Н.П. Муранова,
доцент, канд. пед. наук
К.І. Мазур,
доцент, канд. фіз.-мат. наук
О.К. Мазур,
аспірант

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З МАТЕМАТИКИ НА ВСТУПНИХ ВИПРОБУВАННЯХ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

І. Рівняння та нерівності

Нестандартні рівняння та системи нерівностей

Основними методами розв'язування нестандартних рівнянь або систем є неелементарні прийоми.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^3+3x+5\sqrt{2}=0$.

Розв'язання. Будемо шукати многочлени $x+\alpha$ і $\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3$ такі, що справедлива тотожна рівність $(x+\alpha)\left(\beta_1x^2+\beta_2x+\beta_3\right)=x^3+3x+5\sqrt{2}$.

Тоді, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях невідомого x в лівій і правій частинах цієї рівності, маємо систему рівностей:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 + \alpha\beta_1 = 0, \\ \beta_2\alpha + \beta_3 = 3, \\ \alpha\beta_3 = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

Цій системі рівностей задовольняють числа $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -\sqrt{2}$, $\beta_3 = 5$, $\alpha = \sqrt{2}$. Тому справедливий розклад многочлена на множники:

$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 5\right)$, звідки випливає, що вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь $x + \sqrt{2} = 0$ і $x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0$. Ця сукупність має єдиний розв'язок $x = -\sqrt{2}$.

Відповідь: $x = -\sqrt{2}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0$. (1)

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{3} = a$ і розглянемо рівняння з параметром $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$. Розглядаючи це рівняння як квадратне відносно a, розкладемо його ліву частину на множники

$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = \left(a - x^2 + x\right)\left(a - x^2 - x - 1\right)$. Значить, рівняння (1) рівносильне сукупності рівнянь $x^2 - x - \sqrt{3} = 0$ і $x^2 + x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

Множина розв'язків першого рівняння є $x_1 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$ і $x_2 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

Множина розв'язків другого рівняння є $x_3 = \dfrac{-1 + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$ і $x_4 = \dfrac{-1 - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

Отже, вихідне рівняння має чотири корені x_1, x_2, x_3 і x_4.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$,

$x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$. (1)

Розв'язання. Помноживши обидві частини рівняння на многочлен x^2+1, що не має коренів, отримаємо рівняння $\left(x^2+1\right)\left(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1\right) = 0$ (2), рівносильне рівнянню (1). Рівняння (2) можна записати у вигляді $x^{10}+1=0$ (3).

Ясно, що рівняння (3) не має дійсних коренів, тому і рівняння (1) їх не має.

Відповідь: Немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x = a^3 + \dfrac{1}{a^3}$ (1), де a відмінне від нуля число.

Розв'язання. Оскільки $a^3 + \dfrac{1}{a^3} = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3 - 3a^2\cdot\dfrac{1}{a} - 3a\cdot\dfrac{1}{a^2} = \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$, то звідси робимо висновок, що $x_1 = a+\dfrac{1}{a}$ є один з коренів вихідного рівняння (1). Поділивши многочлен $x^3 - 3x - a^3 - \dfrac{1}{a^3}$ на двочлен $x - a - \dfrac{1}{a}$, отримаємо, що $x^3 - 3x - \left(a^3 + \dfrac{1}{a^3}\right) = \left(x - a - \dfrac{1}{a}\right)\left(x^2 + x\left(a+\dfrac{1}{a}\right) + \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - 3\right)$, тобто решта коренів рівняння (1) співпадають з усіма коренями рівняння $x^2 + x\left(a+\dfrac{1}{a}\right) + \left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 - 3 = 0$ (2).

Дискримінант квадратного рівняння (2) є $D=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-$
$$-4\left(\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-3\right)=3\left(4-\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right)=-3\left(a-\frac{1}{a}\right)^2.$$

а) $D>0$ бути не може.

б) $D=0$ тільки при $a=1$ і при $a=-1$.

Отже, рівняння (2) не має коренів при $a^2\neq 1$, має єдиний корінь $x=1$ при $a=-1$. Добавляючи ще корінь $x=a+1/a$, знаходимо всі корені вихідного рівняння (1).

