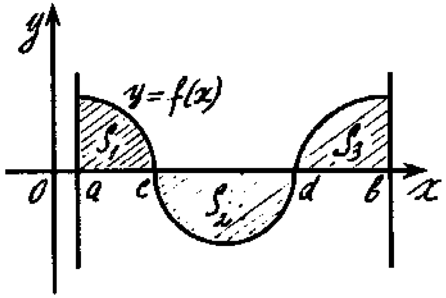

Рис. 4

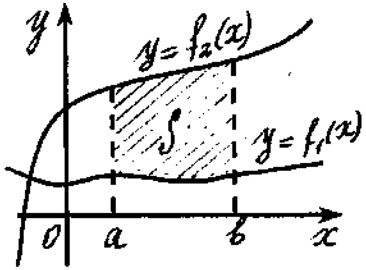

Рис. 5

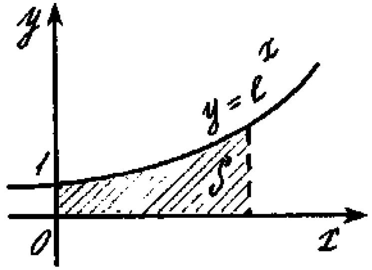

Рис. 6

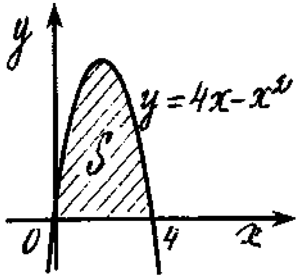

Рис. 7

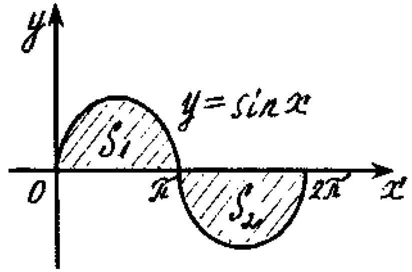

Рис. 8

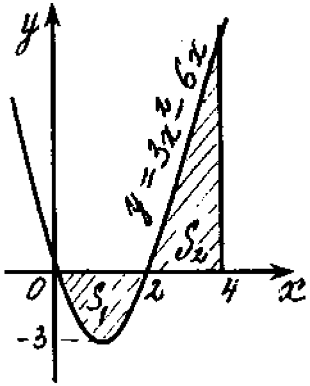

Рис. 9

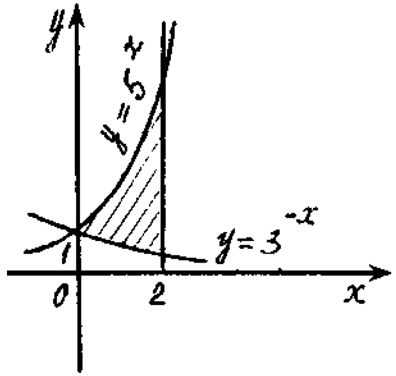

Рис. 10

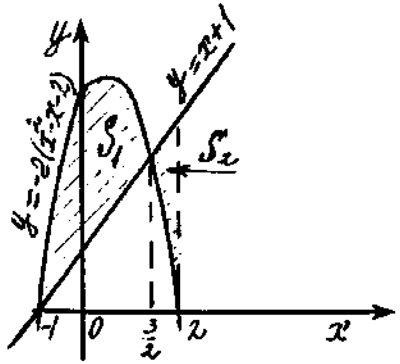

Рис. 11

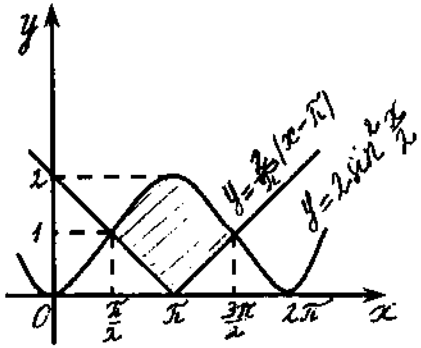

Рис. 12

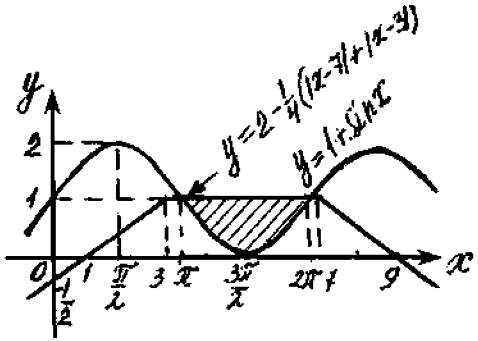

Рис. 13

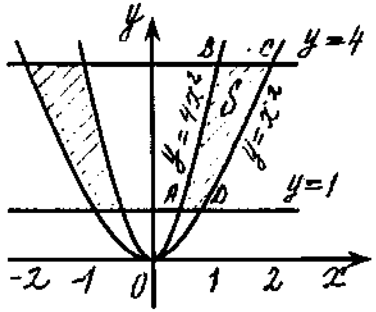

Рис. 14

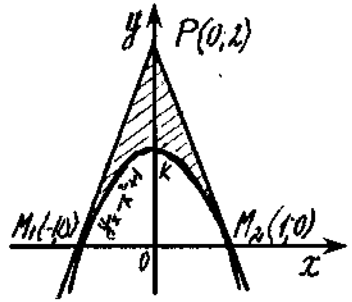

Рис. 15

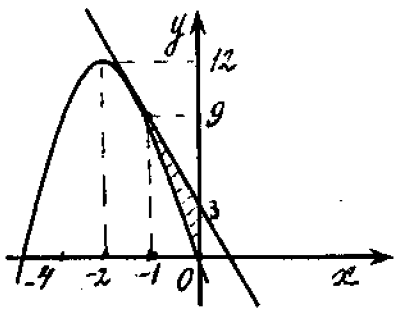
Рис. 16

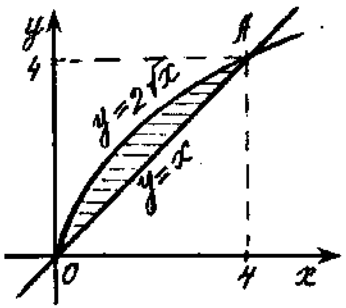

Рис. 17

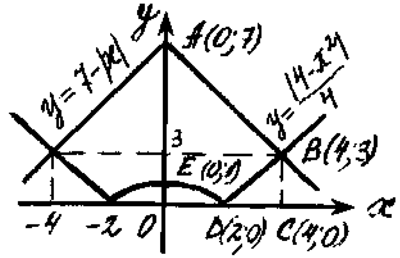

Рис. 18

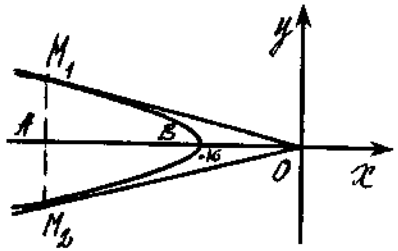

Рис. 19

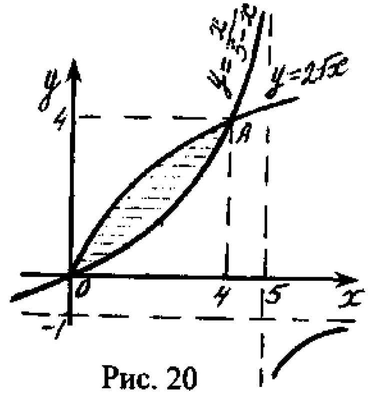

