МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Н. П. Муранова, П. П. Баришовець,
А. С. Горюнов

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник
для слухачів підготовчих курсів

Київ 2016

УДК 51 (075.8)
ББК В 11я7
М 91

Рецензенти: *М. М. Білоцький* – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Київський національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова);

В. А. Теско – канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (Інститут математики НАН України);

О. В. Карупу – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Національний авіаційний університет)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 5/16 від 19.05.2016 р.).

Муранова Н.П.

М 91 Елементи математики : навч. посібник / Н. П. Муранова, П. П. Баришовець, А. С. Горюнов. – К. : НАУ, 2016. – 68 с.

ISBN 978-966-598-989-9

У навчальному посібнику розглянуто розділи елементарної математики і початків аналізу: множини, принцип математичної індукції, комбінаторика, біном Ньютона, послідовності, прогресії.

Кожний розділ містить теоретичні положення, що супроводжуються прикладами різного рівня складності. Для самостійної роботи запропоновано достатню кількість задач, а також питання для самоперевірки.

Для слухачів підготовчих курсів, а також старшокласників, абітурієнтів, студентів I–II курсів технічних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, учителів профільних фізико-математичних класів навчальних закладів освіти та викладачів вищої школи.

УДК 51 (075.8)
ББК В 11я7

ISBN 978-966-598-989-9

© Муранова Н. П.,
Баришовець П. П.,
Горюнов А. С., 2016
© НАУ, 2016

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

У навчальному посібнику розглянуто розділи елементарної математики і початків аналізу: «Множини», «Метод математичної індукції», «Комбінаторика», «Біном Ньютона», «Послідовності», «Прогресії».

Дібраний матеріал не можна однозначно віднести до елементарної чи вищої математики в їх сучасному розумінні. Це стосується всіх перелічених розділів, але перш за все теорії множин, комбінаторики і послідовностей. У той же час, розглядаючи багато питань елементарної математики, особливо на її завершальному етапі, і вивчаючи вступ до вищої математики, часто не вистачає ґрунтовніших знань та вмінь саме із зазначеного вище матеріалу.

Мова теорії множин дозволить розглянути з більш загальних позицій багато задач елементарної математики, буде сприяти усуненню типових логічних помилок, яких припускаються при вивченні, здавалось би, традиційних тем. Метод математичної індукції, комбінаторика і біном Ньютона незамінні при розв'язуванні саме «своїх» проблемних задач. І, нарешті, без послідовностей неможливо розглянути прогресії з достатньою кількістю прикладів.

Кожний розділ містить теоретичні положення, що супроводжуються прикладами, питання та вправи для самостійного опрацювання.

1. МНОЖИНИ

1.1. Основні поняття і означення

Поняття множини – одне з основних понять математики; воно не має означення. Під множиною розуміють сукупність елементів (об'єктів) довільної природи. Це можуть бути числові множини, наприклад, множини простих, натуральних, раціональних, дійсних чисел, відрізки на числовій прямій. Елементами множин можуть бути також геометричні об'єкти: точки, прямі, вектори на площині або в просторі. При цьому передбачається, що об'єкти даної множини відрізняються один від одного і від предметів, що не входять до цієї множини. Множини складаються з елементів. Сукупність атомів у молекулі – це ***скінченна*** множина, тобто множина, яка містить скінченну кількість елементів. Якщо множина не є скінченною, то її називають ***нескінченною***. Поняття множини складне і суперечливе. Наприклад, на даний період розвитку знань не можна однозначно стверджувати, що кількість зірок у Всесвіті нескінченна.

Розглянемо приклади множин:

а) множина всіх натуральних чисел: $N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$;

б) множина студентів у даній групі.

Предмети, що складають множину, є її елементами.

Множина $A = \{a, b, c\}$ має елементи a, b, c.

Запишемо: $a \in A$.

Приклад 1. Якщо $N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ – множина натуральних чисел, то $3 \in N$ (3 належить множині натуральних чисел); $\frac{1}{2} \notin N$ ($\frac{1}{2}$ не належить множині натуральних чисел).

Множина задана, якщо відома властивість, яку мають елементи цієї множини і не мають інші елементи.

Приклад 2. а) $A = \{a, b, c\}$ – множина A задана. Вона складається із елементів a, b, c.

б) $B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$ – множина B задана. Це множина парних чисел.

Дві множини рівні, якщо вони складаються з одних і тих же елементів.

Приклад 3. $A = \{1, 2, 4, 5\}$ і $B = \{2, 4, 5, 1\}$. Ці множини рівні, оскільки *вони складаються з одних і тих же елементів.*

Запишемо: $A = B$.

Множини бувають *скінченні* і *нескінченні.*

$N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ – нескінченна множина.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множина цифр – є скінченна множина; скінченну *множину можна задати перерахуванням всіх її елементів.*

Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою множиною і позначається $\varnothing$.

Приклад 4. Множина натуральних чисел, які менші від одиниці, є порожньою множиною.

Множина B називається підмножиною A, якщо кожен елемент множини B належить множині A (рис. 1.1).

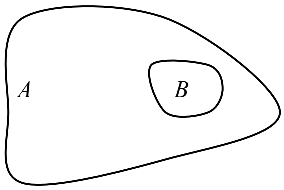


Рис. 1.1

Запишемо: $B \subset A$.

Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, то $A = B$.

Приклад 5. $N = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ – множина натуральних чисел, $M = \{2, 4, 6, 8, ..., 2n, ...\}$ – множина парних чисел,

$K = \{1, 3, 5, 7, ..., (2n-1), ...\}$ – множина непарних чисел.

Множини M і K є підмножинами множини N.

Множини, елементами яких є числа, називають числовими множинами. Основні числові множини позначають так:

N – множина натуральних чисел; Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел; R – множина дійсних чисел.

Мають місце включення: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

1.2. Числова пряма і числові проміжки

Побудуємо пряму. Візьмемо на ній початок відліку – точку O, виберемо одиницю довжини і задамо напрям (рис. 1.2). Один з двох можливих напрямів на прямій називається додатним (на рис. 1.2 позначений стрілкою), а другий – від'ємним. Пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю довжини, називають *числовою прямою* або *числовою віссю*.

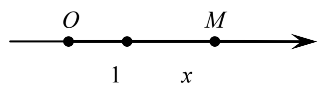


Рис. 1.2

Дійсні числа зображають точками числової прямої.

Якщо точка M відповідає числу x, то вважають, що точка M має координату x і позначають $M(x)$. Координата точки визначає її положення на числовій прямій.

Якщо точка M має координату x, то модуль числа x дорівнює довжині відрізка OM.

Протилежні числа a і $-a$ зображаються на числовій прямій точками, розташованими симетрично відносно початку відліку, оскільки $|a| = |-a|$.

Нехай a і b – дійсні числа і $a < b$.

Множина всіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a \le x \le b$, називається *числовим відрізком* (або просто *відрізком*) і позначається $[a; b]$.

Множина всіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a < x < b$, називається *інтервалом* і позначається $(a; b)$.

Множини всіх дійсних чисел x, що задовольняють нерівності $a \le x < b$, $a < x \le b$, називаються *півінтервалами* і позначаються відповідно $[a; b)$, $(a; b]$.

Відрізки, інтервали і півінтервали називають *числовими проміжками*. На числовій прямій проміжку відповідає певний геометричний відрізок з включенням у нього кінців або без їх включення залежно від типу проміжку.

Наприклад, відрізок $[-2; 1]$ – це множина всіх чисел x, що задовольняють нерівності $-2 \le x \le 1$; півінтервал $(2; 5]$ – це множина всіх чисел x, що задовольняють нерівності $2 < x \le 5$ (рис. 1.3).

Розглядають також нескінченні проміжки. Наприклад, $[a; +\infty)$ – множина всіх чисел x, що задовольняють нерівність $x \ge a$; $(a; +\infty)$ – множина всіх чисел x, що задовольняють нерівності $x > a$, і т. д.; $(-\infty; +\infty)$ – множина всіх дійсних чисел. На числовій прямій нескінченні проміжки зображаються променями.

Наприклад, $(-\infty; -1)$ – це множина всіх чисел x, що задовольняють умову $x < -1$; $[2; +\infty)$ – це множина всіх чисел x, що задовольняють умову $x \ge 2$ (рис. 1.4).

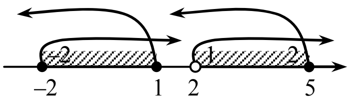


Рис. 1.3

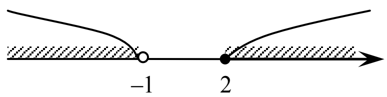


Рис. 1.4

1.3. Операції над множинами

Множину, що містить усі розглядувані множини, називатимемо універсальною множиною. Нехай U – універсальна множина і A, B, C – підмножини в U.

Розглянемо такі три операції над цими множинами.

Доповненням (запереченням) множини A (до універсальної множини U) називається множина $\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Приклад 1. Нехай $U = \{z \in Z \mid -2 \le z \le 7\}$, $D = \{-1, 6, 4\}$,

$E = \{-1, 0, 4, 6, 7\}$, $F = \varnothing$.

Тоді, $\overline{D} = \{-2, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$,

$\overline{E} = \{-2, 1, 2, 3, 5\}$, $\overline{F} = U$.

Об'єднанням множин A і B називається множина $A \bigcup B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать принаймні одній з множин A і B. Інакше кажучи, $A \bigcup B = \{x \in U \mid x \in A$, або $x \in B\}$.

Приклад 2. Нехай $U = Z$, $A = \{-1, 6, 4\}$, $B = \{0, 4, 6, 7\}$, $C = \varnothing$. Тоді, $U \bigcup A = Z$, $A \bigcup B = \{-1, 0, 4, 6, 7\}$, $C \bigcup B = B$.

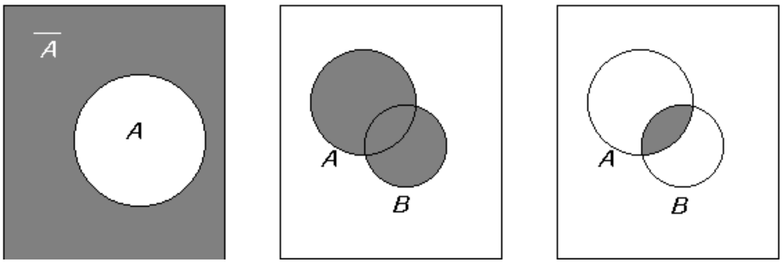
Перетином множин A і B називається множина $A \bigcap B$, яка складається з тих і тільки тих елементів, що належать і множині A і множині B, тобто це спільні елементи множин A і B. Більш коротко: $A \bigcap B = \{x \in U \mid x \in A \quad \text{і} \ x \in B\}$.

Приклад 3. Нехай $U = Z$, $A = \{-1, 6, 4\}$, $B = \{0, 4, 6, 7\}$, $C = \varnothing$.

Тоді, $U \bigcap A = A$, $C \bigcap B = \varnothing$, $A \bigcap B = \{4, 6\}$.

Введені операції називаються ***булевими*** за ім'ям засновника математичної логіки англійського математика Джорджа Буля .

Для ілюстрації операцій над множинами використовуються так звані діаграми Ейлера-Венна, на яких результат операції подається у вигляді затемненої області, а квадрат – це універсальна множина U.



$\overline{A} = U \setminus A$ $\qquad$ $A \bigcup B$ $\qquad$ $A \bigcap B$

Рис. 1.5

Властивості булевих операцій

1. $\overline{\overline{A}} = A$ (інволютивність);
2. $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$ (комутативність);
3. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$;

$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$ (асоціативність);

4. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$;

$(A \bigcap B) \bigcup C = (A \bigcup C) \bigcap (B \bigcup C)$ (дистрибутивність);

5. $A \bigcup A = A$, $A \bigcap A = A$ (ідемпотентність);
6. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$, $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$ (закони де Моргана);
7. $A \bigcup \varnothing = A$, $A \bigcap \varnothing = \varnothing$, $A \bigcup U = U$, $A \bigcap U = A$.

Всі ці властивості справедливі для довільних елементів A, B, C булеана $B(U)$. Доведемо, наприклад, рівності

$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$, та $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

Позначимо $(A \bigcup B) \bigcap C = S$, а $(A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) = T$. З означення рівності множин випливає, що $S = T \Leftrightarrow S \subseteq T$ і $T \subseteq S$. Тому спочатку доводять включення $S \subseteq T$, а потім – включення $T \subseteq S$.

а) Нехай $x \in S = (A \bigcup B) \bigcap C$, тобто $x \in A \bigcup B$ і $x \in C$. Якщо $x \in A$, то $x \in A \bigcap C$, а якщо $x \in B$, то $x \in B \bigcap C$. Тому $x \in (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) = T$. Таким чином, $S \subseteq T$.

б) Нехай тепер $x \in T = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$. Якщо $x \in A \bigcap C$, то $x \in C$ і $x \in A \subseteq A \bigcup B$, тобто $x \in (A \bigcup B) \bigcap C = S$. Аналогічно, за умови $x \in B \bigcap C$ випливає, що $x \in C$ і $x \in \mathrm{B} \subseteq A \bigcup B$, тобто $x \in \mathrm{S}$. Відтак, $T \subseteq S$ і рівність $S = T$ доведена.

Переходимо тепер до доведення другої рівності: $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

а) Нехай $x \in \overline{A \bigcup B} = U \setminus (A \bigcup B)$. Це означає, що $x \notin A$ і $x \notin B$, тобто $x \in U \setminus A = \overline{A}$ і $x \in U \setminus B = \overline{B}$. Звідси, $x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$. Таким чином, $\overline{A \bigcup B} \subseteq \overline{A} \bigcap \overline{B}$.

б) Нехай тепер $x \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$, тобто $x \in U \setminus A$ і $x \in U \setminus B$. Це означає, що $x \notin A$ і $x \notin B$. Звідси, $x \notin A \bigcup B$, тому $x \in \overline{A \bigcup B}$. Отже, $\overline{A} \bigcap \overline{B} \subseteq \overline{A \bigcup B}$, що і треба було довести.

Операції $\bigcup$ і $\bigcap$ розповсюджуються на скінченну і нескінченну кількість множин за допомогою таких означень:

$$A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \in U \mid \exists\ i \in [1, n],\ x \in A_i \right\},$$

$$A_1 \bigcap A_2 \bigcap \ldots \bigcap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left\{ x \in U \mid \forall i \in [1, n],\ x \in A_i \right\}.$$

Якщо Ω – довільна множина індексів, то

$$\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha = \left\{ x \in U \mid \exists \alpha \in \Omega\ ,\ x \in A_\alpha \right\}, \bigcap_{\alpha \in \Omega} A_\alpha = \left\{ x \in U \mid \forall \alpha \in \Omega,\ x \in A_\alpha \right\}.$$

Для об'єднання і перетину довільної кількості множин справедливі аналоги законів дистрибутивності та де Моргана:

4*. $(\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha) \bigcap B = \bigcup_{\alpha \in \Omega} (A_\alpha \bigcap B)$, $(\bigcap_{\alpha \in \Omega} A_\alpha) \bigcup B = \bigcap_{\alpha \in \Omega} (A_\alpha \bigcup B)$;

6^*. $\overline{\bigcup_{\alpha\in\Omega} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha\in\Omega} \overline{A_\alpha}$, $\overline{\bigcap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha\in\Omega} \overline{A_\alpha}$.