Відповідь: При $a=1$ два корені $x_1=2, x_2=-1$; при $a=-1$ два корені $x_1=-2, x_2=1$; при $a^2\neq 1$ і $a\neq 0$ один корінь $x_1=a+1/a$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\dfrac{\left(x^2-x+1\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\dfrac{x^2\left(x-1\right)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$. (1)

Розв'язання. Очевидно, що зовнішній вигляд рівняння підказує, що один із коренів рівняння (1) є $x_1=\sqrt{5}$. Перепишемо рівняння (1) в дещо іншому вигляді.

Оскільки справедливі тотожні рівності

$x^2-x+1=\left(x-1/2\right)^2+3/4,$

$x\left(x-1\right)=\left(x-1/2\right)^2-1/4,$

то рівняння (1) можна переписати так:
$$\frac{\left(\left(x-1/2\right)^2+3/4\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{\left(\left(x-1/2\right)^2-1/4\right)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}. \qquad (2)$$

Тепер, очевидно, що якщо x_0 – корінь рівняння (2), то $x_1=1-x_0$ також є корінь рівняння (2), оскільки $\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2$.

Покажемо, що якщо x_1, $x_1 \neq 0; 1$, є корінь рівняння (1), то $x_2 = \frac{1}{x_1}$ також є корінь цього рівняння. Дійсно, оскільки

$$\frac{\left(x_2^2 - x_2 + 1\right)^3}{x_2^2\left(x_2 - 1\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} + 1\right)^3}{\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)^2} = \frac{\left(1 - x_1 + x_1^2\right)^3}{x_1^6 \frac{1}{x_1^4}\left(1 - x_1\right)^2} = \frac{\left(x_1^2 - x_1 + 1\right)^3}{x_1^2\left(1 - x_1\right)^2},$$ то

звідси і випливає це твердження.

Отже, якщо x_1, $x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 1$, корінь рівняння (1), то воно має ще корені $\frac{1}{x_1}, 1 - x_1, \frac{1}{1 - x_1}, 1 - \frac{1}{x_1}, \frac{1}{1 - \frac{1}{x_1}}$, тобто рівняння (1) має

корені

$$x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3 = 1 - \sqrt{5},\ x_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{5}},\ x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_6 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Оскільки рівняння (1) алгебраїчне рівняння шостого степеня, то воно має не більше шести коренів. Таким чином ми знайшли всі корені рівняння (1).

Відповідь:

$$x_1 = \sqrt{5},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_3 = 1 - \sqrt{5},\ x_4 = \frac{1}{1 - \sqrt{5}},\ x_5 = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}},\ x_6 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\left(x^2 + 2x - 5\right)^2 + 2\left(x^2 + 2x - 5\right) - 5 = x \quad (1).$$

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^2 + 2x - 5$, тоді рівняння (1) можна переписати у вигляді $f(f(x)) = x$. Тепер очевидно, що якщо x_0 – корінь рівняння $f(x) = x$, то x_0 і корінь рівняння $f(f(x)) = x$. Корені рівняння $x^2 + 2x - 5 = x$ є $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ і

$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Таким чином, і вихідне рівняння (1) має ці корені. Переписавши рівняння (1) у вигляді $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$ (2) і розділивши многочлен $x^4+4x^3-4x^2-17x+10$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)$, отримаємо, що рівняння (2) можна записати у вигляді $\left(x^2+x-5\right)\left(x^2+3x-2\right)=0$. Отже, коренями рівняння (1) разом з x_1 та x_2 є також корені рівняння $x^2+3x-2=0$, тобто числа $x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ і $x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Відповідь: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x+\dfrac{3x}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{35}{4}$.

Розв'язання. Область допустимих значень даного рівняння: $|x|>3$. Очевидно, що розв'язки рівняння мають задовольняти умову $x>3$. Піднесемо ліву та праву частини рівняння до квадрата: $x^2+\dfrac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}+\dfrac{9x^2}{x^2-9}=\dfrac{1225}{16}$, $\dfrac{x^4}{x^2-9}+\dfrac{6x^2}{\sqrt{x^2-9}}-\dfrac{1225}{16}=0$. Після заміни $t=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}$ $(t>0)$ отримуємо $t^2+6t-\dfrac{1225}{16}=0$, звідки $t=\dfrac{25}{4}$.

