Наталія МУРАНОВА

Підготовка абітурієнтів з математики до вступу у вищі навчальні заклади

Сьогодні в Україні велику увагу приділяють якісній освіті в усіх її ланках, починаючи від дошкільної і закінчуючи післядипломною. Науково-педагогічний склад Інституту доуніверситетської підготовки (ІДП) Національного авіаційного університету (НАУ) з дня його створення працює над складанням навчальних планів і програм, а також навчально-методичного забезпечення для слухачів підготовчих курсів, удосконалюючи їх згідно з вимогами УЦОЯО до зовнішнього незалежного оцінювання. Щороку ми навчаємо близько 2,5 тис. абітурієнтів, які потім стають студентами НАУ та інших ВНЗ України. Тому вважаю за потрібне поділитися нашими доробками.

За короткий час викладач курсів має дати учням певну кількість знань, умінь та практичних навичок, які необхідні йому для вступу до вищого навчального закладу та навчання за кредитно-модульною системою. Саме тому викладачі шукають нові методи і засоби навчання для інтенсивної підготовки абітурієнтів.

Останніми роками в педагогіці часто використовують бінарні методи навчання, що об'єднують діяльність викладача (навчати) та учня (учіння).

Звичайно, викладач не байдужий до того, що мають робити слухачі підготовчих курсів. Методи учіння необхідно обговорювати з учнями, а також контролювати їх використання.

Широко відомі методи навчання математики, розроблені методистами з України С. Шохор-Троцьким (метод доцільних задач) і К. Лебединцевим (абстрактно-дедуктивний і конкретно-індуктивний методи) [1]. Ми знаємо, що застосування методів навчання математики у старших і

Мал. 1. Основні методи навчання математики

середніх класах відрізняються. Саме тому викладачі застосовують такі основні методи навчання математики для абітурієнтів, які запропоновано вченим Г. Бевзом (див. мал. 1). Це не класифікація, а структура системи найважливіших методів, від застосування яких залежить якість навчання.

Проскриптивний метод навчання *(pro* — для, *scripta* — написане*) передбачає супроводжувати пояснення докладними записами*.

Наприклад, якщо викладач, пояснюючи учням теорему, записує «Дано — Довести — Доведення» він дотримується проскриптивного методу.

Інскриптивний метод навчання (*in* — без), *якщо вчитель не записує довгих доведень теорем, а робить це усно, користуючись тільки малюнками, схемами тощо*.

Використання цих методів залежить від того, який матеріал вивчається, за яких умов і наскільки вміло викладач їх використовує.

На основі узагальнення та систематизації багаторічного досвіду з методики навчання розв'язування задач у 2009 році видано навчальний посібник «*Алгебра. Збірник тестових задач для вступників до вищих навчальних закладів*» (Муранова Н. П. та ін.), якому надано гриф Міністерства освіти і науки України, він відповідає програмі з математики для слухачів підготовчих курсів ІДП НАУ. Видання може бути використано у системі доуніверситетської підготовки, в загальноосвітніх навчальних закладах, у школах (класах) з поглибленим вивченням математики, в ліцеях та гімназіях природничо-математичного профілю для підготовки до державної підсумкової атестації, зовнішнього незалежного оцінювання та майбутніми вчителями-студентами фізико-математичних факультетів. Навчальний посібник містить задачі з математики, переважна більшість яких пропонувалася в різні роки на вступних іспитах з математики до НАУ та інших провідних вищих навчальних закладів України.

У посібнику наведено основні теоретичні відомості з розділів «Алгебра» та «Початки аналізу» (1 розділ). А саме: *арифметика* (натуральні і цілі числа; раціональні, ірраціональні, дійсні числа; алгебраїчні дії над числами; відсотки; пропорції); *алгебра (*степінь з натуральним показником; корінь n—го степеня; узагальнення степеня; формули скороченого множення; подільність многочленів; розкладання многочлена на множники; прогресії; лінійні рівняння з однією змінною; системи лінійних рівнянь; рівняння другого степеня; ірраціональні рівняння; основні елементарні функції, їхні властивості і графіки; нерівності); *тригонометрія; трансцендентні рівняння і нерівності; елементи математичного аналізу.*

У другому розділі представлено задачі з розділів «Алгебра» та «Початки аналізу». Кожний розділ складається із параграфів, що містять задачі трьох рівнів складності: *обов'язкового* (мінімального), *підвищеного* та *поглибленого.* Складність завдань визначається, як правило, кількістю логічних кроків, що повинен виконати учень у процесі їх розв'язування.