Доведемо, наприклад, співвідношення $(\bigcap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha)\bigcup B = \bigcap_{\alpha\in\Omega}(A_\alpha \bigcup B)$.

а) Нехай $x\in S = (\bigcap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha)\bigcup B$. Якщо $x\in (\bigcap_{\alpha\in\Omega} A_\alpha)$, то $x\in A_\alpha \; \forall\alpha\in\Omega$, а тому $x\in A_\alpha \bigcup B \;\; \forall\alpha\in\Omega$. Це означає, що $x\in T = \bigcap_{\alpha\in\Omega}(A_\alpha \bigcup B)$. Якщо ж $x\in B$, то $x\in A_\alpha \bigcup B \;\; \forall\alpha\in\Omega$. Це означає, що $x\in T = \bigcap_{\alpha\in\Omega}(A_\alpha \bigcup B)$. Отже, $S\subseteq T$.

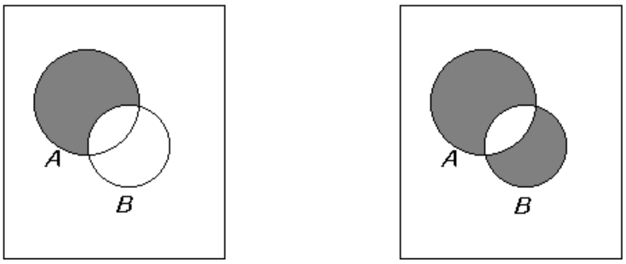
б) Нехай тепер $x\in T$. Тоді $x\in A_\alpha \bigcup B \;\; \forall\alpha\in\Omega$. Якщо $x\in B$, то очевидно, $x\in S$. Якщо $x\notin B$, то $x\in A_\alpha \;\; \forall\alpha\in\Omega$, тобто $x\in \bigcap_{\alpha\in\Omega}(A_\alpha \bigcup B)$ і тому $x\in S$. Таким чином, $T\subseteq S$, що означає $S = T$.

Розглянемо ще дві важливі операції над множинами:

$A \setminus B = \{x\in A \mid x\notin B\}$ – ***різниця*** множин A і B,

$A\oplus B = A\Delta B = \{x\in A\bigcup B \mid x\notin A\bigcap B\}$ – ***диз'юнктивна сума*** (***симетрична різниця***) множин A і B.

На рис. 1.6 зображені діаграми Ейлера-Венна для цих операцій.



$A\setminus B$ $\qquad\qquad$ $A\oplus B$

Рис.1.6

Приклад 4. Нехай $A=\{0;\ 1;\ 2\}$, $B=\{2;\ 3;\ 4\}$, $C=\{5;\ 6\}$. Тоді: $A/A=\varnothing$, $A/B=\{0;1\}$, $A/C=A$, $\varnothing/A=\varnothing$, $B/C=B$, $A\oplus A=\varnothing$, $A\oplus B=\{0;1;3;4\}$, $B\oplus C=\{2;3;4;5;6\}$.

Наведемо ще декілька співвідношень, у яких використовуються розглянуті вище п'ять операцій.

1. $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$;
2. $A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B)$;
3. $A \oplus B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$;
4. $A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$;
5. $A \oplus B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B)$;
6. $A \oplus B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B) = (A \bigcup B) \bigcap \overline{(A \bigcap B)}$.
7. $A \oplus B = B \oplus A$ (комутативність операції $\oplus$);
8. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (асоціативність операції $\oplus$);
9. $A \bigcap (B \oplus C) = (A \bigcap B) \oplus (A \bigcap C)$ (дистрибутивність операції $\oplus$ відносно операції $\bigcap$);
10. $(A \oplus B) \setminus C = (A \setminus B) \oplus (B \setminus C)$ (дистрибутивність операції $\oplus$ відносно операції різниці).

Використовуючи наведені співвідношення, доведемо асоціативність операції $\oplus$ (співвідношення 8).

Оскільки $A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$, то достатньо довести рівність $S = T$, де $S = ((A \oplus B) \setminus C) \bigcup (C \setminus (A \oplus B))$,

$T = (A \setminus (B \oplus C)) \bigcup ((B \oplus C) \setminus A)$.

а) Нехай $x \in (A \oplus B) \setminus C$, тобто $x \in A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$ і $x \notin C$. Якщо $x \in A \setminus B$, то $x \in A$, $x \notin C$ і $x \notin B$. Звідси, $x \notin B \oplus C$ і тому $x \in A \setminus (B \oplus C) \subseteq T$.

Якщо $x \in B \setminus A$, то $x \in (B \setminus C) \setminus A \subseteq (B \oplus C) \setminus A \subseteq T$.

Отже, $(A \oplus B) \setminus C \subseteq T$, тобто у будь-якому випадку $S \subseteq T$.

Нехай тепер $x \in C \setminus (A \oplus B)$, тобто $x \in C$ і $x \notin A \oplus B$. Маємо два випадки: $x \in C$ і $x \in A \bigcap B$, або $x \in C$ і $x \notin A \bigcup B$.

У першому випадку $x \in A \bigcap B \bigcap C \subseteq B \bigcap C$, тобто $x \notin B \oplus C$.

Оскільки $x \in A$, то $x \in A \setminus (B \oplus C) \subseteq T$.

У другому випадку $x \in C$, $x \notin B$, $x \notin A$. Звідси $x \in C \setminus B \subseteq B \oplus C$ і тому $x \in (B \oplus C) \setminus A \subseteq T$. Відтак, завжди $S \subseteq T$.

б) Доведемо обернене включення $T \subseteq S$.

Нехай $x \in A \setminus (B \oplus C) \subseteq T$, тобто $x \in A$ і $x \notin B \oplus C$. Якщо $x \in B \bigcap C$, то $x \in A \bigcap B \bigcap C \subseteq A \bigcap B$ і тому $x \notin A \oplus B$. Звідси $x \in C \setminus (A \oplus B) \subseteq S$.

Якщо тепер $x \notin B \bigcup C$, то і $x \in A \setminus B \subseteq A \oplus B$. Але тоді $x \in C \setminus (A \oplus B) \subseteq S$.

Залишився випадок, коли $x \in (B \oplus C) \setminus A$, тобто $x \in B \oplus C = (B \setminus C) \bigcup (C \setminus B)$ і $x \notin A$.

Якщо $x \in B \setminus C$, то $x \in B$, $x \notin C$, $x \notin A$. Звідси $x \in B \setminus A \subseteq A \oplus B$ і $x \notin C$. Таким чином, $x \in (A \oplus B) \setminus C \subseteq S$ і тому $T \subseteq S$, що і треба було довести.

Введемо ще одну важливу операцію над множинами: ***декартів добуток множин***. Ця операція використовується у багатьох розділах дискретної математики (наприклад, в теорії графів, комбінаториці, в теорії алгебричних систем).

Означення 1. Якщо A і B деякі множини, то їх ***декартовим (прямим)*** добутком називається множина

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

Зауважимо, що $A \times B = \varnothing$ тільки у випадку, коли принаймні один із співмножників є порожня множина. Далі, як правило, множини A і B – непорожні.

У частинному випадку, коли $A = B$, елементи (x, y) множини $A \times A$ називаються ***упорядкованими*** парами (кортежами) множини A. Це означає, що $(x, y) \neq (y, x)$ при $x \neq y$.

Сам декартів добуток $A \times A$ називають ***декартовим квадратом*** множини A і позначають A^2.

Природним способом наведені вище поняття поширюються на довільну скінченну (або нескінченну) сукупність множин. Розглянемо випадок скінченної кількості множин.

Декартовим добутком множин $A_1, \ldots, A_n$ називається множина $B = A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$.

Якщо $A_1 = \ldots = A_n = A$, то $B = A^n$ – ***n-й декартів степінь*** множини A.

Елементи множини A^n – це ***упорядковані n-***ки (упорядковані n-елементні підмножини) множини A. Зауважимо, що в останніх означеннях число n може дорівнювати одиниці.

Приклад 5. Нехай $A=\{0\}$, $B=\{0;1\}$, $C=\{0,1,2\}$, R – множина дійсних чисел. Тоді $A\times B$ = {(0, 0),(0, 1)}, $B\times A$ = {(0, 0),(1, 0)}, $A\times B\times C$ = {(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)}, B^2={(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)}, $R^1 = R$ – множина точок числової прямої, $R^2 = R\times R$ – множина точок площини *XOY*, $R^3 = R\times R\times R$ – множина точок простору *XOYZ*.

Зауваження. Вище було зазначено, що при $A\neq B$ операція множення некомутативна. Далі буде зручно вважати, що ця операція асоціативна, тобто $(A\times B)\times C = A\times(B\times C) = A\times B\times C$.

Це означає, що елементи (*a*, *b*, *c*), ((*a*, *b*), *c*), (*a*, (*b*, *c*)) за означенням співпадають.

Наведемо декілька дистрибутивних законів відносно операцій $\bigcup, \bigcap, \setminus$ і операції множення.

1. $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$;
2. $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$;
3. $(A\bigcup B)\times C=(A\times C)\bigcup(B\times C)$;
4. $(A\bigcap B)\times C=(A\times C)\bigcap(B\times C)$;
5. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;
6. $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Доведемо, наприклад, першу тотожність.

Нехай $z=(x,y)\in A\times(B\bigcup C)$.

Тоді $x\in A$, $y\in B\bigcup C$. Якщо $y\in B$, $z=(x,y)\in A\times B$. У випадку, коли $y\in C$, $z=(x,y)\in A\times C$. Отже, $z=(x,y)\in(A\times B)\bigcup(A\times C)$, і тому $A\times(B\bigcup C)\subseteq(A\times B)\bigcup(A\times C)$.

Нехай тепер $z=(x,y)\in(A\times B)\bigcup(A\times C)$.

Тоді $z=(x,y)\in A\times B$, або $z=(x,y)\in A\times C$. У першому випадку $y\in B\subseteq B\bigcup C$, тобто $z=(x,y)\in A\times(B\bigcup C)$. У другому випадку $x\in A$ і $y\in C\subseteq B\bigcup C$, що знову приводить до включення $z=(x,y)\in A\times(B\bigcup C)$. Отже, $(A\times B)\bigcup(A\times C)\subseteq A\times(B\bigcup C)$, що і доводить рівність 1.

1.4. Відображення і функції

Нехай X – підмножина множини R^1 точок числової прямої. Якщо кожному $x\in X$ за деяким законом f ми ставимо у відповідність єдине дійсне число $y = f(x)$, то закон f називається ***(однозначною дійсною числовою) функцією*** з ***областю визначення*** X. Множина $Y = \{\ y = f(x)\ \mid x \in X\ \}$ називається ***множиною значень*** функції f. Іноді відмовляються від однозначності функції f, тобто певному $x \in X$ відповідає більше одного значення $y = f(x) \in Y$. Тоді говорять про ***багатозначну функцію***, або про ***відображення*** f множини X на множину Y. Наприклад, функція $f(x) = \mathrm{arctg} x$ з областю визначення $X = (-\pi/2; \pi/2)$ і множиною значень $Y = (-\infty; +\infty)$ є однозначною, а функція $f(x) = \mathrm{Arctg} x = \pm \mathrm{arctg} x + n\pi$, $n \in Z$ є багатозначною.

У теорії множин також розглядаються функції і відображення. Під терміном «функція» будемо розуміти тільки ***однозначне*** відображення. Областю визначення X і множиною значень Y відображення f тепер можуть бути множини довільної природи.

Узагальнимо ситуацію. Нехай X – деяка множина, а $D = D(f)$ – підмножина в X, на якій визначено відображення f. Може статись, що $D \neq X$. Множину D назвемо ***областю визначення*** відображення f. Нехай Y – множина, що містить всі елементи $y = f(x)$, де $x \in D$. Якщо $x \in D$, то елемент $y = f(x)$ називається ***образом*** елемента x при відображенні f. При цьому сам елемент x називається ***прообразом*** елемента y і позначається $f^{-1}(y)$. ***Образом*** множини D назвемо множину $E = E(f) = \{y = f(x) \mid x \in X\} \subseteq Y$. При цьому пишуть $E = f(D)$. Ясно, що $E = f(D)$ – множина значень відображення f. Множина всіх прообразів елементів множини E називається ***прообразом*** множини E при відображенні f і позначається $f^{-1}(E)$. Нескладно побачити, що $D = f^{-1}(E)$. Таким чином, множини D і E є підмножинами (можливо невласними) в множинах X і Y, відповідно. Будемо говорити, що відображення f ***діє*** із множини X в множину Y. Форма запису цієї **дії**: $f : X \to Y$. Якщо $y = f(x)$, то записують $f : x \to y$.

При $E = E(f) \subset Y$ говорять про відображення ***«у»*** множину Y. У випадку $E = Y$ говорять про відображення ***«на»*** множину Y.

Нехай A, B $\subseteq D(f)$. Тоді справедливі такі властивості відображення *f:*

1. $f^{-1}(A \bigcup B) = f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$;
2. $f^{-1}(A \bigcap B) = f^{-1}(A) \bigcap f^{-1}(B)$;
3. $f(A \bigcup B) = f(A) \bigcup f(B)$;
4. $f(A \bigcup B) \subseteq f(A) \bigcup f(B)$;
5. $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

Доведемо, наприклад, рівність 1.

а) Нехай $x \in f^{-1}(A \bigcup B)$. Тоді $f(x) \in A \bigcup B$.

Якщо $f(x) \in A$, то $x \in f^{-1}(A)$. Аналогічно, якщо $f(x) \in B$, то $x \in f^{-1}(B)$. Це означає, що $x \in f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$ і тому $f^{-1}(A \bigcup B) \subseteq f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$.

б) Нехай тепер $x \in f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B)$.

Якщо $x \in f^{-1}(A)$, то $f(x) \in A \subseteq A \bigcup B$ і тому $x \in f^{-1}(A \bigcup B)$. Аналогічно доводиться випадок, коли $x \in f^{-1}(B)$.

Таким чином, $f^{-1}(A) \bigcup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \bigcup B)$, що і треба було довести.

1.5. Потужність множини

Нехай $f : D \to E$ – функція, що ***діє*** із множини D ***на*** множину E. Це означає, що для будь-якого елемента $y \in E$ існує прообраз $x = f^{-1}(y)$. Якщо виконується така властивість функції *f*, то останню називають ***сюр'єкцією.*** Якщо різним елементам x_1, x_2 множини D відповідають різні образи $f(x_1)$, $f(x_2) \in D$, то функцію f називають ***ін'єкцією***. Сюр'єктивна та ін'єктивна функція називається ***бієкцією***, або ***взаємно однозначним*** відображенням. Якщо між множинами A і B існує бієкція, то вони називаються ***еквівалентними,*** або ***рівнопотужними***. Еквівалентність позначається $A \sim B$. Всі еквівалентні між собою множини мають те спільне, що називається ***потужністю***. Потужність множини A

будемо позначати символом $\overline{\overline{A}}$. Потужністю скінченної множини називають кількість її елементів. Потужність множини натуральних чисел $N = \{1, 2, \ldots , n, \ldots\}$ позначають символом χ_0, який читають як «алеф нуль» і називають ***кардинальним числом***, яке відповідає потужності множини натуральних чисел. Цей факт записують рівністю $\overline{\overline{N}} = \chi_0$. Множини потужності χ_0, або множини, які мають кардинальне число χ_0, називають також ***зліченними*** множинами.