Розв'язавши рівняння $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}=\dfrac{25}{4}$, знаходимо: $x_1=5$, $x_2=\dfrac{15}{4}$.

Відповідь: $x_1=5$, $x_2=\dfrac{15}{4}$.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\left|3x+\sqrt{16-9x^2}\right|=16-18x^2$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді: $\left|3x+\sqrt{16-9x^2}\right|=$ $=\left(\sqrt{16-9x^2}+3x\right)\left(\sqrt{16-9x^2}-3x\right)$. Рівність $|a|=a\cdot b$ виконується при виконанні наступних умов: $a=0$ або $\begin{cases}a>0;\\ b=1;\end{cases}$ або $\begin{cases}a<0;\\ b=-1.\end{cases}$ Тому дане рівняння рівносильне такій сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{16-9x^2}+3x=0;\\ \begin{cases}\sqrt{16-9x^2}+3x>0;\\ \sqrt{16-9x^2}-3x=1;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{16-9x^2}+3x<0;\\ \sqrt{16-9x^2}-3x=-1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}16-9x^2=9x^2;\\ -3x\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{16-9x^2}>-3x;\\ 16-9x^2=(3x+1)^2;\\ 3x+1\ge 0;\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{6-9x^2}<-3x;\\ 16-9x^2=(3x-1)^2;\\ 3x-1\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$$

з якої отримуємо відповідь: $x_1=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{31}-1}{6}$.

Відповідь: $x_1=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{31}-1}{6}$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння

$$x=\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right). \qquad (1)$$

Розв'язання. Помноживши обидві частини рівняння на функцію $\sqrt{1+x}-1$, отримаємо рівняння

$$x\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right), \qquad (2)$$

що є наслідком вихідного рівняння (1). Перепишемо рівняння (2) у вигляді

$$x\left(-\sqrt{1+x}+1+\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right)=0. \qquad (3)$$

Наслідком рівняння (3) є рівняння $x\left(x^2+x-6\right)=0$. (4)

Розв'язками рівняння (4) є $x_1=0, x_2=2$ і $x_3=-3$. Перевірка показує, що $x_2=2$ є коренем вихідного рівняння (1), а $x=0$ і $x=-3$ не його коренями.

Відповідь: $x_1=2$.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x^4-4x^3-1=0$.

Розв'язання. Після заміни $x-1=t$ отримуємо рівняння $t^4-6t^2-8t-4=0$. Розкладемо ліву частину цього рівняння на множники. Для цього представимо її у вигляді $t^4-6t^2-8t-4=$ $=\left(t^2+a\right)^2-(bt+c)^2$, де a, b, c підберемо методом невизначених коефіцієнтів. Маємо $t^4-6t^2-8t-4=t^4+\left(2a-b^2\right)t^2-2bct+a^2-c^2$.

Один з розв'язків системи $\begin{cases} 2a-b^2=-6; \\ -2bc=-8; \\ a^2-c^2=-4 \end{cases}$ знаходимо методом добору: $a=-2, b=\sqrt{2}, c=2\sqrt{2}$. Тому отримуємо рівняння $\left(t^2-2\right)^2-\left(\sqrt{2}t+2\sqrt{2}\right)^2=0$, або $\left(t^2+\sqrt{2}t+2\sqrt{2}-2\right)\left(t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}-2\right)=0$.

З сукупності $\left[\begin{array}{l} t^2+\sqrt{2}t+2\sqrt{2}-2=0; \\ t^2-\sqrt{2}t-2\sqrt{2}-2=0; \end{array}\right.$ знаходимо

$$t_{1,2}=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}.$$

Відповідь: $x_{1,2}=\dfrac{2+\sqrt{2}\pm\sqrt{10+8\sqrt{2}}}{2}$.