Обов'язковий рівень містить задачі і вправи, подані у формі тестів, в основному репродуктивного характеру, на 2—3 логічні кроки. Для їх розв'язування учням достатньо знати основні алгоритми, визначення, формули, теореми й ознаки, передбачені навчальними програмами, (які можна знайти у 1-му розділі), а також вміти виконувати найпростіші тотожні перетворення, спрощення та обчислення.

Наведемо приклади з розділу «Алгебра і початки аналізу».

1. Завдання обов'язкового рівня

1. Які з даних чисел раціональні:

а) $a=\sqrt{1{,}8}$, $b=e$, $c=\sqrt{1{,}96}$;

б) $a=\sqrt{1{,}9}$, $b=$ p, $c=\sqrt{2{,}25}$?

2. Яким числом є значення виразу:

а) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$;

А) раціональним; Б) ірраціональним; В) інша відповідь.

б) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{27}}$?

А) раціональним; Б) ірраціональним; В) інша відповідь.

3. Яким числом є значення виразу:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

А) раціональним; Б) ірраціональним; В) інша відповідь.

б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$?

А) раціональним; Б) ірраціональним; В) інша відповідь.

Спростити вираз:

4. а) $10\sqrt{3\frac{1}{5}}-\sqrt{125}$;

А) $2\sqrt{5}$; Б) $3\sqrt{5}$; В) інша відповідь;

б) $12\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$;

А) $-5\sqrt{3}$; Б) $5\sqrt{3}$; В) інша відповідь.

5. а) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

А) $\sqrt{6}$; Б) $\sqrt{3}$; В) 3; Г) інша відповідь;

б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;

А) 6; Б) $-\sqrt{7}$; В) $\sqrt{5}$; Г) інша відповідь.

6. а) $\sqrt{(5-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$;

А) 3; Б) $\sqrt{5}$; В) $8-2\sqrt{5}$; Г) інша відповідь;

б) $\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}+\sqrt{(5-\sqrt{7})^2}$;

А) $\sqrt{7}$; Б) $8-2\sqrt{7}$; В) 3; Г) інша відповідь.

48. Обчислити:

а) $(\sin 160^\circ+\sin 40^\circ)(\sin 140^\circ+\sin 20^\circ)+(\sin 50^\circ-\sin 70^\circ)(\sin 130^\circ-\sin 110^\circ)$;

А) –1; Б) 0; В) 1; Г) інша відповідь;

б) $(\cos 70^\circ+\cos 50^\circ)(\cos 310^\circ+\cos 290^\circ)+(\cos 40^\circ+\cos 160^\circ)(\cos 320^\circ-\cos 380^\circ)$;

А) –1; Б) 0; В) 1; Г) інша відповідь.

Відповіді:

1. а) $c=\sqrt{1{,}96}$; б) $c=\sqrt{2{,}25}$. **2.** а) А; б) А. **3.** а) Б; б) Б. **4.** а) Б; б) Б. **5.** а) В; б) А. **6.** а) В; б) Б. **48.** а) А; б) В.

Підвищений рівень містить задачі, де необхідно виконати 4—6 логічних кроків, розв'язання яких вимагає від абітурієнта творчого застосування отриманих знань із достатньо повним і чітким його обгрунтуванням.

2. Завдання підвищеного рівня

49. Визначити вид числа:

а) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

б) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

50. а) Довести, що число

$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$ натуральне;

б) Довести, що число

$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ ірраціональне.

52. Визначити знак виразу:

а) $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$.

Обчислити:

53. а) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

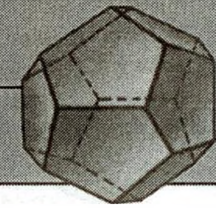
б) $\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})$.

58. а) $(0{,}1)^{-2}\cdot(0{,}9)^0\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-0{,}5}:(0{,}81)^{-0{,}5}$;

б) $((0{,}6)^{-4})^{-0{,}25}\cdot(0{,}09)^{-0{,}5}\cdot(-3)^0\cdot(0{,}1)^{-1}$.

59. а) $\left(\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}-81^{-0{,}25}\right)\left(\left(5\sqrt{5}\right)^{-\frac{2}{3}}+81^{-0{,}25}\right)$;

б) $\left(16^{-0{,}25}-\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\left(16^{-0{,}25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$.



Позбутися ірраціональності у знаменнику:

60. а) $\frac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$; б) $\frac{4}{\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}}$.

62. а) $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$.

Обчислити:

63. а) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}3\right)$; б) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$.

67. а) $\frac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}$;

б) $\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$.

72. а) $\arccos\left(\cos\left(2\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$;

б) $\arcsin\left(\cos\left(2\arccos\left(\sqrt{2}-1\right)\right)\right)$.