Приклад 1. Множина цілих чисел Z – зліченна.

Дійсно, існує бієкція $f : N \to Z$, яка має такий вигляд:

$$f(n) = \begin{cases} k, & n = 2k+1 \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots), \\ -k, & n = 2k \ (k = 1,\ 2,\ 3,\ldots). \end{cases}$$

Приклад 2. Q – зліченна множина. Шукану бієкцію на множину N можна здійснити так:

$$1 \to \frac{0}{1},\ 2 \to \frac{1}{1},\ 3 \to \frac{-1}{1},$$

$$4 \to \frac{1}{2},\ 5 \to \frac{2}{1}, 6 \to \frac{-1}{2},\ 7 \to \frac{-2}{1},$$

$$8 \to \frac{1}{3},\ 9 \to \frac{3}{1},\ 10 \to \frac{-1}{3},\ldots$$

Зверніть увагу, що в кожному рядку відповідні раціональні числа мають однакову ***висоту***. Як ***висоту*** раціонального числа $\frac{m}{n}$ розуміють число $|m| + n$. Очевидно, що кількість чисел даної висоти скінченна, тому вказана відповідність є бієкцією множини N на множину Q, тобто Q – зліченна множина.

Доведемо, що існують ***незліченні*** множини.

Теорема 1.1. (Кантора).

Множина дійсних чисел проміжку (0, 1) – незліченна множина.

Доведення. Як відомо, кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу $0,\ a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$. Дійсно, якщо це число ірраціональне, то воно записується нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Якщо це число раціональне, тобто має вигляд $0,\ a_1\, a_2 \ldots a_n$, то останню цифру зменшуємо на одиницю, а після неї записуємо дев’ятки. Наприклад, число 0,321 записуємо як 0,3209999... .

Припустимо, що множина дійсних чисел проміжку (0, 1) – зліченна. Це означає існування бієкції $N \to (0;1)$, тобто всі числа множини (0, 1) можна перелічити:

$$x_1 = 0, a_{11}\, a_{12} ... a_{1n} ..., \; x_2 = 0, a_{21}\, a_{22} ... a_{2n} ..., \; ... \;, \; x_n = 0, a_{n1}\, a_{n2} .. a_{nn} ....$$

Побудуємо новий дріб $x = 0, a_1\, a_2 ... a_n ...$ так, щоб $a_1 \neq a_{11}, a_2 \neq a_{22}, ..., a_n \neq a_{nn}, ...$. Цей дріб, очевидно, не дорівнює жодному з елементів x_i $(i = 1,\ 2, ..., n, ...)$. Це означає, що наведений вище перелік елементів множини (0;1) не містить елемента x, що суперечить припущенню. Тим самим теорему доведено.

Наслідок. Будь-який інтервал $(a, b) \subseteq R^1$ – незліченна множина.

Дійсно, якщо числа a і b скінченні, то бієкцію (0;1) $\to$ (a,b) здійснює функція $x \to (b - a)x + a$. Якщо інтервал співпадає з множиною R^1, то бієкція має вигляд:

$x \to \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \dfrac{1}{2}$. Пропонуємо знайти бієкцію у випадку, коли $a = -\infty$, або $b = +\infty$.

Множини, які еквівалентні проміжку (0; 1), називаються множинами ***потужності континуума.*** Потужність континуума, як правило, позначають літерою ***c***, або χ_1 (алеф один – друге кардинальне число, яке відповідає потужності множини дійсних чисел).

Очевидно, будь-яка нескінченна множина має зліченну підмножину. Тому природно вважати, що має місце нерівність $\chi_0 < \chi_1$. У теорії множин давно виникло питання, чи існують множини потужності проміжної між χ_0 та χ_1, а також більшої ніж χ_1. Перше питання в історії математики набуло назву ***континуум-гіпотези*** Г. Кантора (1878). У XX ст. німецькому математику К. Геделю (1939) та американському математику П. Коену (1963) вдалося встановити, що при умові несуперечливості системи аксіом Цермело-Френкеля, континуум-гіпотезу неможливо ні довести, ні спростувати.

На друге питання позитивну відповідь дає теорема Кантора.

Теорема 1.2. (Кантора). Булеан $B(A)$ множини A має потужність більшу ніж A.

Доведення. Оскільки сукупність одноелементних підмножин множини A в її булеані утворює множину, яка еквівалентна A, то $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B(A)}}$. Залишилось довести тільки, що знак рівності між потужностями неможливий.

Припустимо протилежне, тобто: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B(A)}}$. Це означає, що існує бієкція $A \to B(A)$, яка кожному елементу $a \in A$ ставить у відповідність єдиний елемент $M_a \in B(A)$. При цьому елемент a може як належати множині M_a, так і не належати їй.

Виникає запитання, якому елементу $c \in A$ відповідає множина C. Якщо $c \in C$, то це призводить до суперечності з множиною з множиною C. Якщо $c \notin C$, то його образ, тобто множина C повинна його містити, що знову призводить до суперечності.

Отже, припущення про рівність потужностей множини та її булеана неправильне. Теорема доведена.

Наслідок. Потужності (кардинальні числа) множин не обмежені зверху.

Дійсно, згідно з доведеною теоремою існує нескінченний ланцюг нерівностей: $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B(A)}} < \overline{\overline{B(B(A))}} < \ldots$. Якщо A – зліченна множина, то цей ланцюг можна подати інакше: $\chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \ldots$.

Зауваження. У зв’язку з наведеним наслідком виникає природне питання, чи кожну пару кардинальних чисел можна порівняти між собою?

Оскільки кардинальним числом скінченної множини є кількість елементів в ній, то для таких множин позитивна відповідь на питання очевидна. Для нескінченних множин позитивна відповідь ґрунтується на розгляданні таких випадків.

1. Нехай A і B – деякі нескінченні множини. Якщо в множині B існує підмножина $B_1 \sim A$, то як вже було зазначено вище, природно вважати, що $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$. Аналогічно, при існуванні в A підмножини $A_1 \sim B$ будемо вважати, що $\overline{\overline{A}} \geq \overline{\overline{B}}$. Таким чином, у першому випадку потужності (кардинальні числа) множин A і B можна порівняти.

2. Нехай тепер одночасно існують множини A_1 і B_1, що задовольняють вказані в п. 1 вимоги; тоді має місце наступна теорема.

Теорема 1.3. (Кантора-Бернштейна).

$$\begin{cases} \exists B_1 \subseteq B \mid B_1 \sim A \\ \exists A_1 \subseteq A \mid A_1 \sim B \end{cases} \Rightarrow \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$$

3. Залишився випадок: підмножини A_1 і B_1 з указаними в п. 1 умовами не існують і при цьому $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$. Такий випадок взагалі неможливий, що випливає з аксіоми вибору (див. систему аксіом Цермело-Френкеля). Отже, будь-які два кардинальні числа можна порівняти.

Наступне твердження характерне тільки для скінченних множин.

Теорема 1.4. Скінченна множина не еквівалентна жодній своїй власній підмножині.

Доведення. Нехай існує власна підмножина B скінченної множини A, еквівалентна A, тобто існує бієкція $f : B \to A.$ За означенням бієкції образ $f(B)$ множини B має таку ж кількість елементів, що і B. Оскільки B – власна підмножина в A, то $f(B)$ також власна підмножина в A. Але для бієкції має виконуватись рівність $f(B) = A.$ Таким чином, ми отримали суперечність з припущенням, що і доводить теорему.

Теорема 1.5. У нескінченній множині T завжди існує власна підмножина S, що еквівалентна T.

Доведення. Виберемо в T зліченну підмножину $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. Це завжди можна зробити таким чином: якщо a_1 – довільний елемент множини T, то $a_2 \in T \setminus \{a_1\}, \ldots, a_n \in T \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}, \ldots$.

Далі, розглянемо дві підмножини в A:

$B = \{a_1, a_3, \ldots, a_{2k+1}, \ldots\}$ і $C = \{a_2, a_4, \ldots, a_{2l}, \ldots\}$. Очевидно, $A = B \bigcup C$ і $B \bigcap C = \varnothing$. Позначимо $S = T \setminus B$.

Легко перевіряються такі рівності: $T = (T \setminus A) \bigcup A,$ $S = (T \setminus A) \bigcup C,$ $(T \setminus A) \bigcap A = \varnothing,$ $(T \setminus A) \bigcap C = \varnothing.$ Множина $T \setminus A$ еквівалентна сама собі, оскільки існує тривіальна бієкція $x \to x \ \forall x \in T \setminus A.$ Множини A і C еквівалентні як зліченні множини. Еквівалентність цих множин можна задати явно:

$a_n \to a_{2n}$, де $a_n \in A,\ \ a_{2n} \in C\ \ (n = 1, 2, \dots)$. Таким чином, множина T еквівалентна своїй власній підмножині S.

Зауваження. Множина $T \setminus S = T \setminus (T \setminus B) = B$ за побудовою нескінченна. Але теорема залишиться справедливою і для випадку, коли B – довільна скінченна підмножина в T. Дійсно, для цього досить тільки визначити зліченну підмножину C так, щоб $B \bigcap C = \varnothing$. Це легко зробити шляхом вилучення елементів множини C з різниці $T \setminus B$. Далі позначаємо $A = B \bigcup C$, $S = T \setminus B$. Очевидно, що $A \sim C$. Подальші міркування аналогічні наведеним при доведенні теореми 1.5.

Наслідок. Якщо $a,\ b$ – дійсні числа, то має місце низка еквівалентностей: $(a, b) \sim [a, b) \sim (a, b] \sim [a, b] \sim R$.

Теорема 1.6. Об'єднання скінченної, або зліченної сукупності зліченних множин є зліченною множиною.

Доведення. Нехай спочатку $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, де $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}, \dots\}$ – зліченні множини для всіх i=1, 2, ... ,n.

Можна припустити, що $A_m \bigcap A_l = \varnothing$ для всіх $m \neq l$. Дійсно, у протилежному випадку множину A можна було б подати у вигляді об'єднання множин $B_i\ (i = 1, \dots, n)$, що вже попарно не перетинаються: $B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$. Розглянемо порядок переліку елементів множини A:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11} & & a_{12} & \to & a_{13} & & \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
a_{n1} & \to & a_{n2} & & a_{n3} & \to & a_{n4}
\end{array}
$$

Перелік елементів $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ здійснюється за схемою:

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & & a_{12} & \to & a_{13} & & a_{14} & \to \cdots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \\
a_{21} & \to & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow & \\
a_{31} & \leftarrow & a_{32} & \leftarrow & a_{33} & & a_{34} & \\
\downarrow & & & & & & \uparrow & \\
a_{41} & \to & a_{42} & \to & a_{42} & \to & a_{44} &
\end{array}$$

Наслідок. Декартів добуток $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ зліченних множин $A_1, \ldots, A_n$ є множина злічена.

Доведення. Нехай $n = 2$. Тоді $A = A_1 \times A_2$ і множину A можна зобразити як об'єднання зліченної сукупності зліченних множин $A_i = \{(a_{i1}, a_{2j}) \mid j = 1, 2, \ldots\}$, де $i = 1, 2, \ldots$. Згідно з доведеним вище, множина A – злічена. Загальний випадок n множин A_i обґрунтовується за принципом математичної індукції, яку розглянемо в наступному розділі.

Проілюструємо доведений щойно наслідок.

Приклад 3. Введемо спочатку таке означення. Число називається ***алгебраїчним***, якщо воно є коренем деякого многочлена $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ з цілими коефіцієнтами.

Доведемо, що множина алгебраїчних чисел злічена.

Можна вважати, що коефіцієнти многочлена $P_n(x)$ (у сукупності) не мають спільних дільників. Такий многочлен фіксованого степеня n однозначно визначається набором $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ своїх коефіцієнтів. Кожний такий набір є, очевидно, елемент декартового степеня Z^n множини цілих чисел. Оскільки множина Z – злічена, то зліченною є також і множина Z^n. Отже, сукупність многочленів фіксованого степеня n – злічена множина. З курсу вищої алгебри відомо, що число різних коренів многочлена $P_n(x)$ не перевищує n, тобто є скінченною множиною. Тоді за твердженням теореми 1.5, множина коренів усіх многочленів фіксованого степеня n є зліченною. Оскільки $n \in N$ і N-зліченна множина, то знов застосовуючи теорему 1.5, отримаємо зліченність множини коренів многочленів $P_n(x)$ для всіх n. Це і означає зліченність множини алгебраїчних чисел.

Запитання і вправи

1. З чого складається множина?
2. Коли множина вважається заданою?
3. Наведіть приклади числових множин.
4. Наведіть приклади скінченних і нескінченних множин.
5. Яка множина називається порожньою?
6. Що таке інтервал, відрізок, нескінченний інтервал?
7. Доведіть співвідношення:

а) $\overline{\overline{A}} = A$;

б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

в) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

г) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cap D)$;

д) $(A \cup B) \cap A = A$;

е) $A \cup \overline{A} = U$;

є) $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

8. Доведіть: $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, $\{1, 2, 3\} \neq \{\{1, 2\}, 3\}$.

9. Доведіть, що множина коренів многочлена $f(x) = g(x)\,h(x)$ є об'єднанням множин розв'язків рівнянь $g(x) = 0$ і $h(x) = 0$.

10. Доведіть, що:

а) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = U$;

б) $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C$ і $B \subseteq C$;

в) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow A \subseteq B$ і $A \subseteq C$;

г) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;

д) $A = \overline{B} \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$;

е) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \supseteq A_n \supseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_2 = \ldots = A_n$;

є) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$; $A \cup B = U$;

ж) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;

з) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$;

и) $A \subseteq B \Rightarrow A \bigcap C \subseteq B \bigcap C$;

і) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$;

ї) $(\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha) \bigcap B = \bigcup_{\alpha \in \Omega} (A_\alpha \bigcap B)$;

й) $\overline{\bigcap_{\alpha \in \Omega} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \overline{A_\alpha}$;

к) $\overline{\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha} = \bigcap_{\alpha \in \Omega} \overline{A_\alpha}$.

11. Доведіть тотожності:

а) $A \setminus (B \bigcup C) = (A \setminus B) \bigcap (A \setminus C)$;

б) $A \setminus (B \bigcap C) = (A \setminus B) \bigcup (A \setminus C)$;

в) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \bigcup (A \bigcap C)$;

г) $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$;

д) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \bigcup C)$;

е) $A \bigcap (B \setminus C) = (A \bigcap B) \setminus (A \bigcap C) = (A \bigcap B) \setminus C$;

є) $(A \bigcup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigcup (B \setminus C)$;

ж) $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$;

з) $A \setminus B = A \setminus (A \bigcap B)$.

12. Доведіть співвідношення:

а) $A \oplus B = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (\overline{A} \bigcap B)$;

б) $A \oplus B = (A \bigcup B) \bigcap (\overline{A \bigcap B})$.

