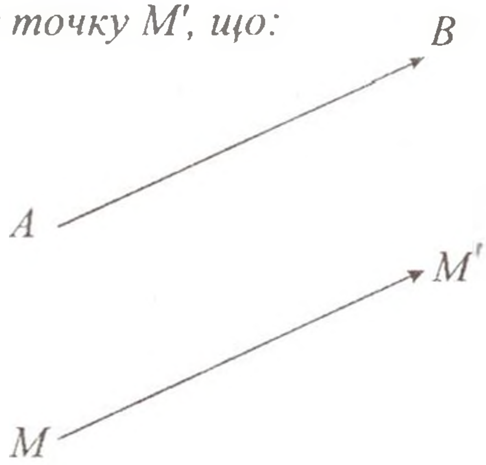
Л.З. Тарасова,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри базових і спеціальних дисциплін
Н.П. Муранова
кандидат педагогічних наук, доцент

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

***Означення**: Паралельним перенесенням площини, заданим впорядкованою парою (A,B) точок, називається перетворення площини, яке кожну точку M відображає на таку точку M', що:*



1) $[MM') \uparrow\uparrow [AB)$,

2) $|MM'| = |AB|$.

Рис. 1

Із означення випливає, що якщо паралельне перенесення задано впорядкованою парою *(A,B)* точок, то воно відображає *A* на В, тому що $[AB) \uparrow\uparrow [AB)$ і $|AB| = |AB|$.

Таке перетворення називають вектором і позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$.

Паралельне перенесення (вектор) повністю характеризується напрямом, заданим *[A,B)* і відстанню $|AB|$.

Цей напрям і відстань називають відповідно напрямом і довжиною (або модулем) вектора.

Очевидно, паралельне перенесення $\overrightarrow{AA}$ є тотожним перетворенням. Вектор $\overrightarrow{AA}$ називають також нуль-вектором і позначають: $\vec{0} = \overline{AA} = \overline{BB}$.

Якщо $[MM')\uparrow\uparrow[AB)$ і $|MM'|=|AB|$, то $[M'M)\uparrow\uparrow[BA)$ і $|M'M|=|BA|$. Тому, якщо $\vec{AB}(M)=M'$, то $\vec{BA}(M')=M$.

Перетворення, обернене до паралельного перенесення $\overrightarrow{AB}$, є паралельне перенесення $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Композицією двох перенесень (векторів) називається перенесення (вектор)

$$\vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}.$$

Ця композиція позначається знаком "+" і називається сумою векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

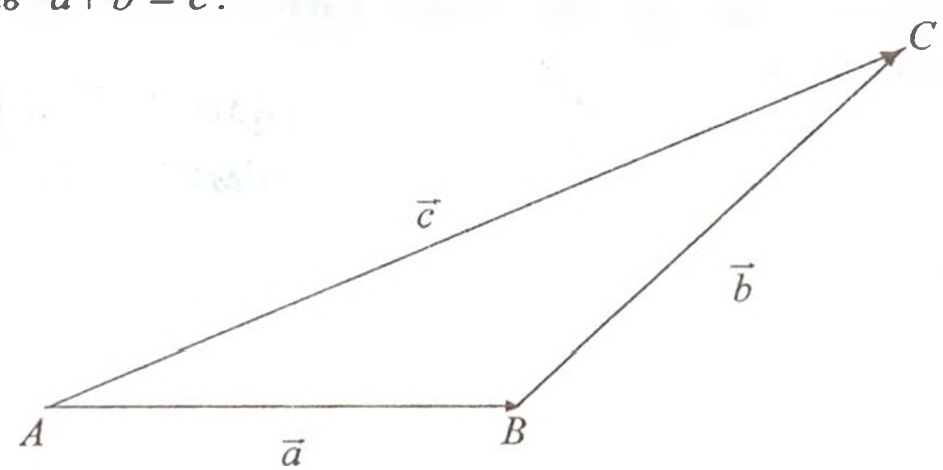


Рис. 2

Якщо $\vec{a}(A)=B, \vec{b}(B)=C$, то $\vec{c}(A)=C$, тому $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$ для будь-яких точок *A*, *B*, *C*.