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+y+z=4; \\ xy+yz+zx=5; \\ x^3+y^3+z^3=10. \end{cases}$

Розв'язання. Дана система є симетричною відносно змінних x, y, z. Позначимо $x+y+z=a,\ xy+yz+zx=b,\ xyz=c$. Тоді $x^3+y^3+z^3=a^3-3ab+3c=10$, звідки отримуємо $c=2$. Для розв'язання системи $\begin{cases} x+y+z=4; \\ xy+yz+zx=5; \\ xyz=2 \end{cases}$ зручно скористатись теоремою Вієта для кубічного рівняння: якщо рівняння $ax^3+bx^2+cx+d=0$ має три дійсні корені x_1, x_2, x_3, то $x_1+x_2+x_3= \ =-\frac{b}{a},\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$. Тому числа x, y, z є коренями рівняння $t^3-4t^2+5t-2=0$.

Знаходимо $t_1=1, t_2=1, t_3=2$. Розв'язками системи є всі можливі перестановки цих коренів: $(1;1;2), (1;2;1), (2;1;1)$.

Відповідь: $(1;1;2), (1;2;1), (2;1;1)$.

Рівняння з оберненими тригонометричними функціями за допомогою відповідних позначень краще зводити до систем рівнянь.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\arccos\frac{x}{2}=2\operatorname{arcctg}(x-1)$.

Розв'язання. Позначимо $\arccos\frac{x}{2}=\alpha,\ \alpha\in[0;\pi]$, $\operatorname{arcctg}(x-1)=\beta,\ \beta\in[0;\pi]$. Отримуємо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha=2\beta; \\ \cos\alpha=\frac{x}{2}; \\ \operatorname{ctg}\beta=x-1. \end{cases}$ з якої отримуємо $x=2\cos\alpha=\operatorname{ctg}\beta+1$,

$2\cos 2\beta = \operatorname{ctg}\beta + 1$. Тоді з рівняння $2\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\beta} + 1$ знаходимо $\operatorname{tg}\beta = -1$. Враховуючи умову $\beta \in [0; \pi]$, отримуємо $\beta = \dfrac{3\pi}{4}$, $x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$ (1)

Розв'язання. ОДЗ рівняння (1) є всі дійсні x. Зробимо заміну невідомого $x = \operatorname{tg} t$, де можна вважати, що $-\pi/2 < t < \pi/2$. Тоді рівняння (1) запишемо у вигляді $\dfrac{1}{\cos t} - \operatorname{tg} t = \dfrac{5}{2}\cos t$ (2)

Оскільки $\cos t \neq 0$ для тих t, які розглядаються, то рівняння (2) для цих t рівносильне рівнянню $2 - 2\sin t = 5\left(1-\sin^2 t\right)$ (3)

Рівняння (3) рівносильне сукупності рівнянь $\sin t = 1$ і $\sin t = -\dfrac{3}{5}$ (4)

Із розв'язків цих рівнянь проміжку $-\pi/2 < t < \pi/2$ належить тільки $t = \arcsin(-3/5)$. Тому відповідне x є

$$x = \operatorname{tg}\arcsin(-3/5) = \frac{\sin(\arcsin(-3/5))}{\cos(\arcsin(-3/5))} = \frac{-3/5}{\sqrt{1-9/25}} = -3/4.$$

Відповідь: $-3/4$.

Часто міркування, пов'язані з областю допустимих значень цього рівняння чи областю значень функцій, що входять у рівняння, допомагають уникнути поширених помилок або зайвої роботи.

Приклад 14. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x - 4 = 25y^2; \\ x - 8y\sqrt{x^2 - 9xy^2} = (9-16x)y^2. \end{cases}$$

Розв'язання. із другого рівняння маємо, що розв'язки системи мають задовольняти умові $x^2 - 9xy^2 \geq 0$, звідки

$x \in (-\infty;\ 0] \cup [9y^2;\ +\infty)$. З першого рівняння маємо $x \geq \frac{4}{5}$. Отже, $x \geq 9y^2$.