в) $A \oplus B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$;

г) $A \oplus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$;

д) $A \oplus B = B \oplus A$;

е) $(A \oplus B) \oplus A = B$;

є) $A \oplus (A \oplus B) = B$;

ж) $A \oplus \varnothing = A$, $A \oplus U = \overline{A}$, $A \oplus A = \varnothing$;

з) $A \bigcup B = (A \oplus B) \oplus (A \bigcap B)$;

и) $A \bigcap (B \oplus C) = (A \bigcap B) \oplus (A \bigcap C)$;

і) $(A \bigcup B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \bigcup (B \oplus C)$;

й) $A \bigcup (B \oplus C) = (A \bigcup B) \oplus (A \bigcup C)$;

к) $(A \cap B) \oplus C \supseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$;

л) $(A \oplus B) \setminus C = (A \setminus C) \oplus (B \setminus C)$;

м) $A \oplus (B \setminus C) = (A \oplus B) \setminus (A \oplus C)$;

н) $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \oplus C)$;

п) $(A \oplus B) \setminus (A \oplus C) \subseteq A \oplus (B \setminus C)$.

13. Доведіть співвідношення:

а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

в) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

г) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$;

д) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$;

е) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

є) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$;

ж) $A \times B = (A \times D) \cap (C \times B)$, де $A \subseteq C$ і $B \subseteq D$;

з) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

и) $U^2 \setminus (A \times B) = ((U \setminus A) \times U) \cup (U \times (U \setminus B))$.

14. Доведіть співвідношення:

а) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

б) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

в) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

г) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$.

У випадках в) і г) наведіть приклад нерівності множин.

15. Знайдіть бієкцію між множиною натуральних чисел та множиною парних від'ємних чисел.
16. Знайдіть бієкцію між множиною натуральних чисел та множиною всіх парних чисел.
17. Наведіть приклад бієкції між множинами цілих та цілих парних чисел.
18. Чи рівнопотужні множини $\{3n+1 \mid n \in Z\}$ і $\{2k-1 \mid k \in N\}$?
19. Яка потужність множини всіх трикутників на площині R^2, координати вершин яких мають раціональні координати?
20. Яка потужність множини строго зростаючих послідовностей натуральних чисел?

2. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

2.1. Дедукція та індукція

Усі твердження діляться на *загальні* і *частинні*. Приклади загальних тверджень:

1) натуральне число ділиться на 2 тоді і тільки тоді, коли воно закінчується парною цифрою;

2) сума внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180°.

Приклади частинних тверджень:

1) число 46 ділиться на 2;

2) в правильному трикутнику сума внутрішніх кутів дорівнює 180°.

Перехід від загальних тверджень до частинних називається дедукцією. Дедукція використовується під час розв'язання частинних задач за допомогою загальних теорем.

Перехід від частинних тверджень до загальних називається індукцією. Наприклад, в арифметичній прогресії: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d$, $a_4 = a_3 + d$; звідси можна зробити припущення, що $a_n = a_{n-1} + d$ для будь-якого $n \in N$.

Дедукція завжди призводить до правильних результатів. Індукція може привести як до правильних, так і до неправильних результатів. Математична індукція призводить до правильних результатів.

2.2. Метод математичної індукції

В основі *методу математичної індукції* лежить *принцип математичної індукції.*

Теорема 2.1. Нехай $A(n)$ – твердження, сформульоване для натурального числа n.

Твердження $A(n)$, де $n \in N$, справедливе для будь-якого натурального числа n, якщо:

1) виконується $A(1)$, тобто твердження $A(n)$ правильне якщо $n = 1$;

2) з припущення, що виконується $A(k)$ випливає, що виконується $A(k + 1)$.

Доведення методом математичної індукції складається з двох частин:

1) перевірка справедливості $A(1)$;

2) доведення правильності $A(k+1)$ у припущенні, що $A(k)$ виконується.

Приклад 1. Довести, що сума $x_n = 4^n + 15n + 8$ ділиться на 9 при довільному натуральному n.

Розв'язання. Якщо a ділиться на b без залишку, то будемо писати «$a \vdots b$». Перевіримо $A(1)$: $x_1 = 4 + 15 + 8 = 27 \vdots 9$. Нехай $A(k)$ виконується, тобто $x_k = 4^k + 15k + 8 = 9\,m$. Покажемо, що тоді правильне $A(k+1)$, тобто що $x_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) + 8 \vdots 9$. Справді, $4^{k+1} + 15(k+1) + 8 = 4\left(4^k + 15k + 8\right) - 45k - 9 = 9(4m - 5k - 1) \vdots 9$.

За принципом математичної індукції припущення правильне для будь-якого натурального n.

Приклад 2. Довести нерівність:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Доведення. 1) $A(1)$: $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$.

2) Нехай правильне $A(k)$, тобто $b_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2k-1}{2k} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$.

Тоді

$b_{k=1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = b_k\cdot\frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}$. Оскільки

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3k+4}}\right)^2 = \frac{4k^2+4k+1}{(3k+1)4(k+1)^2} - \frac{1}{3k+4} =$$

$$= \frac{12k^3+12k^2+3k+16k^2+16k+4-12k^3-24k^2-12k-4k^2-8k-4}{(3k+1)4(k+1)^2(3k+4)} =$$

$= \frac{k}{4(3k+1)(k+1)^2(3k+4)} < 0$ то, $b_{k+1} < \frac{1}{3k+4}$, тобто твердження $A(k+1)$ правильне. Нерівність доведено.

Приклад 3. Покажемо застосування неповної індукції для висунення гіпотези. Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 ... n$ позначається знаком $n!$ і читається так: «*n* факторіал».

Знайти формулу для суми: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + ... + n \cdot n!$

Розв'язання. Позначимо шуканий вираз через S_n.

Маємо:

$S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 1 + 4 = 5$,

$S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 1 + 4 + 18 = 23$,

$S_4 = S_3 + 4 \cdot 4! = 23 + 96 = 119$.

Очевидно, що 119 = 120 – 1 = 5! – 1, 23 = 24 – 1 = 4! – 1, 5 = 6 – - 1 = 3! – 1, 1 = 2! – 1.

Виникає гіпотеза: $S_n = (n+1)! - 1$. Доведемо її методом математичної індукції.

1) $A(1)$ виконується $(S_1 = 2! - 1)$.

2) Нехай виконане $A(k): S_k = (k+1)! - 1$. Тоді

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! =$$
$$= (k+1)!(k+1+1) - 1 = (k+2)! - 1.$$

$A(k+1)$ теж виконується. Таким чином: $S_n = (n+1)! - 1$.

2.3. Узагальнення принципу математичної індукції

Деякі висловлювання (твердження) справедливі не для всіх натуральних *n*, а лише для *n*, починаючи з деякого числа *m*. Такі твердження доводяться з використанням ***узагальненого принципу математичної індукції***: твердження *A*(*n*), де *n* – натуральне число, справедливе для всіх цілих значень $n \geq m$, якщо виконані дві умови:

1) *твердження* $A(n)$ *виконується для* $n = m$;

2) *із припущення, що* $A(n)$ *виконане для* $n = k$ (k *– натуральне число,* $k \geq m$), *випливає, що воно виконується і для значення* $n = k + 1$.

При $m = 1$ отримуємо вихідне формулювання принципу математичної індукції.

Приклад 1. Довести для $n \geq 10$, що $2^n > n^3$.

Розв'язання. 1) При $n = 10: 2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000$; значить, $A(10)$ правильне;

2) Нехай $A(n)$ виконане: $2^k > k^3$ при $k \geq 10$.

Тоді $2^{k+1} - (k+1)^3 = 2^k \cdot 2 - 2k^3 + 2k^3 - (k+1)^3 =$

$$2\left(2^k - k^3\right) + 2k^3 - k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = 2\left(2^k - k^3\right) + k^3 - 3k^2 - 3k - 1 =$$

$$2\left(2^k - k^3\right) + k^3 - 3k^3 + 3k - 1 - 6k = 2\left(2^k - k^3\right) + (k-1)^3 - 6k > 0,$$

оскільки при $k \geq 10$ $(k-1)^2 > k$, $k - 1 > 6$.

Значить, $A(k+1)$ теж правильне.

Згідно з узагальненим принципом математичної індукції твердження правильне при всіх $n \geq 10$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Розв'язання. 1) Якщо $n = 1$, то $\frac{1}{2} < \frac{13}{24}$ і $A(1)$ не виконується.

Якщо $n = 2$ $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ і $A(2)$ виконується. Застосуємо індукцію.

2) Нехай $A(k)$ виконується для $k \geq 2$. Розглянемо $A(k+1)$:

$$\frac{1}{k+1+1} + \frac{1}{k+1+2} + ... + \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + ... + \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)^2(2k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Отже, $A(k+1)$ виконується і розв'язком нерівності є всі натуральні числа $n \geq 2$.

2.4. Інша форма принципу математичної індукції

Теорема 2.2. Якщо: 1) виконується $A(1)$;

2) із виконання $\{A(1), A(2),..., A(k)\}$ випливає, що виконується $A(k+1)$, то $A(n)$ виконується при всіх $n \in N$.

Перевірку можна починати і не з 1.

Теорема 2.3. Якщо: 1) виконується $A(m)$;

2) із виконання $\{A(m), A(m+1),..., A(k)\}$, де $k \geq m$, випливає, що виконується $A(k+1)$, то $A(n)$ виконується при всіх $n = m, m+1, ...$

Приклад. Довести, що будь-яке натуральне число $n \geq 2$ розкладається на прості множники.

Розв'язання. Нехай $A(n)$ – твердження, що n розкладається на прості множники.

1) $A(2)$ – число 2 – просте, тобто $A(2)$ правильне.

2) Доведемо що із справедливості тверджень $\{A(2), A(3), ... A(k)\}$ випливає справедливість $A(k+1)$. Або число $k+1$ просте, або $k+1 = d_1 d_2$, де $2 \leq d_1 \leq k$, $2 \leq d_2 \leq k$. Розкладаємо d_1, d_2 і перемножуємо їх розклади.

Запитання і вправи

1. Що таке принцип математичної індукції?
2. Як розв'язати задачу методом математичної індукції?
3. З яких частин (кроків) складається розв'язання задачі методом математичної індукції?
4. Як узагальнюється принцип математичної індукції?
5. Які Ви знаєте форми принципу математичної індукції?
6. Доведіть такі формули:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

б) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

в) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

г) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+...+n(3n+1)=n(n+1)^2$.

д) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$.

е) $1^3+2^3+\ ...\ +n^3=(1+2+3+\ ...\ n)^2$.

7. Використовуючи неповну індукцію, спробуйте передбачити такі результати:

а) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ ...\ +n(3n+1)$.

б) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)...\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$.

в) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

8. Доведіть нерівності:

а) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1$, б) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1}<n$;

в) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n},\ n\geq 2$; г) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

8. Доведіть:

а) $\left(7^{n+2}+8^{2n+1}\right)\vdots\ 57$;

б) $\left(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}\right)\vdots\ 17$;

в) $\left(4^n+15n-1\right)\vdots\ 9$;

г) $\left(2^{n+5}\cdot 3^{4n}+5^{3n+1}\right)\vdots\ 37$;

д) $\left(3^{2n+3}-24n+37\right)\vdots\ 64$;

е) $\left(2^{n+2}\cdot 3^n+5^n-4\right)\vdots\ 25$.

3. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторикою називають розділ математики, в якому вивчаються питання про розташування та вибір об'єктів за певними правилами і методи обчислення кількості всіх можливих способів, якими це можна здійснити.

Задачі такого типу називаються комбінаторними, а методи їх розв'язку – методами комбінаторного аналізу.

Представники багатьох спеціальностей часто мають справу з комбінаторними задачами. Хіміки – при розгляді різних можливих типів зв'язку атомів у молекулах, біологи – при вивченні послідовності чергування амінокислот у білкових сполуках, лінгвісти – під час підрахунку варіантів значень букв невідомої мови тощо.

Формування основних понять комбінаторики відбувалося паралельно з розвитком інших розділів математики: таких, як алгебра, теорія чисел, теорія ймовірностей. Ще математикам Давнього Сходу була відома формула, яка виражає кількість сполучень через біноміальні коефіцієнти, і формула бінома Ньютона з натуральним показником. Однією з класичних комбінаторних задач, що згадуються у міфах Давнього Сходу, є побудова *магічного квадрата*, тобто розташування перших n^2 натуральних чисел у квадратній таблиці (матриці) $n \times n$ таким чином, щоб сума чисел у рядках, стовпцях і діагоналях дорівнювали одному й тому ж числу. Наприклад,

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$ – магічний квадрат при $n = 3$.

Для побудови таких квадратів існує ціла низка методів. Проте досі не розв'язано задачу про визначення їх числа при $n > 4$.

Поява комбінаторики, як розділу математики, пов'язана з працями французьких математиків Б. Паскаля (1623–1662) і П. Ферма (1601–1665). Подальший розвиток комбінаторики продовжувався в роботах Я. Бернуллі (1654–1705), Г. Лейбніца (1646–1716) та Л. Ейлера (1707–1783). Можна вважати, що з появою цих праць комбінаторні методи виділились у самостійну частину математики.

Відродження інтересу до комбінаторики припадає на 50-ті роки минулого сторіччя у зв'язку з бурхливим розвитком кібернетики і дискретної математики, а також широким використанням ЕОМ. Комбінаторні методи зараз використовуються для розв'язування транспортних задач, зокрема, задач для складання розкладів, планів виробництва і реалізації продукії. Встановлено зв'язок між комбінаторикою і задачами математичної статистики, теорії кодування. Значну роль комбінаторні методи відіграють і в «чистій» математиці – теоріі груп і їх відображень, основах геометрії, топології, в теорії неасоціативних алгебр тощо.

3.1. Основні принципи комбінаторики

Позначимо через $N(A)$ число елементів скінченної множини A. Мають місце два основних правила комбінаторики.

Теорема 3.1 (Правило суми). Якщо множину A зображено у вигляді об'єднання $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ множин, що попарно не перетинаються, то $N(A) = N(A_1) + ... + N(A_n)$.

Доведення. При $n = 1$ і $n = 2$ правило суми очевидне.

Оскільки $A = A_1 \cup (A_2 \cup ... \cup A_n)$, то $N(A) = N(A_1) + N(A_2) \cup ... \cup N(A_n)$. Застосовуючи математичну індукцію, отримуємо шукану рівність.

Під час розв'язування задач буває корисним інше формулювання правила суми.

Нехай з деякої множини вибираються n множин $A_1, ..., A_n$. Якщо підмножину A_i можна вибрати k_i способами, то вибір множини $A = A_1 \cup ... \cup A_n$ можна здійснити $k_1 + ... + k_i$ способами.

Теорема 3.2 (Правило добутку). Нехай потрібно виконати послідовно k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, а другу n_2 способами, третю – n_3 способами і так до k-ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі дії разом можна виконати $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ способами. Нехай $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ – декартів добуток. Тоді має місце рівність $N(A) = N(A_1) N(A_2) ... N(A_n)$.

Доведення. Будемо доводити індукцією за n. При $n = 1$ маємо $A = A_1$ і $N(A) = N(A_1)$. Якщо $n = 2$ і $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1r}\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2s}\}$, то елементи $b_{ij} = \{a_{1i}, a_{2j}\}$ декартового добутку $A = A_1 \times A_2$ можна розмістити у таблиці (будемо називати її матрицею) B розмірності $r \times s$:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} b_{12} ... b_{1s} \\ b_{21} b_{22} ... b_{2s} \\ .... \\ b_{r1} b_{r2} ... b_{rs} \end{pmatrix}.$$

Оскільки число елементів матриці *B* дорівнює *rs,* то $N(A) = N(A_1)N(A_2)$. Отже, при $n = 2$ правило добутку також виконується.