Властивості суми векторів:

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*комутативність*).

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*асоціативність*).

3^0. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4^0. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Теорема. *Паралельне перенесення є рух.*

Доведення. Якщо $\vec{r}(M) = M'$, $\vec{r}(N) = N'$, то $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$.

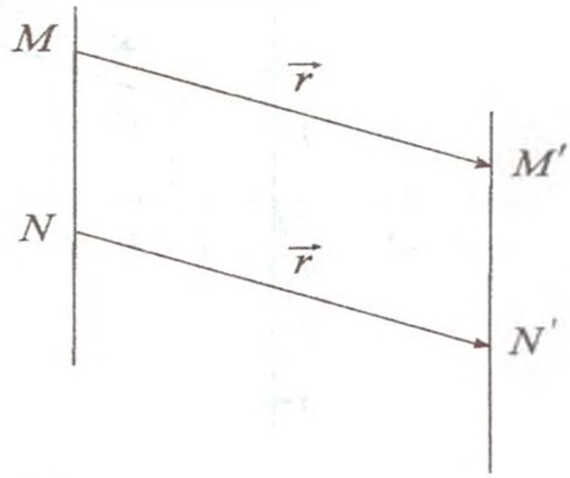


Рис. 3

Таким чином, $\overline{MN} = \overline{MM'} + \overline{M'N} = \overline{M'N} + \overline{NN'} = \overline{M'N'}$, або $\overline{MN} = \overline{M'N'} \Rightarrow |MN| = |M'N'|$.

Наслідок. *Паралельне перенесення відображає пряму на паралельну їй пряму.*

Доведення. Перенесення як і будь-який рух, відображає пряму на пряму. Якщо $M \in a$, $N \in a$, $M \neq N$ і $\vec{r}(M) = M'$, $\vec{r}(N) = N'$, то $\vec{r}(a) = (M'N')$ і $\overline{MN} = \overline{M'N'}$, тобто $\vec{r}(a) \parallel a$.

Теорема. *Паралельне перенесення відображає промінь на промінь, відрізок на відрізок, коло на коло, кут на рівний йому кут.*

Вправи

а) Дано дві паралельні прямі. Чи можливо за допомогою паралельного перенесення відобразити одну з них на другу?

б) Яким умовам повинні задовольняти два кути, щоб один з них можна було одержати з другого за допомогою паралельного перенесення?

с) Задайте паралельне перенесення парою точок. Намалюйте довільне коло і його образ при заданому паралельному перенесенні.

Координатні формули паралельного перенесення

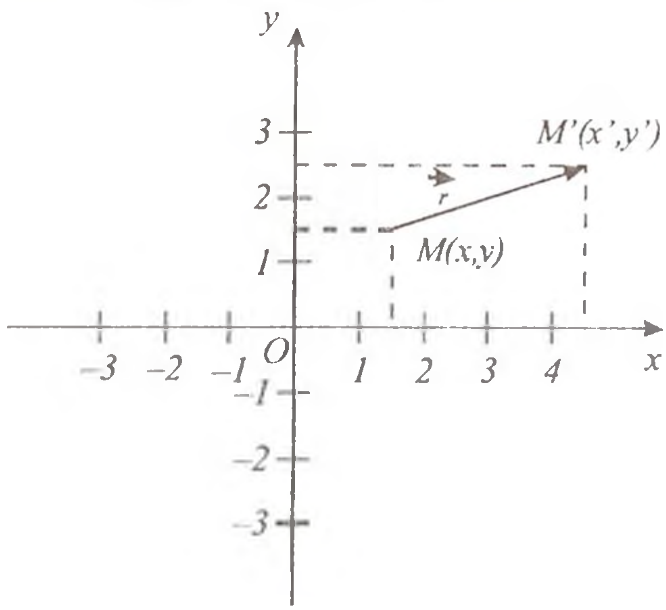


Рис. 4

Розглянемо паралельне перенесення на вектор $\vec{r}(x_0, y_0)$.

Якщо $\vec{r}(M) = M'$, то $\overrightarrow{MM'} = \vec{r}$; $M(x, y) \to M'(x', y')$.