Рис. 20

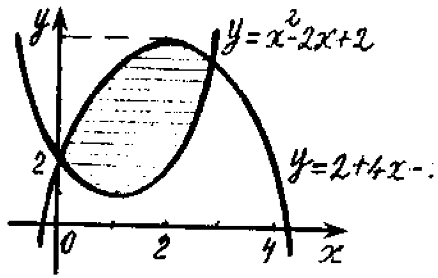

Рис. 21

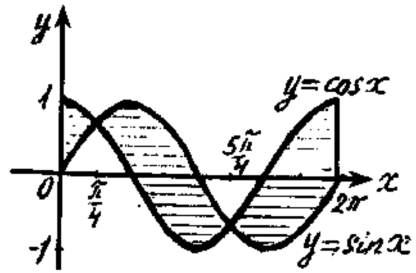

Рис. 22

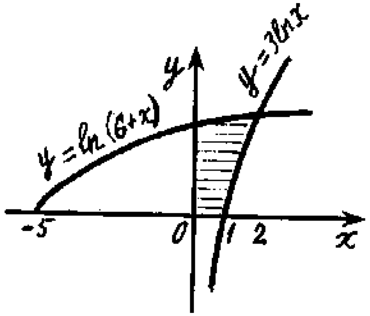

Рис. 23

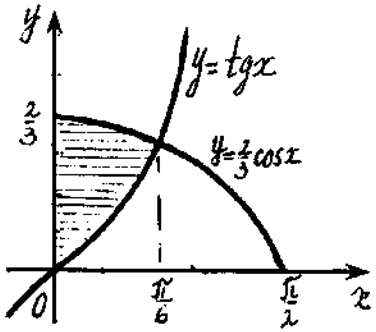

Рис. 24

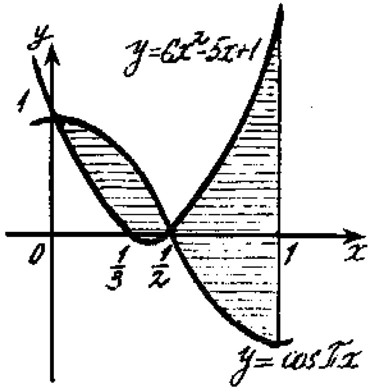

Рис. 25

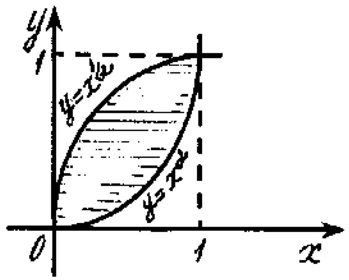

Рис. 26

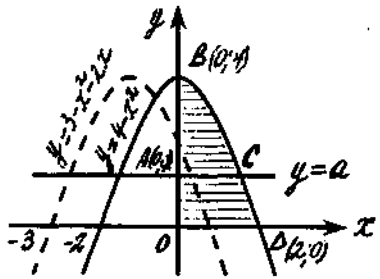

Рис. 27

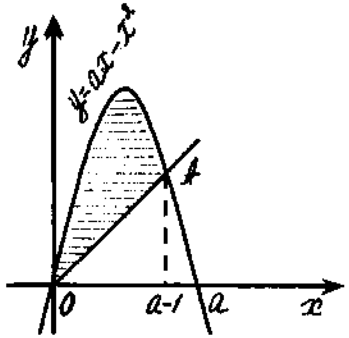

Рис. 28

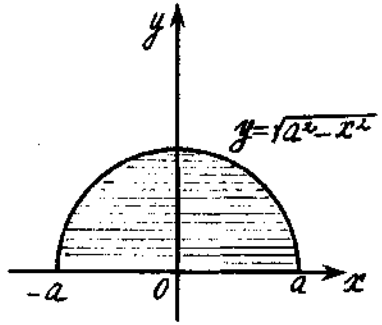

Рис. 29

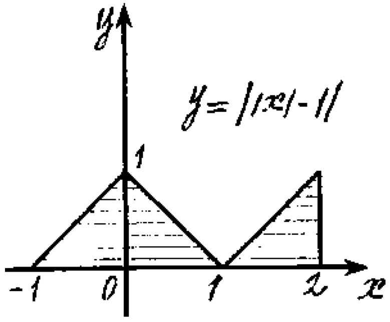

Рис. 30

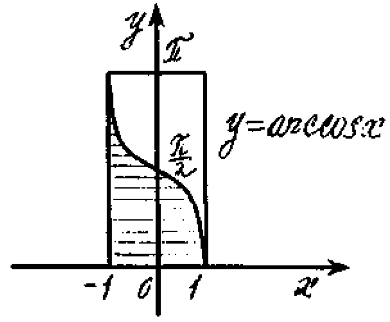

Рис. 31

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н.* Задачи по математике. Начала анализа. – М.: Наука, 1990.

2. *Вишенський В.А., Перестюк М.О.* Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища шк., 2001.

3. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Збірник задач з математики. Посібник для вступників до вузів. – К.: ТВІМС, 2000.

4. *Збірник задач* з математики для вступників до ВТУЗів. / За ред. М.І. Сканаві. – К.: Вища шк., 1996.

5. *Фадеев Д.К., Никулин М.С., Соколовский И.Ф.* Элементы высшей математики для школьников. – М.: Наука, 1987.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛОМОНОС Людмила Миколаївна
МУРАНОВА Наталія Петрівна
ПІЛЯВСЬКА Тетяна Григорівна

МАТЕМАТИКА

ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник

Технічний редактор *А.І. Лавринович*

Підп. до друку 07.06.07. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,02. Обл.- вид. арк. 3,25.
Дод. тираж 1000 прим. Замовлення № 130-1.
Видавництво НАУ
03680. Київ-680, проспект Космонавта Комарова, 1.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002