Знайти значення виразу:

73. а) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}-2\operatorname{arctg}(-2)\right)$;

б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\operatorname{arctg}(-\frac{1}{2})\right)$.

74. а) $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ$;

б) $\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\sin 70^\circ\sin 80^\circ$.

78. а) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[4]{2}}$; б) $-\log_3\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$.

83. а) $\log_3 7\cdot\log_7 5\cdot\log_5 4+1$;

б) $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7$.

91. а) $\log_{35}28$, якщо $\log_{14}7=a$, $\log_{14}5=b$;

б) $\log_{275}60$, якщо $\log_{12}5=a$, $\log_{12}11=b$.

98. Визначити знак числа:

а) $\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))$; б) $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

Відповіді. **49.** а) ірраціональне; б) ірраціональне. **52.** а) $\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}>0$; б) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}<0$. **53.** а) 2, б) 8. **58.** а) 40, б) 20. **59.** а) $-\frac{16}{225}$; б) $-\frac{7}{4}$. **60.** а) $2\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(\sqrt[4]{13}-\sqrt[4]{9}\right)\left(\sqrt{13}+3\right)$. **62.** а) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}$; б) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. **63.** а) $\frac{1}{\sqrt{10}+3}$; б) $\frac{\sqrt{15}}{8}$. **67.** а) -1; б) 1. **72.** а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{4}$. **74.** а) 48, б) $\frac{3}{256}$. **78.** а) 3, б) 2. **83.** а) $\log_3 12$; б) 2. **91.** а) $\frac{2-a}{a+b}$; б) $\frac{a+1}{2a+b}$. **98.** а) $\log_{1,7}(0,5(1-\log_7 3))<0$; б) $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)<0$.

Поглиблений рівень — це, як правило, задачі та вправи, розв'язання яких вимагає вміння орієнтуватися у нестандартних ситуаціях, застосовувати оригінальні та штучні прийоми, показати глибину та строгість суджень. Ці задачі призначені для тих, хто вивчає шкільний курс математики на поглибленому рівні.

3. Завдання поглибленого рівня

Довести, що:

99. а) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-2\sqrt{6}$ — натуральне число;

б) $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ — натуральне число.

105. а) $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$ — ірраціональне число;

б) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ — ірраціональне число.

107. Довести рівність:

а) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)=1$;

б) $\left(12\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}\right)\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=84$.

108. а) Довести, що числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії.

б) Довести, що числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії.

109. Записати у вигляді дробу $r=\frac{m}{n}$, де $m\in N$, $n\in N$ — періодичний дріб:

а) 0,(45); б) 3,1(73).

111. Спростити вираз:

а) $\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$;

б) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

Порівняти числа:

114. а) $\sqrt[20]{2}+\sqrt[30]{3}$ і 2; б) $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3}$ і $\sqrt[10]{11}-\sqrt[5]{3}$.

117. а) $3\log_{16}1862+\log_{16}1866$ і $\log_2 1863$;

б) $\log_{1147}1154+7\log_{1147}1146$ і 8.

Довести методом математичної індукції, що для $n\in N$:

118. а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

б) $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

121. а) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$;

б) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{2}{3}$.

Обчислити:

126. а) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$;

б) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{15}{17}\right)$.

133. а) $\operatorname{tg}830^\circ+\operatorname{tg}770^\circ+\operatorname{tg}740^\circ-\operatorname{tg}470^\circ\cdot\operatorname{tg}410^\circ\cdot\operatorname{tg}380^\circ$;

б) $\operatorname{tg}12^\circ\cdot\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\cdot\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\cdot\operatorname{tg}12^\circ$.

138. а) Розташувати в порядку зростання числа $a = \log_2 3$, $b = \log_6 9$, $c = \log_5 17$;

б) Розташувати в порядку зростання числа $a = \log_5 7$, $b = \log_8 3$, $c = \sqrt{2}$, $d = \log_{\frac{1}{4}} 5$.

Відповіді.

109. а) $\frac{5}{11}$; б) $\frac{1571}{495}$. **111.** а) $\sqrt{3}+1$; б) 1. **114.** а) $\sqrt[20]{2}+\sqrt[30]{3}>2$; б) $\sqrt[5]{\sqrt{11}-3}>\sqrt[10]{11}-\sqrt[5]{3}$. **117.** а) $\log_2 1863 > 3\log_{16} 1862 + \log_{16} 1866$; б) $8 > \log_{1147} 1154 + 7\log_{1147} 1146$. **126.** а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{1}{5}$. **133.** а) $-\frac{119}{120}$; б) $-\frac{1}{2}$. **138.** а) $\log_6 9 < \log_2 3 < \log_5 17$ б) $\log_{\frac{1}{4}} 5 < \log_8 3 < \log_5 7 < \sqrt{2}$.