$\left(x' - x, y' - y\right) = (x_0, y_0)$. Таким чином, $\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$

Координатні формули паралельного перенесення мають вигляд:

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0. \end{cases}$$

Вправи:

1. Перерахуйте відомі вам способи задання паралельного перенесення.

   Відповідь: $\vec{r}$; (A, B).

2. Побудуйте образи точок $A(2; 5), B(0; -7), C(3; 0)$ при паралельному перенесенні в напрямі осі Оx на 3 од. Запишіть координати побудованих точок.

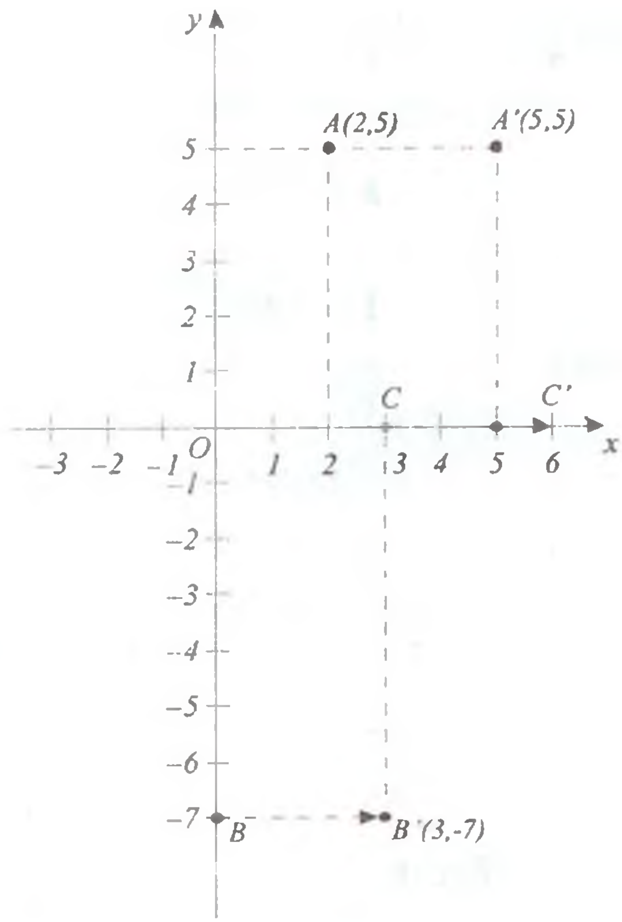


Рис. 5

Відповідь: $A(2;5) \to A'(5;5)$ $B(0;-7) \to B'(3;-7)$

$C(3;0) \to C'(6;0)$

3. Побудуйте точки, відповідні точкам $A(0;2), C(-3;4)$ $O(0;0)$ при паралельному перенесенні в напрямі осі OY на відстань 5 од. Запишіть їх координати.