Якщо $n > 2$, то згідно з доведеним $N(A) = N(A_1)N(A_2 \times ... \times A_n)$. За припущенням індукції $N(A_2 \times ... \times A_n) = N(A_2) \times ... \times N(A_n)$.

Тому $N(A) = N(A_1)N(A_2)...N(A_n)$ і все доведено.

Наведемо ще одне формулювання для правила добутку.

Нехай потрібно виконати одну за одною *n* дій. Якщо *i*-ту дію можна виконати k_i способами (i = 1, …, n), то усі *n* дій можна виконати $k_1 ... k_n$ способами.

Приклад 1. Скільки у *n*-ковій системі числення натуральних чисел, які записуються *l* знаками? А скільки тих, що записуються не більше ніж *k* знаками?

Розв'язання. Будь-яке *l*-значне число *m* у *n*-й системі числення можна записати у вигляді $m = a_1 n^{l-1} + a_2 n^{l-2} + ... + a_l$, причому кожна з цифр $a_1, a_2, ..., a_l$ цього числа не перевищує $n - 1$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $l = 1$. Кількість однозначних чисел, очевидно, дорівнює 10.

Нехай $l \geq 2$. Оскільки кожне *l*-значне число *m* однозначно визначається набором цифр $(a_1, a_2, ..., a_l)$, то за правилом добутку кількість *l*-значних натуральних чисел дорівнює $(n-1)n^{l-1}$ (тому що $a_1 \neq 0$).

Враховуючи те, що $2 \leq l \leq k$, за правилом суми кількість чисел, що записуються не більше ніж *k* знаками, дорівнює

$$\sum_{l=2}^{k} (n-1)n^{l-1} = (n-1)(n + ... + n^{k-1}) = n^k - n.$$

Додаючи до цього числа кількість однозначних чисел, остаточно отримаємо шукану кількість, а саме n^k.

Приклад 2. У матриці *A* розмірності $m \times n$ елементами є числа, що дорівнюють плюс або мінус одиниці, причому добуток елементів у кожному рядку і у кожному стовпці дорівнює одиниці. Скільки існує таких матриць?

Розв'язання. Розглянемо у лівому верхньому куті матриці *A* матрицю *B* розмірності $(m-1)\times(n-1)$. Покажемо, що заповнюючи її у довільний спосіб елементами +1 та –1, ми однозначно визначимо елементи *n*-го стовпця і *m*-го рядка матриці *A*.

Нехай *z* – добуток усіх елементів матриці *B*. Впишемо в останній рядок і стовпець матриці *A* елементи +1 або –1, що визначаються елементами матриці *B*. При цьому тільки елемент a_{mn} з матриці *A* поки що не отримає значення. Нехай *xy* – добуток елементів, записаних у рядок *x* та стовпець *y* відповідно. Очевидно, що $xz = yz = 1$, тобто $x = y$. Якщо $x = y = 1$, то покладаємо $a_{mn} = 1$; якщо ж $x = y = -1$, то беремо $a_{mn} = -1$.

Таким чином встановлено, що достатньо тільки присвоїти елементам матриці *B* у довільний спосіб значення +1 чи –1. Отже, число шуканих матриць *A* дорівнює числу матриць *B*. А кількість таких матриць визначається за правилом множення і дорівнює $2^{(m-1)(n-1)}$.

Приклад 3. Скільки дільників має довільне натуральне число *n* ?

Розв'язання. Відомо, що натуральне число *n* можна однозначно подати у вигляді добутку $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ степенів простих чисел, причому $\alpha_i \geq 0$ (*i*=1, 2…,*m*). Легко бачити, що кожний дільник *k* числа *n* однозначно визначається набором $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$, де $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Це означає, що для кожного β_i існує $\alpha_i + 1$ можливих виборів з чисел $0, 1, \ldots, \alpha_i$. За правилом добутку число дільників дорівнює $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_m + 1)$.

Приклад 4. Скількома способами з 28 кісток доміно можна вибрати дві кістки так, щоб їх можна було б прикласти одна до одної (за правилами гри)?

Розв'язання. Спочатку виберемо одну кістку. Це можна зробити 28 способами. При цьому у 7 випадках вибрана кістка виявиться «дублем», тобто кісткою вигляду 00, 11, 33, 44, 55,66, а у 21 випадку – кісткою з різними числами очків. Для кожного «дубля» існує 6 кісток, які до нього можна прикласти (наприклад, для «дубля» 00 такими кістками будуть 01, 02, 03, 04, 05, 06). Для кожної кістки з різними числами очків існує, очевидно, 12 кісток, які до неї можна прикласти.

За правилом добутку і суми одержуємо $7\times 6+21\times 12=294$ способи вибору пари. Відмітимо, що у наведеному міркуванні враховувався і порядок, у якому вибиралися кістки. Тому кожна кістка з'являлася двічі (наприклад, перший раз 01 і 16, а другий раз 16 і 01). Якщо не враховувати порядок вибору кісток, то отримаємо вдвоє менше способів вибору, а саме 147 способів.

3.2. Метод включень і вилучень

Відповідно до правила суми $N(A\bigcup B)=N(A)+N(B)$, якщо $A\bigcap B=\varnothing$. Нехай $A\bigcap B\neq\varnothing$. Тоді у сумі $N(A)+N(B)$ число елементів перетину $A\bigcap B$ враховано двічі. Це означає, що $N(A\bigcup B)=N(A)+N(B)-N(A\bigcap B)$. Узагальнимо цю формулу на випадок *n* множин.

Теорема 3.3. Якщо $A_1, A_2, ..., A_n$ – довільні скінченні множини, то

$$N(A_1\bigcup A_2\bigcup ...\bigcup A_n)=\sum_{i=1}^{n}N(A_i)-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}N(A_{i_1}\bigcap A_{i_2})+\ldots$$

$$+(-1)^{k-1}\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}N(A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap ...\bigcap A_{i_k})+\ldots \qquad (3.1)$$

$$\ldots+(-1)^{n-1}N(A_1\bigcap ...\bigcap A_n).$$

Доведення. Очевидно, що формула (3.1) має місце при $n=1$ і $n=2$. Припустимо, що вона виконується для $n-1$ множин. За індукцією достатньо показати, що формула (3.1) має місце і для випадку *n* множин.

Позначимо $S_k(A_1, A_2, ..., A_n)=\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}N(A_{i_1}\bigcap A_{i_2}\bigcap ...\bigcap A_{i_k})$.

Тоді, використовуючи справедливість формули при $n=2$ і припущення індукції, та враховуючи те, що мають місце співвідношення:

$$N(A_1)+S_1(A_2,...,A_n)=S_1(A_1.A_2,...,A_n),$$

$$S_2(A_2,...,A_n)+S_1\left(A_1\bigcap A_2,...,A_1\bigcap A_n\right)=S_2(A_1,A_2,...,A_n),$$

$$S_3(A_2,...,A_n)+S_2\left(A_1\bigcap A_2,...,A_1\bigcap A_n\right)=S_3(A_1,A_2,...,A_n),$$

……………………………………………………………….

$$S_{n-1}\left(A_1\bigcap A_2,...,A_1\bigcap A_n\right)=S_n(A_1,A_2,...,A_n),$$

отримаємо

$$N(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = S_1(A_1, A_2, ..., A_n) - S_2(A_1, A_2, ..., A_n) + \ldots$$
$$+(-1)^{n-1} S_n(A_1, A_2, ..., A_n).$$

Теорему доведено.

Формула (3.1) називається класичною формулою включень і вилучень. Метод підрахунку за цією формулою, який полягає в послідовному виконанні операцій додавання і віднімання, що чергуються між собою, називається методом включень і вилучень.

Приклад. У групі з 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку мову – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, усі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної мови?

Розв'язання. Нехай A_1 означає множину студентів, що знають англійську мову: $N(A_1) = 28$; A_2 – множину студентів, що знають німецьку мову: $N(A_2) = 30$; A_3 – множину студентів, що знають французьку мову: $N(A_3) = 42$. Тоді $N(A_1 \cap A_2) = 8$, $N(A_1 \cap A_3) = 10$, $N(A_2 \cap A_3) = 5$, $N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 3$. Множина $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ – це студентів, що знають принаймні одну мову. Отже, за формулою (3.1)

$$N(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = N(A_1) + N(A_2) + N(A_3) -$$
$$-(N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + N(A_2 \cap A_3)) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= 28 + 30 + 42 - 8 + 10 + 5) + 3 = 80\ .$$

Звідси випливає, що 20 студентів не знають жодної мови.

3.3. Упорядковані множини

Означення 1. Множину називають **упорядкованою**, якщо кожному її елементу поставлено у відповідність деяке натуральне число (номер елемента) так, що різним елементам відповідають різні числа.

Упорядковані множини вважають різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Означення 2. Підмножини, складені з будь яких елементів даної множини, які відрізняються елементами або порядком цих елементів, називають **сполуками**.

Приклад 1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти багато різних сполук по 2, 3, 4, 5 цифр. Наприклад: 12, 21, 123, 12324, … . Серед цих сполук є такі, що відрізняються кількістю цифр (12, 123, 1234, … .) або їх порядком (12, 21).

Приклад 2. Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: 1) жодна з цифр не повторюється; 2) цифри можуть повторюватися; 3) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватися).

Розв'язання. 1) першою цифрою можуть бути числа 1, 2, 3, 4, 5, тобто існує п'ять способів її вибору. Якщо першу цифру вибрано, то для другої способів вибору – п'ять, для третьої – чотири, для четвертої – три. Отже, згідно з принципом добутку, загальна кількість способів $5\times5\times4\times3=300$.

2) першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5 (5 способів вибору), кожною з наступних цифр може бути 0, 1, 2, 3, 4, 5 (6 способів). Отже, кількість шуканих чисел: $5\times6\times6\times6=1080$.

3) першою може бути одна з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, а останньою – одна з цифр: 1, 3, 5. Отже, загальна кількість непарних чисел: $5\times6\times6\times3=540$.

Сполуки можуть бути трьох видів: **розміщення, перестановки, сполучення**.

3.4. Сполуки без повторень

Означення 3. **Розміщенням з *n* елементів по** $k(k\le n)$ називають такі упорядковані сполуки, що складаються з k елементів, взятих із даних n елементів, і відрізняються одна від одної елементами або порядком.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k і обчислюють за формулою:

$$A_n^k=n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Зауваження. $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n,\ 0!=1,\ 1!=1.$

Приклад 1. Скількома способами можна вибрати 6 книг з 39?

Розв'язання. Шукане число способів:

$A_{39}^6=39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35\cdot34=2349088560.$

Означення 4. Розміщення з n елементів по n називають **перестановками.**

Число перестановок з n елементів позначають через P_n і обчислюють за формулою: $P^n = A_n^n = n!$

*Зауваження. Р*ізні перестановки з n елементів відрізняються лише порядком елементів.

Приклад 2. Скількома способами можна розмістити на книжковій полиці чотири томи математичної енциклопедії.

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу способів упорядкування множини, що містить чотири елементи, тобто $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Означення 5. Сполученнями (комбінаціями) із n елементів по k називають сполуки, що містять k елементів, взятих із даних n елементів, і які відрізняються хоча б одним елементом.

Сполучення із n елементів по k позначають через C_n^k і обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Зауваження 1. Із означення сполучень випливає, що сполучення отримують із розміщень, вилучивши сполуки, що відрізняються лише порядком елементів, тобто перестановки.

Зауваження 2. Мають місце рівності:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$;

в) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

3.5. Сполуки з повтореннями

Означення 6. Розміщенням із повтореннями з n елементів по k називають будь-яку впорядковану сполуку, що містить k елементів, узятих із даних елементів, серед яких є однакові.

Число усіх розміщень з повтореннями з n елементів по k позначають через $\overline{A}_n^k$ і обчислюють за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Приклад 1. Старий автомобільний номер складався з трьох літер та чотирьох цифр. Знайти кількість усіх можливих номерів, якщо використовується 32 літери української абетки.

Розв'язання. Оскільки літери і цифри в номері можуть повторюватися, то за правилом добутку: $\overline{A}_{32}^3 \overline{A}_{10}^4 = 32^3 \times 10^4 =$ $= 327680000$.

Означення 7. Перестановкою з повтореннями із n елементів називають будь-яке впорядкування множини з n елементів, серед яких є однакові.

Якщо серед n елементів множини є n_1 елементів 1-го типу, n_2 елементів 2-го типу,…, n_k елементів k-го типу $(n_1 + n_2 + ... + n_k = n)$, то число всіх перестановок такої множини позначають через $P_n(n_1, n_2 ..., n_k)$ і обчислюють за формулою $P_n(n_1, n_2 ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$.

Приклад 2. Скільки різних «слів» (у т. ч. беззмістовних) можна утворити зі слова «математика».

Розв'язання. Очевидно, це число є $P_{10} = \dfrac{10!}{2!3!2!} = 151200$.

Означення 8. **Сполученням** з повтореннями із n елементів по k називається сполука, що містить k елементів, узятих із даних n елементів, серед яких є однакові.

Число всіх комбінацій із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклад 3. Скількома способами можна купити 6 тістечок у кондитерській, де є 5 їх різних видів?

Розв'язання. $\overline{C}_5^6 = C_{10}^6 = \dfrac{10!}{6!4!} = 210.$

Запитання і вправи

1. На вершину гори ведуть 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і спуститися з неї? Те саме питання, при умові, що підйом і спуск здійснюються різними шляхами.
2. Скількома способами можна вказати на шахівниці білий та чорний квадрати? Те саме питання, при умові, що ці квадрати не лежать на одній і тій же вертикалі і горизонталі?
3. Скільки існує матриць з n рядків та m стовпців, елементи яких належать множині $\{-1,\ 0,\ 1\}$? Те саме питання, при умові, що рядки матриці попарно різні?
4. Три дзиги з 6, 8 та 10 гранями відповідно. Грані дзиг занумеровані. Скількома різними способами вони можуть впасти, якщо принаймні дві дзиги впали на грань з номером 1?
5. Скількома способами можна написати чотири з п'яти різних слів по одному в чотирьох різних зошитах?
6. Кидають три гральні кістки. Скількома способами вони можуть впасти так, що або усі верхні грані однакові або усі попарно різні?
7. Скількома способами n осіб можуть розміститися у чергу до каси? Скількома способами можна розмістити n осіб за круглим столом (два способи розміщення співпадають, якщо кожна людина має одних і тих же сусідів у обох випадках)?
8. Скількома способами можна розмістити за круглим столом n чоловіків і n жінок так, щоб дві особи однієї статі не сиділи поряд?
9. На залізничній станції розміщені 9 світлофорів. Скільки може бути подано різних сигналів, якщо кожний світлофор має три стани: червоний, жовтий і зелений?
10. Скільки існує тризначних чисел, що записуються за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і діляться на 3?
11. Скільки існує n-значних чисел $(n \geq 2)$, що однаково читаються зліва направо і справа наліво?
12. Визначити кількість функцій $y = f(x_1, ..., x_n)$ n змінних, якщо $E(y) = \{0;\ 1\}$ і кожна змінна дорівнює або 0 або 1 ?
13. Скільки різних чотиризначних чисел, що діляться на 4, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?
14. Поясніть, чому у коді Морзе для позначення букв мови використовується не більше, ніж п'ять знаків (точок та тире)?
15. Скільки чисел від 1 до 1000 не діляться ні на 5, ні на 13, ні на 31?
16. Скількома способами можна розмістити 4 учнів на 25 місцях?
17. Студенту необхідно скласти 4 екзамени протягом 6 днів. Скількома способами можна це зробити?