Третій розділ присвячений конкурсним задачам з математики (алгебра і початки аналізу). Їх поділено на три групи за рівнем складності: мінімально необхідний, середній та підвищений.

Розділ 1. Дійсні числа. Тотожні перетворення

§ 1 Дійсні числа

1. Задачі мінімально необхідного рівня складності

1301. а) Як з'ясувати, яке з двох від'ємних раціональних чисел $-\frac{m}{n}$ і $-\frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in N)$ більше?

б) Як з'ясувати, яке з двох додатних раціональних чисел $\frac{m}{n}$ і $\frac{p}{q}$ $(m, n, p, q \in N)$ більше?

1306. Спростити вираз:

а) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$;

б) $\dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}+\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$.

Знайти цілу і дробову частини числа x:

1308. а) $x = 5{,}2$; б) $x = -5{,}2$.

1309. а) $x = \sqrt{2}$; б) $x = -\sqrt{2}$.

1323. а) Знайти $\log_{70} 32$, якщо $\log_{70} 5 = a$, $\log_{70} 7 = b$;

б) знайти $\log_{30} 12$, якщо $\log_{24} 3 = a$, $\log_{24} 5 = b$.

Обчислити без використання таблиць:

1328. а) $\sin^2 10° + \sin^2 50° + \sin^2 70°$;

б) $\sin^2 20° + \sin^2 40° + \sin^2 80°$.

1334. Обчислити: а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(3\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Відповіді. **1306.** а) $\sqrt{2}$; б) 1. **1308.** а) $[x] = 5$, $\{x\} = 0{,}2$; б) $[x] = 6$, $\{x\} = 0{,}8$. **1309.** а) $[x] = 1$, $\{x\} = \sqrt{2}-1$; б) $[x] = -2$, $\{x\} = 2-\sqrt{2}$. **1323.** а) $5(1 - a - b)$; б) $\frac{a+2}{3b+1+2a}$. **1328.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$. **1334.** а) $3+\sqrt{10}$; б) $\frac{11}{2}$.

2. Задачі середнього рівня складності

Обчислити найпростішим способом:

1336. а) $1{,}2345^4 + 0{,}7655^4 - 1{,}2345^3 \cdot 0{,}7655^3 - 1{,}2345^2 \cdot 0{,}7655^2 + 4{,}938 \cdot 3{,}062$;

б) $(5{,}5427^3 + 2{,}1427^3 + 2 \cdot 5{,}5427 \cdot 3{,}8427 \cdot 2{,}1427) : (5{,}5427^2 + 2{,}1427^2)$.

1337. а) $\dfrac{666666 \cdot 666666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}$;

б) $\dfrac{777777 \cdot 777777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}$.

1345. а) Чи можна представити число 1000...02 у вигляді суми кубів двох натуральних чисел?

б) Сума цифр натурального числа 1997. Чи може це натуральне число виявитися точним квадратом?

Обчислити без допомоги таблиць і калькулятора:

1358. а) $\dfrac{1}{\cos^2 10°}+\dfrac{1}{\cos^2 50°}+\dfrac{1}{\cos^2 70°}$; б) $\operatorname{ctg}^2 10° + \operatorname{ctg}^2 50° + \operatorname{ctg}^2 70°$.

1364. а) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arcctg}\frac{1}{8}$;

б) $\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 7 + \operatorname{arctg} 8$.

1367. Довести рівність: а) $\operatorname{tg} 830° + \operatorname{tg} 770° + \operatorname{tg} 740° = \operatorname{tg} 470° \cdot \operatorname{tg} 410° \cdot \operatorname{tg} 380°$;

б) $\operatorname{tg} 12° \cdot \operatorname{tg} 24° + \operatorname{tg} 24° \cdot \operatorname{tg} 54° + \operatorname{tg} 54° \cdot \operatorname{tg} 12° = 1$.

Відповіді.

1336. а) 16, б) 7,6854. **1337.** а) 0, б) 1753086434. **1345.** а) не можна, б) ні. **1358.** а) 12, б) 33. **1364.** а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$.

3. Задачі підвищеного рівня складності

1371. а) Довести, що ні при якому натуральному n число $n^2 + 1$ не ділиться на 3;

б) число $3^{105} + 4^{105}$ ділиться на 13, 49, 181 і 379, але не ділиться на 5 і 11. Як це перевірити?