$A(0;2) \to A'(0;7)$

$C(-3;4) \to C'(-3;9)$

$O(0;0) \to O'(0;5)$

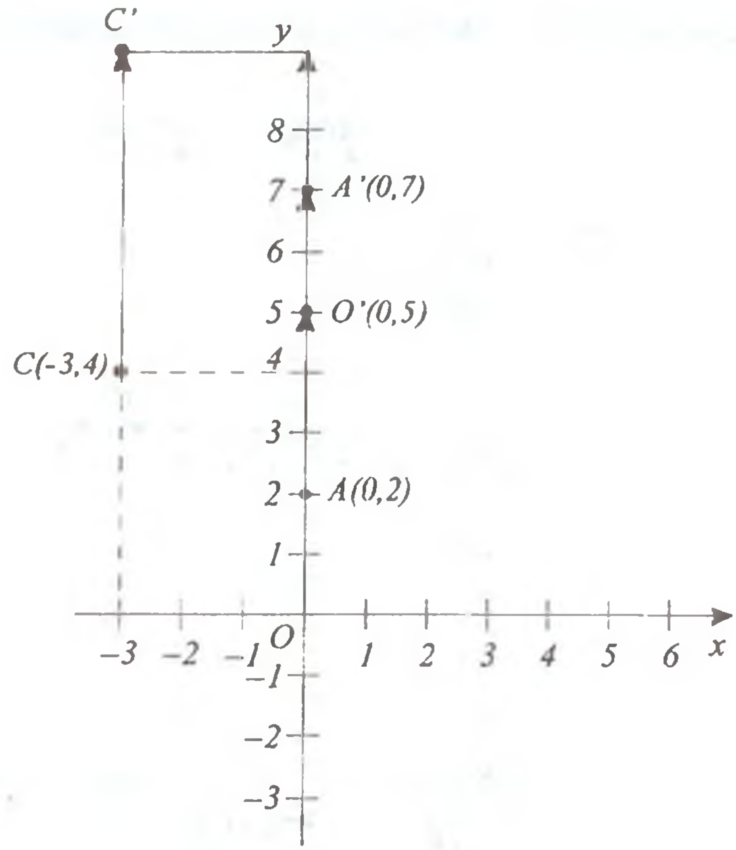


Рис. 6

4. Паралельне перенесення задано парою точок $O(0;0) \to M(-2;0)$. Запишіть координати образів точок $A(-3;2)$, $B(4;1)$, $C(0;-3)$.

Розв'язання:

$$T_{\vec{r}}: \vec{r} = \vec{OM}(-2-0;0-0);\ \vec{r} = \vec{OM}(-2;0)$$

$$T_{\vec{r}}(A) = A';\ \begin{cases} x' = x + a & a = -2, \\ y' = y + b & b = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -3-2, \\ y' = 2+0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -5, \\ y' = 2; \end{cases} \Rightarrow A'(-5;2).$$

$$T_{\vec{r}}(B) = B';\ \begin{cases} x' = 4-2, \\ y' = 1+0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2, \\ y' = 1; \end{cases} \Rightarrow B'(2;1);\ C'(-2;-3).$$

Відповідь: $A'(-5;2)$; $B'(2;1)$; $C'(-2;-3)$.

5. Відомо, що $\Delta A_1B_1C_1 = T_{\vec{r}}(\Delta ABC)$. Знайти співвідношення між відповідними основними елементами трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

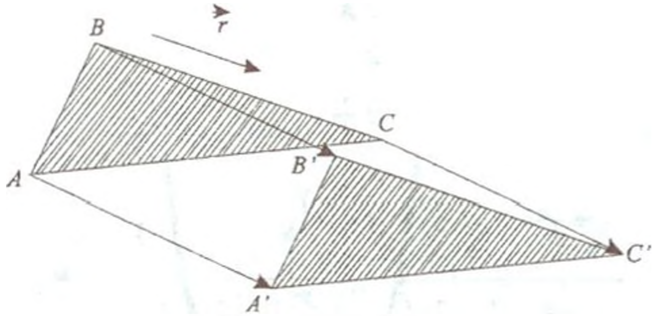


Рис. 7

Розв’язання:

$$T_{\vec{r}}(A) = A_1, \quad T_{\vec{r}}(AB) = A_1B_1,$$
$$T_{\vec{r}}(B) = B_1, \quad T_{\vec{r}}(BC) = B_1C_1,$$
$$T_{\vec{r}}(C) = C_1, \quad T_{\vec{r}}(AC) = A_1C_1.$$

6. Побудуйте квадрат із стороною 5 см та його образ при паралельному перенесенні в напрямі діагоналі квадрата на 5 см. Вкажіть фігури, які є об’єднанням (перетином) даного квадрата і його образу.

Приклад.

Побудувати графік функції $y = x^2 - 2x - 3$ (1) *за допомогою паралельного перенесення.*

Розв’язання.

$y = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 \Leftrightarrow y = (x-1)^2 - 4 \Leftrightarrow y + 4 = (x-1)^2$ (2).

Введемо нові змінні $\begin{cases} x - 1 = X, \\ y + 4 = Y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y - 4. \end{cases}$

Координати нового початку: $x_0 = 1,\ y_0 = -4;\ O'(x_0; y_0),\ O'(1; -4)$.

Вектор паралельного перенесення: $\vec{r} = \overline{OO'}$; $\vec{r}(1; -4)$

$(2) \Rightarrow Y = X^2$.