4. БІНОМ НЬЮТОНА

4.1. Біном Ньютона

Відомі формули скороченого множення:
$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ і $\left(a+b\right)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ці формули можна записати і так:
$\left(a+b\right)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2$,
$\left(a+b\right)^3 = C_3^0 a^3 b^0 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 a^0 b^3$.

Виявляється, що існує і загальна закономірність. Розглянемо так звану *біноміальну теорему.*

Теорема 4.1. Має місце рівність

$$\left(a+b\right)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n \tag{4.1}$$

Для доведення теореми зручно використати допоміжне твердження.

Лема 4.1. (формула додавання).

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \tag{4.2}$$

Доведення.

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)}{k!(n-k-1)} + \frac{(n-1)}{(k-1)!(n-k)} =$$

$$= (n-1)!\left(\frac{n-k}{k!(n-k)} + \frac{k}{k!(n-k)!}\right) = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)} = C_n^k.$$

Лему доведено.

Доведення теореми 4.1.

Проведемо доведення теореми індукцією за числом *n*.

При $n=1$ маємо $\left(a+b\right)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a+b$.

Припустимо, що теорема справедлива для *n*. Покажемо, що вона справедлива і для $n+1$. За припущенням індукції маємо:

$$\left(a+b\right)^{n+1} = \left(a+b\right)^n \left(a+b\right) = \left(C_n^0 a^n b^0 + C_n^0 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n a^0 b^n\right) \cdot \left(a+b\right) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} b^0 + \left(C_n^1 a^n b + C_n^0 a^n b\right) + \left(C_n^2 a^{n-1} b^2 + C_n^1 a^{n-1} b^2\right) + \ldots + C_n^n a^0 b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} b^0 + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} a^0 b^{n+1}$$

згідно з лемою 4.1 і тим, що $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$.

Теорему доведено.

Означення. Рівність (4.1) називають *біномом Ньютона.*

З рівності (4.2), встановленої у лемі 4.1 випливає, що біноміальні коефіцієнти (тепер ясно чому їх так назвали раніше) можна виписати у вигляді трикутної таблиці, яка носить назву *трикутника Паскаля:*

$$
\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n=5
\end{array}
$$

У n-му рядку трикутника Паскаля стоять коефіцієнти розкладу (1), причому кожний коефіцієнт, крім двох крайніх, що дорівнюють 1, це є сума відповідних коефіцієнтів із попереднього рядка.

4.2. Поліноміальна теорема

Як розкривати дужки під час обчислення виразів вигляду $\left(a_1+a_2+\ldots+a_m\right)^n$? Наступна теорема є узагальненням бінома Ньютона і дає відповідь на це питання.

Теорема 4.2. (Поліноміальна теорема). Має місце рівність

$$\left(a_1+a_2+\ldots+a_m\right)^n=\sum_{r_1+\ldots+r_m=n} P_n\left(r_1,r_2,\ldots,r_m\right)\cdot a_1^{r_1}a_2^{r_2}\ldots a_m^{r_m},$$

де $P_n\left(r_1,r_2,\ldots,r_m\right)=\dfrac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_m!}$ – поліноміальний коефіцієнт.

Доведення. Помножимо послідовно суму $a_1+a_2+\ldots+a_m$ саму на себе n разів. У результаті одержимо m^n доданків виду $d_1d_2\ldots d_n$, де кожний множник d_i дорівнює одному з чисел $a_1,a_2,\ldots,a_m$. Нехай $B(r_1,r_2,\ldots,r_m)$ означає множину всіх таких доданків, у яких a_1 зустрічається r_1 разів, a_2 – r_2 разів, ..., a_m – r_m разів. Відомо, що число таких доданків дорівнює числу способів розбиття множини $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ на m підмножин

$B_1, B_2, ..., B_m$ так, щоб в множині B_s, було r_s елементів $(r_s \geq 0)$, тобто дорівнює $P_n(r_1, r_2, \ldots, r_m)$, де $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, а B_s – множина тих значень i, для яких $d_1 = a_s$. Отже,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = \sum_{r_1 + \ldots + r_k = n} P_n(r_1, r_2, \ldots, r_m) \cdot a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}$$

Теорема доведена.

Наслідок 4.1. $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

Дійсно, якщо покласти $r_1 = k$, то $r_2 = n - k$ і з поліноміальної теореми випливає цей наслідок.

4.3. Біноміальні тотожності

Раніше ми вже встановили деякі властивості біноміальних коефіцієнтів. Нагадаємо їх:

а) формула симетрії: $C_{n+m}^n = C_{n+m}^m$;

б) формула додавання: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Користуючись цими властивостями, неважко одержати цілу низку формул. Наприклад, якщо покласти в біномі Ньютона $a = 1$, $b = 1$, то отримаємо суму всіх біноміальних коефіцієнтів:

в) формула суми всіх біноміальних коефіцієнтів:
$C_0^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

У випадку, якщо $a = 1$, $b = -1$ одержимо таку властивість:

г) $C_0^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Наведемо ще деякі корисні властивості біноміальних коефіцієнтів:

д) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^n$;

є) $C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \ldots + C_{r-1}^{r-1} = C_n^r$;

ж) $C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

з) $C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{n+m}^k$;

і) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Зазначимо, що перелічені вище далеко не всі властивості біноміальних коефіцієнтів.

Запитання і вправи

1. Доведіть формулу бінома Ньютона, не використовуючи метод математичної індукції.
2. Доведіть, що:

1) $C_n^{m+1} > C_n^m$, якщо $m < \frac{1}{2}(n-1)$ і $C_n^{m+1} < C_n^m$, якщо $m > \frac{1}{2}(n-1)$;

2) Найбільше з чисел C_n^m дорівнює C_{2k+1}^k, якщо $n = 2k+1$ і C_{2k}^k, якщо $n = 2k$.

3. Знайдіть *n*, якщо відомо, що у розкладі $(1+x)^n$ коефіцієнти при x^5 і x^{12} рівні.
4. Скільки раціональних членів містить розклад $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$?
5. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу $(2nx + \frac{1}{2nx^2})^{3n}$ дорівнює 64. Визначіть доданок, що не містить *x*.
6. Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних коефіцієнтів розкладу $(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4})^n$ дорівнює 9900. Скільки раціональних членів містить цей розклад?
7. Користуючись поліноміальною теоремою, розкладіть на суму доданків $\left(1-y+y^2\right)^3$.
8. Чому дорівнює коефіцієнт при $x^2y^3z^2$ у розкладі $(x+y+z)^7$?
9. Знайдіть коефіцієнти при x^{13} та x^{18} у розкладі $(x+x^5+x^7)^4$.
10. Знайдіть коефіцієнт при x^8 у розкладі $(1+x^2-x^3)^9$.
11. Знайдіть коефіцієнт при x^3 у розкладі $(1+x)^4+(1+x)^5+\ldots+(1+x)^6$.
12. Знайдіть число різних (не подібних) членів розкладу $(x_1+x_2+\ldots+x_n)^3$.
13. Знайдіть коефіцієнт при x^4 у розкладі $(1+x+\ldots+x^5)^2$.
14. Доведіть, що сума всіх коефіцієнтів поліноміального розкладу $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^m$ дорівнює n^m.
15. Доведіть, що числа C_p^m діляться на *p*, якщо *p* – просте число.

16. Доведіть, що число $a^p - a$ ділиться на p при будь-якому цілому a та простому p (мала теорема Ферма).

17. Доведіть тотожності:

1) $C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

2) $C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}$;

3) $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + ... = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3})$;

4) $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + ... = \frac{1}{2}(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4})$;

5) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + ... = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3})$;

6) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + ... = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos\frac{(n+2)\pi}{3})$;

7) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + ... = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$;

8) $C_n^0 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = (n+1)2^{n-1}$;

9) $C_n^2 + 2C_n^3 + 3C_n^4 + ... + (n-1)C_n^n = (n-2)2^{n-1} + 1$;

10) $C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - ... + (-1)^n (n+1)C_n^n = 0$;

11). $\frac{C_n^0}{2} + \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{4} + ... + \frac{C_n^n}{n+2} = \frac{n2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)}$;

12) $\frac{C_n^0}{1} - \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} - ... + (-1)^n \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

5. ПОСЛІДОВНОСТІ

5.1. Означення послідовності

Розглянемо 1, 2, 3, 4, …, n, … – натуральний ряд чисел. Якщо кожному числу цього ряду поставити у відповідність його куб, то отримаємо новий ряд чисел 1, 8, 27, …, n^3, … – ця відповідність є функцією натурального аргументу, область визначення якої є множина всіх натуральних чисел. Таку функцію називають числовою послідовністю.

Числова функція, задана на безлічі натуральних чисел, називається нескінченною числовою послідовністю.

Функція, задана на множині перших натуральних чисел, називається скінченною числовою послідовністю.

Числову послідовність або функцію натурального аргументу позначають: x_n або $f(n)$.

$f(1)$ – перший член послідовності,

$f(2)$ – другий член послідовності,

……………………………………….

$f(n)$ – n-й член послідовності.

Приклад 1. Послідовність однозначних непарних чисел 1; 3; 5; 7; 9 скінченна. Число її членів дорівнює п'яти.

Приклад 2. *Послідовність дробів з чисельником «1»:*

$$\frac{1}{1}=1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ ...;\ \frac{1}{n}\ ...\ \text{нескінченна.}$$

Послідовність може бути задана аналітично за допомогою формули, за якою можна знайти будь-який член послідовності як функцію його номера. Цю формулу називають формулою загального члена і записують так: $x_n = f(n)$ або $a_n = \varphi(n)$, $y_n = f(n)$ і т. д.

Приклад 3. 1) Написати кілька перших членів послідовності $x_n = \frac{n+2}{n^2}$.

Розв'язання. $\frac{3}{1}, \frac{4}{4}, \frac{5}{9}, \frac{6}{16}, ...$.

2) Написати загальний член послідовності*:* $\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{9}{8}, \frac{11}{16}, \frac{13}{32}, ...$.

Розв'язання. У чисельнику записані непарні числа, починаючи з 5; в знаменнику степені числа 2. Отже, $x_n = \frac{2n+3}{2^n}$.

Приклад 4. $y_n = f(n) = 2^{n-1}$.

Розв'язання. Знайдемо кілька перших членів цієї послідовності: $y_1 = 2^{1+1} = 2^6 = 1;\ y_2 = 2^{2+1} = 4 = 2;\ \ y_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 8.$

Послідовність (y_n) або 2; 4; 8; …; 2^n … є послідовністю натуральних степенів числа 2.

Формула, що виражає будь-який член послідовності, починаючи з деякого через попередні, називається рекурентною. При рекурентному способі задання послідовності зазвичай вказують: а) перший член послідовності (або кілька перших членів); б) формулу, що дозволяє визначити будь-який член послідовності за відомими попередніми членами.

Приклад 5. $x_1 = 3,\ x_{n+1} = nx_n$. Знайдемо кілька перших членів: $x_1 = 3;\ x_2 = 1x_1 = 3;\ x_3 = 2x_2 = 2 \cdot 3 = 6, \ldots$

Приклад 6. $x_1 = 2,\ x_2 = 3;\ x_{n+2} = x_n + x_{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$.

Знайдемо кілька перших членів*:* $x_1 = 2,\ x_2 = 3;\ x_3 = 2 + 3 = 5;$ $x_4 = 3 + 5 = 8;\ x_5 = 5 + 8 = 13, \ldots$. Це приклад послідовності Фібоначчі.

5.2. Монотонні послідовності

Якщо в послідовності для будь-якого n виконується умова $a_{n+1} > a_n$, то послідовність називається зростаючою.

Наприклад: 2; 3; 4; 5; … ; $n+1$, … – зростаюча послідовність.

Якщо в послідовності для будь-якого n виконується умова $a_{n+1} < a_n$, то кажуть, що послідовність називається спадною.

Приклад 1. Довести, що послідовність із загальним членом $y_n = \dfrac{5}{3n}$ є спадною.

Доведення. Визначимо знак різниці.

$$y_{n+1} - y_n = \frac{5}{3(n+1)} - \frac{5}{3n} = \frac{5 \cdot 3n - 5 \cdot 3(n+1)}{3(n+1) \cdot 3n} =$$

$$= \frac{15n - 15n - 15}{3(n+1) \cdot 3n} = \frac{-15}{9n(n+1)} = -\frac{5}{3n(n+1)} < 0.$$

Отримали $y_{n+1} - y_n < 0$ або $y_{n+1} < y_n$. За означенням послідовність y_n спадна.

Послідовність (a_n) називається незростаючою, якщо для будь-якого її члена виконується нерівність $a_{n+1} \le a_n$. Наприклад, послідовність 1; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{7}$ – незростаюча.

Послідовність (a_n) називається неспадною, якщо для будь-якого її члена виконується нерівність $a_{n+1} \ge a_n$. Наприклад, послідовність 1; 1; 2; 2; 5; 5; 8; 8; 9; 9 – неспадна.

Неспадні і незростаючі послідовності називаються монотонними послідовностями (зокрема, зростаючі і спадні послідовності теж монотонні).

5.3. Обмежені послідовності

Послідовність (x_n) називається обмеженою знизу (зверху), якщо існує таке число m (число M), що $m \le x_n$ $(x_n \le M)$ для всіх $n = 1, 2, 3, ...$.

Приклад 1. 1) Послідовність $x_n = 5n + 2$ обмежена знизу числом 7.

2) Послідовність $y_n = \frac{9}{2n+1}$ обмежена зверху числом 3.

Послідовність x_n називається обмеженою, якщо вона обмежена знизу і зверху (тобто існують такі числа m та $M, m \le M$, що $m \le x_n \le M$ для всіх $n \in N$.

Приклад 2. Послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ обмежена, оскільки. $0 < \frac{1}{n} \le 1$.

Можна дати інше означення обмеженої послідовності.

Послідовність (x_n) *називається обмеженою*, якщо $|x_n| \le M$, де $n = 1, 2, ...,$ M *– додатне дійсне число.*

Приклад 3. Послідовність $x_n = \frac{1}{n}$ обмежена, оскільки $\left|\frac{1}{n}\right| \le 1$.

Неважко переконатися, що обидва означення обмеженої послідовності еквівалентні.

5.4. Означення границі послідовності

Розглянемо нескінченну числову послідовність (x_n).

Означення 1. Число A називається границею послідовності (x_n), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ при всіх досить великих номерах n виконується нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

Якщо число A є границею послідовності (x_n), то пишуть: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Означення 2. Якщо послідовність має границю, то вона називається збіжною.

Означення 3. Якщо послідовність не має границі, то вона називається розбіжною.

Приклад 1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3n} = 0$.