1376. а) Добуток п'яти послідовних натуральних чисел у 120 разів більший за число $\overline{ABABAB}$. Знайдіть названі п'ять чисел;

б) добуток трьох послідовних непарних чисел у 5 разів менший за число $\overline{БАБАБА}$. Знайдіть названі непарні числа.

§ 2. Тотожні перетворення алгебраїчних виразів

1. Задачі мінімально необхідного рівня складності

1383. Спростити вираз:

а) $x+1+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+10x+25}$;

б) $\sqrt{a^2+6a+9}+\sqrt{a^2-6a+9}$.

1389. а) Довести тотожну рівність
$(1 + ab + a + b)^2 - (1 - ab + a - b)^2 = 4b(1 + a)^2$;
б) довести рівність

$$\left(\frac{a-3}{7a-4}-\frac{a-3}{a-4}\right)\cdot\frac{7a-4}{9a-3a^2}=\frac{14-a^2}{4-a}-a-4 .$$

2. Задачі середнього рівня складності

1396. Спростити вираз:

а) $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, $b\neq c$;

б) $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

1400. а) Довести, що якщо $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n+1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}$;

б) довести, що якщо три дійсних числа a, b, c зв'язані співвідношенням $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то обов'язково два з цих чисел рівні за модулем і протилежні за знаком.

3. Задачі підвищеного рівня складності

1403. а) Розкласти на множники, не групуючи члени, вираз
$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$;
б) розкласти на множники $1 + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{2^k-1}$.

Відповіді.

1376. а) 35, 36, 37, 38, 39; б) 35, 37, 39. **1383.** а) $-x-1$, якщо $x\le -5$; $x+9$, якщо $-5\le x\le 3$; $3x+3$, якщо $x>3$; б) $-2a$, якщо $a\le -3$; 6, якщо $-3<a\le 3$; $2a$, якщо $a>3$. **1396.** а) 0, б) $a+b+c$. **1403.** а) $(x^2-xy+y^2)(x^6-x^2y^3+y^6)$; б) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots\left(1+x^{2^k-1}\right)$.

Розділ 2. Рівняння, нерівності і їх системи

§ 1. Алгебраїчні рівняння, нерівності і їх системи

1. Задачі мінімально необхідного рівня складності

Розв'язати рівняння:

1449. а) $\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$;

б) $\frac{2}{x^2+5x}+\frac{3}{2x-10}=\frac{15}{x^2-25}$.

1472. а) $5\sin 2x - 11(\sin x + \cos x) + 7 = 0$;
б) $\sin 2z + 5(\sin z + \cos z) + 1 = 0$.

1486. а) $\left(\sqrt{5\sqrt{2}-7}\right)^x+6\left(\sqrt{5\sqrt{2}+7}\right)^x=7$;

б) $\left(6-\sqrt{35}\right)^x+\left(6+\sqrt{35}\right)^x=142$.

1501. а) $\log_{0,5}(x^2-3x)=\log_{0,5}(x+12)$; б) $\log_4(x^2+3x-4)=\log_4\frac{x-1}{x+4}$.

Розв'язати систему рівнянь:

1510. а) $\begin{cases}3|x|+5y+9=0,\\2x-|y|-7=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}|x|+3y=7,\\2x+2|y-1|=3.\end{cases}$

1521. а) $\begin{cases}\sqrt{x^2+4xy-3y^2}=x+1,\\x-y=1;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt{2x^2+xy+3y^2}=y+4,\\x+y=5.\end{cases}$

1545. а) $\begin{cases}\log_4 x-\log_2 y=0,\\x^2+2y^2-8=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y=2,\\x^2-3y^2+44=0.\end{cases}$

Розв'язати нерівність:

1555. а) $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{3x-1}\ge\frac{3}{2x-3}$;

б) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}<0$.

1565. а) $\frac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0$;

б) $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0$.

Розв'язати систему нерівностей:

1607. а) $\begin{cases}(x^2-4x)(x-1)\le 0,\\(x^2-1)(3-x)\ge 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x^2-4)(x^2-2x+1)\ge 0\\(x-14)(7-x^2)\le 0.\end{cases}$

1629. а) $\begin{cases}2\sin(30°-3x)\le 1,\\2\cos(30°-3x)\le -\sqrt{3};\end{cases}$

б) $\begin{cases}2\sin(45°-3x)\le\sqrt{2},\\2\cos(45°-3x)\le -\sqrt{2}.\end{cases}$

Відповіді.

1449. а) 3; б) $-\frac{4}{3}$.

1472. а) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}+\frac{\pi}{2}k$, $k\in Z$; б) $-\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$. **1486.** а) $\log_{\sqrt{5\sqrt{2}-7}}6$; 0; б) -2; 2.