Таким чином, парабола, яка має рівняння $y = x^2 - 2x - 3$ в старій системі координат xOy, в новій системі $XO'Y$ має рівняння $Y = X^2$.

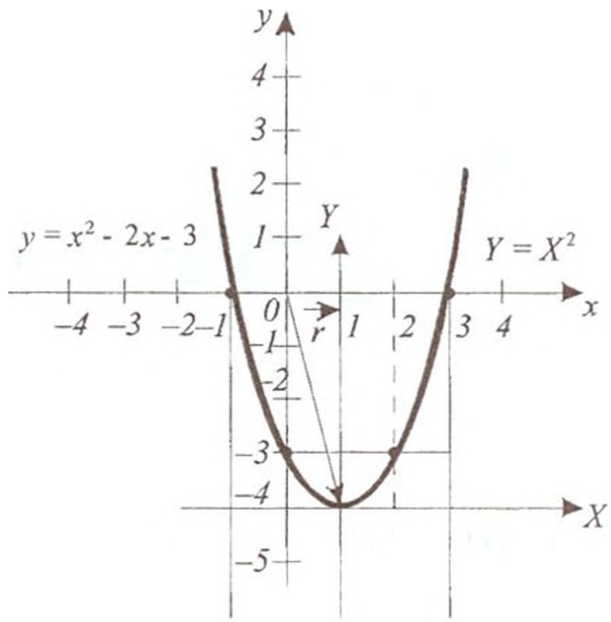


Рис. 8

Приклад.

Побудувати графік функції $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ (1) за допомогою паралельного перенесення.

Розв'язання:

$$(1) \Rightarrow y = \frac{(2x-2)+2+3}{x-1} \Leftrightarrow y = 2 + \frac{5}{x-1} \ (2).$$

Введемо нові змінні: $\begin{cases} x-1 = X, \\ y-2 = Y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+1, \\ y = Y+2. \end{cases}$

Таким чином, координати нового початку координат – $O'(1;2)$ і вектор паралельного перенесення – $\vec{r} = \overline{OO'}$, тому $\vec{r}(1;2)$. В новій системі координат $XO'Y$ графіком функції (1) буде $Y = \dfrac{5}{X}$ (3).

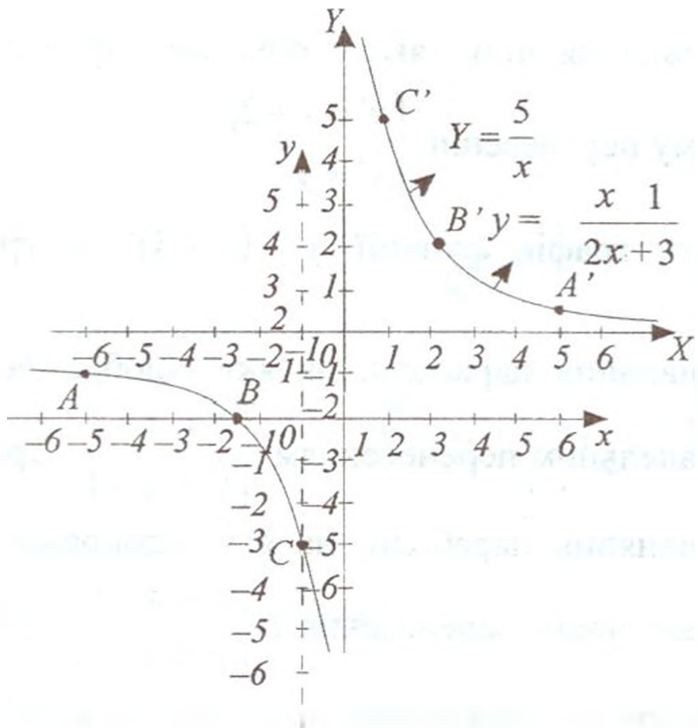


Рис. 9

Асимптотами графіка функції $Y=\dfrac{5}{X}$ в "новій" системі координат $XO'Y$ будуть координатні осі $O'X$ і $O'Y$.