Запишемо друге рівняння у вигляді $x - 9y^2 - 8y\sqrt{x^2 - 9xy^2} + 16xy^2 = 0$, або $\left(\sqrt{x - 9y^2} - 4y\sqrt{x}\right)^2 = 0$, звідки $\sqrt{x - 9y^2} - 4y\sqrt{x} = 0$. Тому дана система рівносильна такій: $\begin{cases} 5x - 4 = 25y^2; \\ x - 9y^2 = 16xy^2. \end{cases}$ Розв'язавши її, отримуємо відповідь: $x = 1;\ y = \pm 0,2$.

Відповідь: $(1;\ 0,2)$, $(1;\ -0,2)$.

Приклад 15. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x\left(x^2 + 3y^2\right) = 158; \\ y\left(y^2 + 3x^2\right) = -185. \end{cases}$

Розв'язання. Поділивши перше рівняння на друге, після перетворень отримуємо, що розв'язки системи мають задовольняти рівняння $185x^3 + 474x^2y + 555xy^2 + 158y^3 = 0$. Враховуючи, що з другого рівняння випливає $y \neq 0$, та поділивши отримане рівняння $185t^3 + 474t^2 + 555t + 158 = 0$, де $t = \frac{x}{y}$. Із цього рівняння (краще за допомогою схеми Горнера) знаходимо, що $t = -\frac{2}{5}$, тобто дана система рівносильна такій: $\begin{cases} x\left(x^2 + 3y^2\right) = 158; \\ \frac{x}{y} = -\frac{2}{5}. \end{cases}$ Розв'язавши її, отримуємо $x = 2$, $y = -5$.

Відповідь: $(2;\ -5)$.

Приклад 16. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3}; \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо $x+y+z=\dfrac{x(y+z)}{2}=\dfrac{y(z+x)}{3}=\dfrac{z(x+y)}{4}$.

Позначимо $xy=a$, $xz=b$, $yz=c$, $x+y+z=t$.

Тоді $\begin{cases} a+b=2t; \\ a+c=3t; \\ b+c=4t, \end{cases}$ звідки отримуємо $a=\dfrac{t}{2}$, $b=\dfrac{3t}{2}$, $c=\dfrac{5t}{2}$.

Однак тоді $\dfrac{a}{b}=\dfrac{y}{z}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{b}{c}=\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$, звідки $x=\dfrac{3y}{5}$, $z=3y$. Підставивши ці значення в перше рівняння початкової системи, отримуємо $\dfrac{5}{3y}+\dfrac{1}{4y}=\dfrac{1}{2}$, звідки $y=\dfrac{23}{6}$, $x=\dfrac{23}{10}$, $z=\dfrac{23}{2}$.

Відповідь: $\left(\dfrac{23}{10}, \dfrac{23}{6}, \dfrac{23}{2}\right)$.

Приклад 17. Знайти всі значення параметра a, для кожного з яких вірне твердження: для будь-якого $b \in R$ знайдуться щонайменше три такі значення $c \in R$, щоб система рівнянь $\begin{cases} 3x+(2b+4)y=bc^3+ac; \\ 3x+(b^2+2b)y=4c^2 \end{cases}$ з невідомими x, y мала хоча б один розв'язок.

Розв'язання. Дана система рівносильна такій: $\begin{cases} x = \dfrac{bc^3 + ac - (2b+4)y}{3}; \\ (b^2 - 4)y = c(4c - bc^2 - a), \end{cases}$ яка при $b \neq \pm 2$ має розв'язок при будь-якому $c \in R$. Тому для розв'язання задачі потрібно знайти всі значення параметра a, для кожного з яких вірне твердження: для $b = \pm 2$ знайдуться щонайменше три такі значення $c \in R$, щоб рівняння $0 \cdot y = c(4c - bc^2 - a)$ з невідомим y мало хоча б один розв'язок. Таке рівняння має розв'язок у випадку, коли виконується рівність $c(4c - bc^2 - a) = 0$.

Отже, рівняння $c(4c - bc^2 - a) = 0$ при $b = \pm 2$ повинне мати три різних дійсних розв'язки. Це вірно при виконанні умов: $\begin{cases} a \neq 0; \\ D = 16 - 4ab > 0. \end{cases}$

Звідси отримуємо відповідь: $a \in (-2;\ 0) \cup (0;\ 2)$.