Розв'язання. Для довільного $\varepsilon > 0$ запишемо нерівність з означення границі послідовності $\left|\frac{2}{3n} - 0\right| = \frac{2}{3n} < \varepsilon$; $3n > \frac{2}{\varepsilon}$; $n > \frac{2}{3\varepsilon}$.

Ця нерівність виконується при $n > \frac{2}{3\varepsilon}$. Наприклад, для $\varepsilon = 0{,}001$ нерівність $\frac{2}{3n} < 0{,}001$ виконується при $n > \frac{3}{2\cdot 0{,}001}$, тобто для всіх номерів, починаючи з $n = 667$.

Для $\varepsilon = 0{,}0001$ нерівність $\frac{2}{3n} < 0{,}0001$ виконується при $n > \frac{2}{3\cdot 0{,}0001}$, тобто для всіх номерів, починаючи з $n = 6667$.

Отже, за означенням границі маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{3n} = 0$, тобто послідовність $x_n = \frac{2}{3n}$ збігається до 0.

Приклад 2. Довести, що $a_n = (-1)^n$ не має границі.

Розв'язання. Припустимо протилежне, нехай число A – границя послідовності (a_n), тобто

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n = A.$$

Нехай $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Якщо номери n і m достатньо великі, то за означенням границі $|a_n - A| < \frac{1}{2}$, $|a_m - A| < \frac{1}{2}$.

Використовуємо властивості модуля $|x+y| \le |x| + |y|$. Тоді $|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \le |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Але це невірно: якщо n – парне число, а m – непарне, то $(-1)^n = 1, (-1)^m = -1$ і $|a_n - a_m| = |1 - (-1)| = 2 > 1$. Отже, наше припущення невірне, тобто послідовність $a_n = (-1)^n$ не має границі.

5.5. Теореми про границі

Теорема 5.1. (Необхідна умова існування границі). Якщо послідовність збігається, то вона є обмеженою.

Отже, якщо послідовність не є обмеженою, то вона не має границі.

Наприклад, послідовність $y_n = \frac{n+3}{4}$ необмежена, оскільки завжди є такий номер n, що $y_n > M$, де M – будь-яке число.

Отже, ця послідовність границі не має.

Теорема 5.2. (Вейерштрас). (Достатня умова існування границі). Якщо послідовність монотонна і обмежена, то вона має границю.

Приклад 1. Послідовність $x_n = 2, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{2}{n}, ...$ монотонно спадна і обмежена. За теоремою Вейерштраса вона має границю.

Теорема 5.3. (Єдиність границі). Якщо послідовність x_n має границю (тобто збігається), то ця границя єдина.

Доведення. Припустимо, що A та B границі послідовності x_n і $A < B$.

За означенням границі послідовності для числа $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$.

Існують такі числа N_1 і N_2, що для $n > N_1$ $|x_n - A| < \varepsilon$, а для $n > N_2$ $|x_n - B| < \varepsilon$. Тоді для $n > N = \max\{N_1, N_2\}$

$$B - A = |B - A| = |B - x_n + x_n - A| \le |B - x_n| + |x_n - A| < \varepsilon + \varepsilon = B - A.$$

З отриманої суперечності випливає, що $A = B$. Теорему доведено.

Означення 4. Послідовність x_n будемо називати нескінченно малою, якщо $x_n \to 0 (n \to \infty)$ і нескінченно великою, якщо $x_n \to \infty (n \to \infty)$.

Приклад 2. $\frac{1}{n}, \frac{2}{n^2}, \frac{3}{2^n}$ – нескінченно малі послідовності; $n, 3n, n^2, 2^n$ – нескінченно великі послідовності.

Теорема 5.4. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності мають такі властивості:

1) сума і добуток скінченної кількості нескінченно малих, а також добуток нескінченно малої на обмежену величину є нескінченно малими величинами;

2) сума і добуток нескінченно великих величин, а також добуток нескінченно великої на ненульову сталу є нескінченно великими величинами;

3) частка від ділення сталої на нескінченно велику величину є величина нескінченно мала, частка від ділення ненульової сталої на нескінченно малу – нескінченно велика величина.

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin n$.

Розв'язання. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0, \left|\sin n\right| \le 1$ при всіх $n \in N$, отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n} = 0$.

Теорема 5.5. (Арифметичні властивості границь збіжних послідовностей). Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збігаються, то

1) сталу можна виносити за знак границі:
$\lim\limits_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, де c – стала;

2) границя суми дорівнює сумі границь:
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}x_n + \lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

3) границя різниці дорівнює різниці границь:
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}x_n - \lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

4) границя добутку дорівнює добутку границь:

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

5) границя частки дорівнює частці границь (за умови, що знаменники дробів відмінні від нуля):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}\ \left(y_n\neq 0 \text{ і } \lim_{n\to\infty}y_n\neq 0\right).$$

Доведемо 2). Нехай $x_n\to A$, $y_n\to B$. Тоді $x_n=A+\alpha$, $y_n=B+\beta$, де α і $\beta\to 0(n\to\infty)$. Маємо:

$$(x_n+y_n)-(A+B)=(x_n-A)+(y_n-B)=\alpha+\beta\to 0(n\to\infty).$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=A+B$.

Приклад 4. Знайти границі, використовуючи властивості нескінченно малих і теореми про границі:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-6}{7n-4n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^2}}{\frac{7}{n}-4+\frac{4}{n^2}}=-\frac{3}{4}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n^2+n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{7}{n^2}}=\frac{0}{3}=0.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-3n+13}{n-n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n^2}+\frac{13}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^3}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}+2n^{\frac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}-1}{1+\frac{2}{n^{\frac{1}{6}}}}=-1.$$

Зауваження. У всіх прикладах чисельник і знаменник дробу ділили на максимальний степінь n.

Теорема 5.6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e.$

(Тут і далі $e = 2{,}7182818...$ – ірраціональне число).

Приклад 5.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}\cdot n\cdot\frac{3}{n}} = e^3.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+2n+3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+2n+3}\right)^{\frac{n^2+2n+3}{n}\cdot\frac{n}{n^2+2n+3}\cdot n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n}{n^2+2n+3}\right)^{\frac{n^2+2n+3}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}} = e.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n+4}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-1+\dfrac{n-3}{n+4}\right)^{3n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-n-4+n-3}{n+4}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-7}{n+4}\right)^{3n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-7}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-7}\cdot\frac{-7}{n+4}\cdot 3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-7}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{-7}\cdot\frac{-21}{1+\frac{4}{n}}} = e^{-21}.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n-3}{n^2-3n+7}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\left(n^2-3n+7\right)+\left(4n-10\right)}{n^2-3n+7}\right)^{3n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4n-10}{n^2-3n+7}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4n-10}{n^2-3n+7}\right)^{\frac{n^2-3n+7}{4n-10}\cdot\frac{4n-10}{n^2-3n+7}\cdot 3n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4n-10}{n^2-3n+7}\right)^{\frac{n^2-3n+7}{4n-10}\cdot\frac{12-\frac{30}{n}}{1-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}\cdot 3n} = e^{12}.$

Запитання і вправи

1. Що називається нескінченною числовою послідовністю?
2. Яка послідовність називається скінченною?
3. Які способи задання числової послідовності Ви знаєте?
4. Яка послідовність називається обмеженою? Обмеженою зверху (знизу)?

5. Яка послідовність називається зростаючою (спадною), монотонною?
6. Що називається границею послідовності?
7. Яка послідовність називається збіжною? Розбіжною?
8. Назвіть достатню умову збіжності послідовності.
9. Назвіть необхідну умову збіжності послідовності.
10. Яка послідовність називається нескінченно малою? Нескінченно великою?
11. Назвіть властивості нескінченно малих і нескінченно великих послідовностей.
12. Назвіть арифметичні властивості границь збіжних послідовностей.
13. Знайдіть границі послідовностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{5-n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8n-5n^2+3}{n^2-4n+4}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3-n+n^2}{7n-4n^3+3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^3+5}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15+n^3}{n^2}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\cos n}{n^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n^2-n}{n^2+15}\right)$; 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{13}{n+1}\right)^n$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{7}{n}\right)^n$; 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+8}\right)^{4n}$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+n+3}{n^2-n+1}\right)^{5n}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-8}{n-5}\right)^{-2n}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$; 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$.

6. ПРОГРЕСІЇ

6.1. Арифметична прогресія

Означення 1. Числова послідовність, у якій кожен член $a_n = a_{n-1} + d$, де $n = 2, 3, 4, ...$, називається арифметичною прогресією. Позначення: $\div\, a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

Наприклад, послідовність $\div 3, 5, 7, 9, ...$ – арифметична прогресія. a_1 – перший член, a_n – n-ий член арифметичної прогресії. Число d – різниця прогресії. За означенням прогресії $a_{n+1} = a_n + d$ або $d = a_{n+1} - a_n$ для будь-якого $n = 1, 2, 3, ...$

Отже, $d = a_2 - a_1 = a_5 - a_4 = ... = a_k - a_{k-1}$.

Якщо $d > 0$, то прогресія є зростаючою, якщо, $d < 0$ – спадною. Якщо $d = 0$, то всі члени прогресії рівні між собою. Така прогресія зазвичай не розглядається.

Наприклад, в прогресії $\div 1, 6, 11, 16, 21, ...$, $a_1 = 1$, $d = 5$, отже, прогресія зростаюча.

У прогресії $\div 7, 5, 3, 1, ...$, $a_1 = 7$, $d = -2$, отже, прогресія – спадна.

Усі члени арифметичної прогресії, починаючи з другого, мають характеристичну властивість.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \text{ де } n = 1, 2, 3, ...$$

Формула загального члена арифметичної прогресії має вигляд

$$a_n = a_1 + d(n-1), \; n = 1, 2, 3, ...$$

За допомогою формули загального члена можна знайти будь-який член прогресії, якщо відомі її перший член і різниця.

Для доведення за означенням арифметичної прогресії запишемо рівності:

$$\begin{aligned} &a_2 = a_1 + d; \\ &a_3 = a_2 + d; \\ &a_4 = a_3 + d; \\ &\dots\dots\dots \\ &a_{n-1} = a_{n-2} + d; \\ &a_n = a_{n-1} + d. \end{aligned}$$

Додавши їх почленно, отримаємо:

$$(a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1}) + a_n = a_1 + (a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}) + (n-1)d.$$

Отже, $a_n = a_1 + (n-1)d$.

Позначимо суму перших n членів символом S_n

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Формула суми перших n членів арифметичної прогресії має вигляд

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для доведення запишемо цю суму двічі, змінивши у другому випадку порядок доданків на зворотний:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1.$$

Додамо почленно ці рівності:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

У правій частині число доданків у дужках дорівнює n, сума двох чисел в кожній дужці дорівнює $a_1 + a_n$.

Дійсно,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n;$$
$$a_3 + a_{n-2} = (a_2 + d) + (a_{n-1} - d) = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n.$$

Тому $2S_n = (a_1 + a_n)n$;

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Якщо замінимо a_n його виразом $a_1 + d(n-1)$, то отримаємо інший вигляд формули суми перших n членів

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n.$$

Приклад 1. Визначити 7-й член арифметичної прогресії a_{11}, якщо $a_1 = 4,\ d = 2.$

Розв'язання. Запишемо формулу члена арифметичної прогресії для $n = 7.$

$a_7 = a_1 + d(7-1);\ a_1 = 4;\ d = 2.$ Отже, $a_7 = 4 + 2 \cdot 6 = 16.$

Відповідь: $a_{11} = 38.$

Приклад 2. Знайти число членів і суму членів арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 8;\ d = 3;\ a_n = 20.$

Розв'язання. Загальний член арифметичної прогресії можна обчислити за формулою

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

За умовою $a_n = 20;\ a_1 = 8;\ d = 3.$ Отже, для обчислення отримаємо рівняння $20 = 8 + (n-1)3;$ звідки $3n = 20 - 8 + 3;$ $3n = 15;\ n = 5.$

Знайдемо суму перших 5 членів арифметичної прогресії

$$S_5 = \frac{2a_1 + d(5-1)}{2}5;$$
$$a_1 = 8;\ d = 2.$$

Отже, $S_5 = \dfrac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 4}{2}5 = 70.$

Відповідь: $n = 5;\ S_5 = 70.$

Запитання і вправи

1. Яка числова послідовність називається арифметичною прогресією?
2. Як визначається різниця арифметичної прогресії?
3. Якою властивістю володіють члени арифметичної прогресії?
4. Напишіть формули *n*-го члена арифметичної прогресії і суми перших *n* членів.
5. В арифметичній прогресії:

1) $a_n = 72,\ n = 11,\ S_n = 407$ Знайдіть a_1 і *d*.

2) $n = 12,\ d = 5,\ S_n = 366.$ Знайдіть a_1 і a_{2n} .

3) $a_1 = 4,\ a_n = 40,\ n = 10.$ Знайдіть *d* і S_{2n}.

4) $a_n = 47,\ a_1 = 5,\ d = 6.$ Знайдіть *n* і S_{2n}.

5) $a_1 = 6,\ d = 5,\ n = 10.$ Знайдіть S_{2n}. і a_n .

6) $a_n = 47,\ n = 11,\ d = 4.$ Знайдіть a_1 і S_{2n}.

7) $a_1 = 8,\ a_n = 71,\ S_n = 316.$ Знайдіть *n* і *d.*

8) $a_1 = 9,\ n = 7,\ S_n = 231.$ Знайдіть a_{2n} і *d.*

9) Знайдіть суму: а) 1– 2+3–4+…+$1-2+3-4+...+(-1)^{n-1}$ *n.*

б) 1+11+111+…+11...1 (*n* доданків).

6.2. Геометрична прогресія

Означення 2. Числова послідовність, у якій кожен член $b_n = b_{n-1}q$, де $n = 2, 3, 4, ...,$ називається геометричною прогресією $(b_1 \neq 0,\ q \neq 0)$. Позначення: $\div\div b_1, b_2, ..., b_n, ...$

Наприклад, послідовність $\div\div 1, 3, 9, ...$ – геометрична прогресія.

Число q – знаменник прогресії $(q \neq 0)$.

$b_{n+1} = b_n q$ для будь-якого $n = 1.\ 2, 3, ...$ або $q = b_{n+1} : b_n$.

Отже, $q = b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = ... = b_k : b_{k-1} = ...$.

Якщо $q > 0 (q \neq 1)$, то прогресія є монотонною послідовністю. Якщо $q < 0$, то прогресія не є ні зростаючою, ні спадною послідовністю. Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії рівні між собою. Така прогресія зазвичай не розглядається.

Наприклад, у прогресії $\div\div 2, 6, 18, ..., b_1 = 2, q = 3,$ отже, прогресія – монотонно зростаюча. У прогресії $4, -12, 36, -108, ...$ ... $b_1 = 4,\ q = -3$, отже, прогресія – ні зростаюча, ні спадна.

Характеристична властивість геометричної прогресії має вигляд:

$$b_{n+1}^2 = b_n b_{n+2},\quad n = 1, 2, 3, ...$$

Формула загального члена геометричної прогресії

$$b_n = b_1 q^{n-1},\quad n = 1, 2, 3, ...$$

Формула *n*-го члена дозволяє знайти будь-який член прогресії, якщо відомі її перший член і знаменник.