Асимптотами графіка функції $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ в "старій" системі координат будуть прямі $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

7. Нарисуйте довільне коло і побудуйте його образ при паралельному перенесенні, заданому парою точок $A \to A'$.
8. Запишіть координати точок, на які відображаються точки $A(-2;4)$, $B(3;-5)$, $C(2;8)$ паралельним перенесенням $M(1;2) \to M'(5;4)$
9. Запишіть рівняння прямої, на яку відображається пряма $y=2x-1{,}5$ під дією вектора $\overrightarrow{OM}(3;-4)$. Зробіть малюнок.

10. Запишіть рівняння лінії, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні $\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y. \end{cases}$

11. Як одержати графік функції $y = (x+3)^2$ із графіка функції $y = x^2$?

12. Запишіть рівняння параболи, на яку відображається парабола $y = x^2$ паралельним перенесенням $\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 1. \end{cases}$ Зробіть рисунок.

13. Запишіть рівняння параболи, на яку відображається парабола $y = x^3$ паралельним перенесенням $\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y - 1. \end{cases}$ Зробіть рисунок.

14. Запишіть формули паралельного перенесення, які відображають графік функції $y = x^2$ на графік функції $y = x^2 - 4x + 10$.

Розв'язання.

$y = x^2 - 4x + 10 = (x^2 - 4x + 4) + 6 = (x-2)^2 + 6;$

$y - 6 = (x-2)^2;$

$\begin{cases} x' = x - 2, \\ y' = y - 6; \end{cases} \quad y' = x'^2$

Але треба виразити старі координати через нові, тому

$\begin{cases} x = x' + 2, \\ y = y' + 6. \end{cases}$

15. Дано два круги з центрами O_1 і O_2. Проведіть пряму, паралель-ну даній прямій m так, щоб відрізки, які є перетином цієї прямої з даним кругом, були конгруентні.

Розв'язання.

Дано: $\alpha(O_1; r)$, $\beta(O_2; r)$, m.

Побудуйте: $n \parallel m$: $\alpha \cap n = \{A; B\}$, $\beta \cap n = \{C; D\}$, $|AB| = |CD|$.

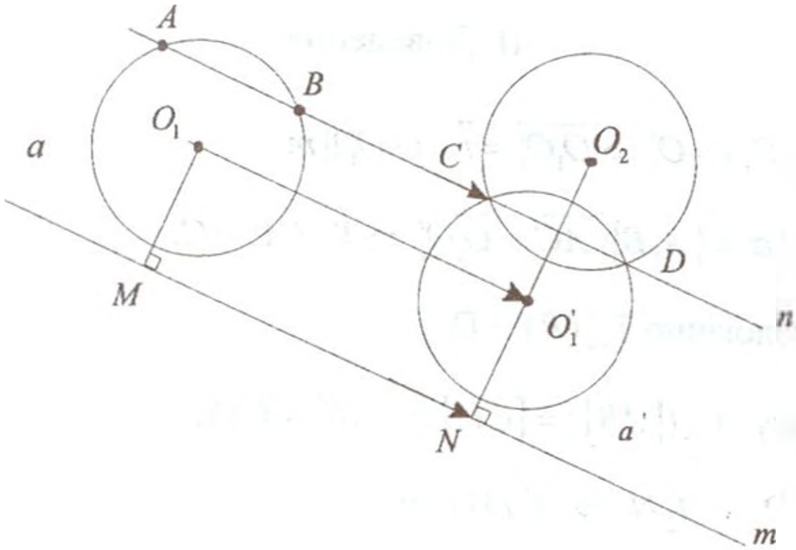


Рис. 10

I. Аналіз

Дано: $\alpha(O_1;r), \beta(O_2;r), \ n \| m, \ \alpha \cap n = \{A;B\}, \ \beta \cap n = \{C;D\}$,

$|AB| = |CD|$.

Знайдіть: Конструктивні властивості точок C і D.