II. Нестандартні нерівності

При розв'язуванні нерівностей основними методами є введення нової змінної або розклад лівої частини нерівності (після перенесення всіх доданків у цю частину) на множники.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$x - \sqrt{(x-1)(x+4)} \geq 2\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x-1} - 3.$

Розв'язання. Позначимо $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = t.$ Тоді $t^2 = 2x + 3 - 2\sqrt{(x+4)(x-1)}$, звідки $x - \sqrt{(x+4)(x-1)} = \dfrac{t^2 - 3}{2}$. Для нової змінної отримуємо нерівність $t^2 - 4t + 3 \geq 0$, звідки $t \in (-\infty;\ 1] \cup [3;\ +\infty)$.

Отже дана нерівність рівносильна наступній сукупності:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\le 1;\\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\ge 3.\end{array}\right.$$ Розв'язуючи її, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1;\\ x+4\le\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1;\\ x+4\ge\left(3+\sqrt{x-1}\right)^2;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1;\\ 2\le\sqrt{x-1};\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1;\\ -2\ge\sqrt{x-1};\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x\ge 5;\\ x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in[5;+\infty)$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[6]{x^4-1}<2^x-\log_2\left(1+x^4\right). \qquad (1)$$

Розв'язання. ОДЗ нерівності (1) складається з усіх x, що одночасно задовольняють умовам $1-x^2\ge 0$, $x^4-1\ge 0$, тобто ОДЗ складається з двох чисел $x_1=1$ і $x_2=-1$. Підставляючи $x_1=1$ в нерівність (1), отримаємо, що його ліва частина дорівнює 0, права дорівнює $2-\log_2 2=1$, тобто $x_1=1$ є розв'язок нерівності (1). Підставляючи $x_2=-1$ в нерівність (1), отримуємо, що $x_2=-1$ не є його розв'язком, оскільки ліва частина нерівності (1) дорівнює 0, а права частина дорівнює $2^{-1}-\log_2 2=-1/2$.

Відповідь: $x=1$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$. (1)

Розв'язання. ОДЗ нерівності (1) є всі x із проміжку $-3\le x\le 9$. Розіб'ємо цю множину на два проміжки $-3\le x\le 0$ та $0<x\le 9$.

Для x із проміжку $-3\le x\le 0$ маємо $\sqrt{x+3}\ge 0$, $\sqrt[4]{9-x}\ge\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$. Отже, $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}\ge\sqrt{3}$ на цьому проміжку, і тому нерівність (4) не має розв'язків на цьому проміжку.

Нехай x належить проміжку $0 < x \le 9$, тоді $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ і $\sqrt[4]{9-x} \ge 0$. Отже, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для таких x, і, значить на цьому проміжку нерівність (4) також не має розв'язків.

Відповідь: розв'язків немає.

III. Доведення нерівностей

Алгебраїчні нерівності доводяться різноманітними методами, що ґрунтуються на рівносильних перетвореннях даної нерівності до очевидної, на використанні властивостей числових нерівностей, властивостей елементарних функцій, доведення від супротивного тощо.

Нагадаємо деякі відомі **(опорні)** нерівності, що часто використовуються при доведенні інших нерівностей:

1) $a^2 \ge 0$;

2) $ax^2 + bx + c > 0$, якщо $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$;

3) $x + \dfrac{1}{x} \ge 2$, якщо $x > 0$ та $x + \dfrac{1}{x} \le -2$, якщо $x < 0$.

Приклад 1. Довести нерівність $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1 \ge 0$.

Розв'язання. Маємо

$$x^8 + x^6 - 4x^2 + x^2 + 1 = x^8 - 2x^4 + 1 + x^6 - 2x^4 + x^2 = \left(x^4 - 1\right)^2 +$$

$$+x^2\left(x^2 - 1\right)^2 \ge 0,$$ оскільки обидва доданки невід'ємні.

Це типовий приклад використання найпростішого методу, який називається **«виділення квадратів»**.