Для доведення за означенням геометричної прогресії запишемо рівності:

$$b_2 = b_1 q;$$
$$b_3 = b_2 q;$$
$$b_4 = b_3 q;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_{n-1} = b_{n-2} q;$$
$$b_n = b_{n-1} q.$$

Помножимо ці рівності почленно
$\left(b_2 b_3 b_4 \dots b_{n-1}\right) b_n = \left(b_2 b_3 b_4 \dots b_{n-2} b_{n-1}\right) b_1 q^{n-1}.$

Оскільки $b_2 b_3 b_4 \dots b_{n-1} \neq 0,$ то після скорочення одержимо $b_n = b_1 q^{n-1}$. Позначимо суму n перших членів геометричної прогресії символом S_n: $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.

Тоді формула суми перших n членів геометричної прогресії має вигляд

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1}, \ \left(q \neq 1\right).$$

Для доведення помножимо обидві частини рівності

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n,$$

на q, отримаємо $q \cdot S_n = b_1 q + b_2 q + \dots + b_{n-1} q + b_n q.$

Оскільки $b_1 q = b_2;\ b_2 q = b_3;\ \dots;\ b_{n-1} q = b_n$, то

$$qS_n = b_2 + b_3 + \dots + b_n + b_n q$$

і

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n.$$

Віднімемо почленно ці рівності

$$qS_n - S_n = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_n - b_{n-1} + b_n q - b_n.$$

У правій частині рівності зводимо подібні

$qS_n - S_n = -b_1 + b_n q$, оскільки $b_n = b_1 q^{n-1}$, то

$$S_n\left(q - 1\right) = -b_1 + b_1 q^{n-1} q = b_1 q^{n-1} - b_1.$$

Отже,

$$S_n = \frac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \left(q \neq 1\right).$$

Приклад 1. Обчислити шостий член $\left(b_6\right)$ геометричної прогресії $\div\div 2; 6; 18; ...$

Розв'язання. У цій прогресії $b_1 = 2; b_2 = 6.$ Отже, $q = b_2 : b_1 = = 6 : 2 = 3.$

Запишемо формулу загального члена геометричної прогресії для $n = 6 : b_6 = b_1 q^5$. Оскільки $b_1 = 2; q = 3,$ то $b_6 = 2 \cdot 3^5 = 486.$

Відповідь: $b_6 = 486.$

Приклад 2. Знайти знаменник і суму членів геометричної прогресії, у якій $b_1 = 3; n = 5; b_5 = 48.$

Розв'язання. 5-й член геометричної прогресії можна обчислити за формулою $b_5 = b_1 q^4$. За умовою задачі $b_5 = 48, b_1 = 3.$

Отже, для обчислення q отримаємо рівняння

$$96 = 1{,}5 \cdot q^3;$$

$$48 = 3 \cdot q^4;$$

$$q^4 = 16;$$

звідки $q = 2.$

Знайдемо суму перших 5 членів геометричної прогресії $S_5 = \dfrac{b_1\left(q^5 - 1\right)}{q - 1}, \ b_1 = 3; \ q = 2.$

Отже, $S_5 = \dfrac{3\left(2^5 - 1\right)}{2 - 1} = 93.$

Відповідь: $q = 2; S_5 = 93.$

Запитання і вправи

1. Сформулюйте означення геометричної прогресії.
2. Як визначається знаменник геометричної прогресії?
3. Якою послідовністю є геометрична прогресія, якщо:
   а) $q > 0;$ б) $q < 0;$ в) $0 < q < 1;$ г) $q > 1$?

4. Сформулюйте характеристичну властивість геометричної прогресії.
5. У геометричній прогресії:
1) $b_2 = 15,\ n = 4,\ q = 3.$ Знайдіть b_n і S_{2n}.
2) $b_n = 96,\ n = 6,\ q = 2.$ Знайдіть b_1 і S_{2n}.
3) $b_1 = 2,\ b_n = 162,\ q = 3.$ Знайдіть n і S_{2n}.
4) $b_1 = 6,\ b_n = 96,\ S_n = 186.$ Знайдіть n і q.
5) $n = 5,\ q = 3,\ S_n = 363.$ Знайдіть b_1 і b_n.
6) $b_1 = 4,\ q = 2,\ S_n = 252.$ Знайдіть b_n і n.
7) $b_1 = 6,\ b_n = 162,\ n = 4.$ Знайдіть q і S_{3n}.
8) $b_n = 96,\ q = 2,\ S_n = 186.$ Знайдіть b_1 і n.
6. Знайдіть суму: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$.

6.3 Нескінченно спадна геометрична прогресія

Означення 3. Нескінченна геометрична прогресія називається нескінченно спадною, якщо $|q|<1$.

Ця прогресія може бути і спадною і зростаючою, і навіть не монотонною.

Наприклад, нескінченно спадна геометрична прогресія $\div\div 5;\ -\frac{5}{2};\ \frac{5}{4};\ -\frac{5}{8};\ \frac{5}{16};\ \ldots \left(b_1 = 5;\ q = -\frac{1}{2}\right)$ не є монотонною.

Нескінченно спадна геометрична прогресія $\div\div -3;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{3}{8};\ \ldots \left(b_1 = -3;\ q = \frac{1}{2}\right)$ монотонно зростає. Нескінченно спадна геометрична прогресія $\div\div 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \ldots \left(b_1 = 4;\ q = \frac{1}{2}\right)$ монотонно спадає.

Означення 4. Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називають границю суми n перших її членів $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії має вигляд

$$S=\frac{b_1}{1-q};\ |q|<1.$$

Для доведення цієї формули використовуємо теореми про границі і таке твердження: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0\ \left(|q|<1\right)$.

Тоді $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{q-1}-\frac{b_1}{1-q}q^n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{q-1}-\frac{b_1}{q-1}\lim_{n\to\infty}q^n=\frac{b_1}{1-q}.$$

Приклад 1. Знайти суму геометричної прогресії: $\div\div 5;\ -\frac{5}{3};\ \frac{5}{9};$ $-\frac{5}{27};\ \ldots$.

Розв'язання. Для цієї прогресії $b_1=5,\ q=-\frac{1}{3}$. Тому її суму знаходимо так:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{15}{4}.$$

Відповідь: $S=\frac{15}{4}$.

Приклад 2. Знайти суму всіх двозначних додатних чисел.

Розв'язання. Очевидно, що ці числа утворюють арифметичну прогресію, у якої $a_1=10;\ d=1;\ a_n=99$.

Для обчислення суми прогресії необхідно знайти n:

$$a_n=a_1+d\left(n-1\right),\ 99=10+n-1,\ n=90.$$

Звідси, $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n,\ S_n=\frac{10+99}{2}\cdot 90=4905.$

Відповідь: 4905.

Приклад 3. Визначити, при яких x три числа a_1, a_2, a_3, узяті в зазначеній послідовності, утворюють арифметичну прогресію, якщо $a_1=\lg 2;\ a_2=\lg\left(3^x-3\right);\ \ a_3=\lg\left(3^x+9\right)$.

Розв'язання. Якщо числа a_1, a_2, a_3 утворюють арифметичну прогресію, то для них виконується ознака арифметичної прогресії:

$$\lg\left(3^x-3\right)=\frac{\lg 2+\lg\left(3^x+9\right)}{2},\ \lg\left(3^x-3\right)^2=\lg 2\left(3^x+9\right),$$

$$\left(3^x-3\right)^2=2\left(3^x+9\right).$$

Нехай $3^x=y$, тоді $(y-3)^2=2(y+9)$, або $y^2-8y-9=0$, звідки $y_1=9$; $y_2=-1$ (не підходить).

Відповідь: 2.

Приклад 4. Обчислити: $32-\frac{96}{5}+\frac{288}{25}-\frac{864}{125}+\ldots$.

Розв'язання. Так як для даної послідовності чисел виконується ознака геометричної прогресії:

$$\left(-\frac{96}{5}\right)^2=32\cdot\frac{288}{25},$$

то дана послідовність є геометричною прогресією, у якій $b_1=32$; $q=-\frac{3}{5}$. $S=b_1/(1-q)$. Звідси: S = 20.

Відповідь: 20.

Приклад 5. Знаменник геометричної прогресії дорівнює –2, сума її перших п'яти членів дорівнює 5,5. Знайти п'ятий член цієї прогресії.

Розв'язання. $S_5=5{,}5$; $q=-2$; $S_5=\frac{b_1\left(1-(-2)^5\right)}{1-(-2)}$, $5{,}5=\frac{b_1\cdot 33}{3}$, $b_1=0{,}5$;

$b_5=b_1\cdot q^4$, $b_5=0{,}5(-2)^4=8$.

Відповідь: 8.

Приклад 6. Знайти третій член нескінченно спадної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 1,6, а другий член дорівнює – 0,5.

Розв'язання. $S=1{,}6$; $b_2=-0{,}5$.

Перепишемо, використовуючи b_1 і q:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 1,6, \\ b_1 q = -0,5. \end{cases}$$

Розділимо друге рівняння на перше, отримаємо

$$\begin{cases} q(1-q) = -\dfrac{5}{16}, \\ b_1 q = -0,5. \end{cases}$$

З першого рівняння останньої системи $q^2 - q - \dfrac{5}{16} = 0,$ звідки $q_1 = \dfrac{5}{4}$ (не підходить); $q_2 = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow b_1 = 2;$

$b_3 = b_1 q^2,\ b_3 = 2(-0,25)^2 = 0,125.$

Відповідь: 0,125.

Запитання і вправи

1. Яка геометрична прогресія називається нескінченно спадною?
2. Що називається сумою нескінченно спадної геометричної прогресії?
3. Знайдіть суму нескінченно спадної геометричної прогресії $q = \dfrac{1}{2},\ b_1 = 3.$
4. Знайдіть суму нескінченно спадної геометричної прогресії $\div\div\ 1;\ \dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{9};\ \ldots$
5. Знайдіть суму нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо $b_2 = \dfrac{3}{4},\ q = \dfrac{1}{3}\left(b_2 = -2,\ q = -\dfrac{1}{4}\right).$
6. Знайдіть знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо $b_2 + b_3 = \dfrac{9}{4},\ S = 6.$
7. Сума S нескінченно спадної геометричної прогресії на два більше суми перших трьох членів цієї прогресії. Сума перших шести членів дорівнює трьом. Знайдіть S.

6.4. Перетворення періодичного дробу в звичайний

Метод перетворення десяткового періодичного дробу в звичайний розглянемо на прикладах.

Приклад 1. Перетворити дріб 0, (19) у звичайний.

Розв'язання. 0,(19) = 0,191919…

Запишемо десятковий дріб 0,191919… у вигляді суми:

$$0{,}191919...=\frac{19}{100}+\frac{19}{10\,000}+\frac{19}{1\,000\,000}+... \,.$$

У правій частині рівності – сума нескінченно спадної геометричної прогресії $\left(b_1=\frac{19}{100},\, q=\frac{1}{100}<1\right)$.

Цю суму можна обчислити за формулою

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{19}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{19}{99}.$$

Отже, $0{,}(19)=\frac{19}{99}$. Тобто дріб 0,(19) можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{19}{99}$.

Приклад 2. Перетворити дріб 0,3(45) у звичайний.

Розв'язання. Запишемо десятковий дріб 0,3(45) = 0,3454545 … у вигляді суми:

$$0{,}3454545...=\frac{3}{10}+\left(\frac{45}{10^3}+\frac{45}{10^5}+...\right).$$

У дужках маємо суму нескінченної геометричної прогресії

$$\left(b_1=\frac{45}{10^3}=0{,}045;\ q=\frac{1}{100}<1\right).$$

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{0{,}045}{1-0{,}01}=\frac{45}{990}.$$

Отже, $0{,}3(45)=\frac{3}{10}+\frac{45}{990}=\frac{342}{990}=\frac{171}{495}.$

Дріб 0,3(45) – десятковий запис раціонального числа $\frac{171}{495}$.

Аналогічно тому, як це зроблено в прикладах 1 і 2, будь-який періодичний десятковий дріб можна перетворити на звичайний.

Відповіді

3. 1) 49; 42. 5) 120. 7) $n!; (n-1)!$. 9) 3^9. 10) 60. 16) 303600. 17) $6!/2!$.

4. 3) 17. 5) 1890. 6) 9. 8) 210. 9) 12. 10) 252.

5. 13. 7) 2. 8) e^{13}. 9) e^{-7}. 10) e^{-20}. 11) e^{10}. 12) e^{6}. 13) ∞. 14) 0.

6.6.1. 5.1) $a_1 = 2,\ d = 7.$ 2) $a_1 = 3,\ a_{2n} = 118.$ 3) $d = 4,$ $S_{2n} = 840.$

9) а) $\frac{n+1}{2}$ при $n = 2k-1$, $-\frac{n}{2}$ при $n = 2k,\ k \in N.$

б) $\frac{1}{9}\left(\frac{10^{n+1}-10}{9} - n\right).$

6.2. 5. 1) $b_n = 135,\ S_{2n} = 16400.$ 4) $n = 5,\ q = 2.$

5) $b_1 = 3,\ b_n = 243.$ 7) $q = 3,\ S_{3n} = 1594320.$ 8) $b_1 = 6,\ n = 5.$

6) $\frac{x^{4n+2} - x^{2n+2} + x^{2n} - 1}{x^{2n}\left(x^2-1\right)} + 2.$

6.3. 3. 6. 4.1,5.6. Вказівка. В рівнянні $8q^3 - 8q + 3$ позначити $2q = x.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вишенський В. А.* Збірник задач з математики : навч. посібник / В. А. Вишенський, В. О. Перестук, А. М. Самійленко. – К. : Либідь, 1990. – 328 с.

2. *Математика* : посіб. для факульт. занять, 9 кл. / Вивальнюк Л. М. [та ін.]. – К. : Освіта, 1993. – 176 с.

3. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбінаторика / Н. Я. Виленкин. – М. : Наука, 1975. – 207 с.

4. *Ежов И. И.* Элементы комбинаторики / И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – М. : Наука, 1977. – 79 с.

5. *Кривий С. Л.* Курс дискретної математики : навч. посібник / С. Л. Кривий. – К : Наук. думка, 2007. – 432 с.

6. *Карупу О. В.* Основи дискретної математики. Елементи комбінаторики : навч.-метод. посібник / О. В. Карупу, С. О. Чечін. – К. : НАУ, 2004. – 60 с.

7. *Чечін С. О.* Дискретна математика. Множини. Відношення. Алгебри : навч.-метод. посібник / С. О. Чечін, О. В. Карупу. – К. : НАУ, 2005. – 64 с.

8. *Барышовец П. П.* Математика: Арифметика. Алгебра : учеб. пособие / П. П. Барышовец, В. М. Турчак. – К. : «НАУ-друк», 2009. – 140 с.

9. *Барышовец П. П.* Математика. Начала анализа : учеб. пособие / П. П. Барышовец, В. М. Турчак. – К. : НАУ, 2013. – 236 с.

Навчальне видання

МУРАНОВА Наталія Петрівна
БАРИШОВЕЦЬ Петро Павлович
ГОРЮНОВ Андрій Сергійович

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИКИ

Навчальний посібник
для слухачів підготовчих курсів

Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *Л. М. Романова*
Комп'ютерна верстка *Н. В. Чорної*

Підп. до друку 14.06.2016. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 4,25.
Тираж 100 прим. Замовлення № 81-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002