$\mathrm{I}_1 \quad (O_1M) \perp m, \ (O_2N) \perp m, \ M, N \in m.$

$\mathrm{I}_2 \quad \mathrm{T}_{\vec{r}}, \ \vec{r} = \overrightarrow{MN}, \ \mathrm{T}_{\vec{r}}(O_1) = O_1', \ \mathrm{T}_{\vec{r}}(\alpha) = \alpha'.$

$\mathrm{I}_3 \quad \alpha' \cap \beta = \{C, D\}.$

Конструктивні властивості точок C і D знайдено.

II. Побудова

$\mathrm{II}_1 \quad (O_1M) \perp m, \ (O_2N) \perp m, \ M, N \in m, \ \overline{MN} = \vec{r}.$

$\mathrm{II}_2 \quad \mathrm{T}_{\vec{r}}(O_1) = O_1', \ \mathrm{T}_{\vec{r}}(\alpha) = \alpha'.$

$\mathrm{II}_3 \quad \alpha' \cap \beta = \{C, D\}, \ (CD) = n.$

III. Доведення

III_1 $\text{T}_{\vec{r}}(O_1)=O_1' \Rightarrow \overline{O_1O_1'}=\vec{r},\ O_1O_1' \parallel m.$

III_2 $n \cap \alpha = \{A,B\}\ \overline{AC}=\overline{O_1O_1'} \Rightarrow \text{T}_{\vec{r}}(A)=C.$

Аналогічно $\text{T}_{\vec{r}}(B)=D.$

Тому $\text{T}_{\vec{r}}([AB])=[CD] \Rightarrow |AB|=|CD|.$

III_3 $CD \perp O_2N \Rightarrow (CD) \parallel m.$

IV. Дослідження

IV_1 $(O_1M) \perp m,\ (O_2N) \perp m,$ тому точка $M=(O_1M)\cap m$ – єдина і точка $N=(O_2N)\cap m$ – єдина.

Вектор $\vec{r}=\overline{MN}$ визначено однозначно.

IV_2 $\text{T}_{\vec{r}}(O_1)=O_1',$ точка O_1' – єдина.

$\text{T}_{\vec{r}}(\alpha)=\alpha',$ коло α' – єдине.

IV_3 Кількість розв'язків залежить від кількості точок перетину кіл α' і β.

Тому: шукана пряма n єдина, якщо кола α' і β перетнулися в двох точках.

Якщо кола α' і β співпали, тобто $\alpha' \equiv \beta$, то точок перетину безліч і будь-яка пряма, яка перетинає обидва кола і паралельна лінії центрів, буде шуканою.

Якщо кола α' і β не перетинаються або дотикаються, то задача не має розв'язку.

Задача на доведення.

Якщо в трикутнику дві медіани конгруентні, то трикутник рівнобедрений. Доведіть.

Дано: $\Delta ABC: |AD|=|DB|, |BM|=|MC|, |AM|=|CD|.$

Доведіть: $|AB| = |BC|$.

Доведення.

1. $\vec{r} = \overline{DM}$.

$$\left.\begin{array}{l} T_{\vec{r}}(D) = M, \\ T_{\vec{r}}(C) = C' \end{array}\right\} \Rightarrow T_{\vec{r}}([AC]) = [MC'],\ |DC| = |MC'|.$$

2. $\left.\begin{array}{l} |AM| = |DC| \\ |DC| = |MC'| \end{array}\right\} \Rightarrow |AM| = |MC'| \Rightarrow \Delta AMC'$ – рівнобедрений.

3. $\Delta AMC' : |AM| = |MC'| \Rightarrow \angle MAC' = \angle MC'A$.

4. $\angle MC'A = \angle DCA$ (як відповідні кути при паралельних прямих $DC \parallel MC'$) $\Rightarrow \angle DCA = \angle MAC$.

5. $\Delta ADC = \Delta CMA$ ($DC = MA$, AC – спільна, $\angle DCA =$
$= \angle MAC) \Rightarrow AD = CM \Rightarrow 2AD = 2CM \Rightarrow AB = BC$.

Список літератури

1. *Пожарин Я.П., Скопец З.А.* Перемещение и подобие плоскости. – К.: Радянська школа, 1981.–175 с.
2. *Саранцев Г.И.* Сборник задач на геометрические преобразования.- М.: Просвещение, 1981.–110 с.