Приклад 2. Довести нерівність

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{n}.$$

Розв'язання. Після множення цієї нерівності на n та тотожних перетворень маємо такі рівносильні нерівності:

$$n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \ge \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2, \; n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) -$$

$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots + \right.$

$\left. +2a_{n-1}a_n\right) \ge 0,\ (n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) - \left(2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + \right.$

$\left. +2a_1a_n + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_2a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n\right) \ge 0.$

Після перегрупування доданків маємо очевидну нерівність, рівносильну даній:

$(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \ldots + (a_1 - a_n)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \ldots + (a_2 - a_n)^2 +$

$+ \ldots + (a_{n-1} - a_n)^2 \ge 0.$

Приклад 3. Довести, що $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

Розв'язання. Дана нерівність при натуральному n рівносильна таким: $1 < \sqrt{(n+1)n} - \sqrt{n(n-1)}$, $\sqrt{n(n-1)} + 1 < \sqrt{n(n+1)}$, $n(n-1) + 2\sqrt{n(n-1)} + 1 < n(n+1)$, $2\sqrt{n(n-1)} < 2n-1$; $4n(n-1) < 4n^2 - -4n + 1$, $0 < 1$, що доводить її справедливість.

Приклад 4. Довести, що при всіх дійсних x, y, z, які задовольнять рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ та $xz - xy + yz = 4$, змінна x задовольняє нерівності $|x| \le \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Розв'язання. Неважко помітити, що умови задачі симетричні відносно змінних x, y. Позначимо $x + y = a$, $xy = b$. Тоді маємо $\begin{cases} a^2 - 2b + z^2 = 8; \\ az - b = 4. \end{cases}$ Звідси отримуємо $b = az - 4$, $a^2 - 2az + z^2 = 0$, тобто $z = a = x + y$. Тоді змінні x та y задовольняють рівності $x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 8$, або після спрощень $y^2 + xy + x^2 - 4 = 0$.

Розглядаючи цю рівність як квадратне рівняння відносно змінної y, з умови, що такі числа x, y існують, отримуємо, що дискримінант такого рівняння невід'ємний, тобто $D = 16 - 3x^2 \ge 0$.

Із цієї нерівності отримуємо твердження задачі.

IV. Застосування нерівностей при розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь

При розв'язуванні рівнянь та систем рівнянь найбільш поширені наступні ідеї застосування нерівностей:

1) якщо $f(x)\geq 0$ та $g(x)\geq 0$ при всіх допустимих значеннях змінної x, то рівняння $f(x)+g(x)=0$ рівносильне системі рівнянь:
$$\begin{cases} f(x)=0; \\ g(x)=0; \end{cases}$$

2) якщо $f(x)\geq A$ та $g(x)\leq A$ при всіх допустимих значеннях змінної x, то рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне системі рівнянь: $\begin{cases} f(x)=A; \\ g(x)=A. \end{cases}$

Приклад 1. Знайти всі пари $(x,\ y)$ дійсних чисел, що задовольняють рівнянню $x^4-2x^2y+3y^2-4xy+4x^2-8y+16=0.$

Розв'язання. Виділивши повні квадрати, маємо $\left(x^2-y\right)^2+(2x-y)^2+(y-4)^2=0.$ Оскільки всі доданки невід'ємні, то отримуємо, що рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2-y=0; \\ 2x-y=0; \\ y-4=0, \end{cases}$ звідки отримуємо $x=2,\ y=4.$

Відповідь: $x=2,\ y=4.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{x}.$

Розв'язання. Область допустимих значень даного рівняння: $x\geq 1.$ Але при $x\geq 1$ виконуються нерівності: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\geq 2,$

$\frac{2}{x} \le 2$. Тому рівняння рівносильне системі: $\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2; \\ \frac{2}{x} = 2; \end{cases}$ з якої отримуємо $x = 1$.

Відповідь: $x = 1$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 + 4x\cos xy + 4 = 0$.

Розв'язання. Маємо $x^2 + 4x\cos xy + 4 = (x + 2\cos xy)^2 + 4\sin^2 xy = 0$, звідки $\begin{cases} x + 2\cos xy = 0; \\ \sin xy = 0. \end{cases}$ Оскільки при $\sin xy = 0$ маємо $\cos xy = \pm 1$, то можливі два випадки:

1) $\begin{cases} \sin xy = 0; \\ \cos xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; \\ xy = \pi(2k+1),\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin xy = 0; \\ \cos xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ xy = 2\pi k,\ k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; \\ y = \pi k,\ k \in Z. \end{cases}$

Відповідь: $x = 2,\ y = \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} = 4 - \log_3^4\left(x^2 + x^4 + 1\right). \qquad (1)$$

Розв'язання. ОДЗ цього рівняння є всі дійсні числа. Переписавши ліву частину рівняння (1) у вигляді $2\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\right)$, звертаємо увагу, що вона не менша ніж чотири, як сума двох взаємно обернених додатних величин, і тільки при $x = 0$ вона дорівнює чотирьом. У той же час права частина при $x = 0$

також дорівнює чотирьом, а для всіх $x \neq 0$ менше ніж чотири. Отже $x = 0$ єдиний розв'язок рівняння.

Відповідь: $x = 0$.

Приклад 5. Знайти всі дійсні числа x, y такі, що $x \geq y \geq 1$ та $2x^2 - xy - 3x + y + 1 = 0$.

Розв'язання. Дане рівняння зводиться до вигляду $(x-1)(x-y)+(x-1)^2 = 0$. За умовою перший доданок невід'ємний, тому рівність можлива лише при $x = 1$, звідки $1 \leq y \leq 1$, тобто $y = 1$.

Відповідь: $x = 1$, $y = 1$.

V. Застосування властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь

Часто при розв'язуванні задач використовуються такі властивості функції, як **обмеженість, парність, непарність, періодичність, монотонність.** Найбільш поширені такі ідеї застосування властивостей функцій.

1) Якщо функція $f(x)$ набуває найбільшого (чи найменшого) значення, яке дорівнює A, то для розв'язання рівняння $f(x) = A$ достатньо дослідити, при яких значеннях x функція $f(x)$ досягає свого найбільшого (чи найменшого) значення.

2) Якщо функція $f(x)$ парна (чи непарна) та x_0 – корінь рівняння $f(x) = 0$, то $-x_0$ також корінь цього рівняння.

3) Якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(x) = A$ не може мати більше одного кореня. Для розв'язання такого рівняння достатньо показати монотонність функції $f(x)$ та знайти цей корінь методом добору.

4) Якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(g(x)) = f(h(x))$ рівносильне рівнянню $g(x) = h(x)$ (за умови, що область визначення функції $f(x)$ містить область значень фун-

кцій $g(x)$ та $h(x)$). Якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(f(x)) = f(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x - x^2} + \sqrt{5 + 4x - x^2} = 5$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $\sqrt{4-(x-2)^2} + \sqrt{9-(x-2)^2} = 5$.

Максимальне значення лівої частини дорівнює 5 та досягається лише при $x = 2$.

Відповідь: $x = 2$.

Приклад 2. Знайти значення параметра a, при яких рівняння $a^2 \cdot 3^{|x|} - 6 = a\left(1 + 9\sqrt[3]{|x|}\right)$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $x_0 = 0$. Тому параметр a має задовольняти умову $a^2 - 6 = a$, звідки $a = 3$ або $a = -2$.

Побудувавши графіки функцій $y = a^2 \cdot 3^{|x|} - 6$ та $y = a\left(1 + 9\sqrt[3]{|x|}\right)$ при цих значеннях параметра a, приходимо до висновку, що при $a = 3$ рівняння має три розв'язки, а при $a = -2$ – один розв'язок.

Відповідь: $a = -2$.

Приклад 3. Розв'язати в дійсних числах рівняння $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + 1 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на $\left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$. Маємо $\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^x = 1$.

Оскільки $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} < 1$, $\frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}} < 1$, то функції

$y=\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x$, а отже і ліва частина рівності є спадними функціями. Тому рівняння не може мати більше одного кореня. Цим коренем є число $x=2$.

Відповідь: $x=2$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x+\sin y+\sin z=3x; \\ \sin x+\operatorname{tg} y+\sin z=3y; \\ \sin x+\sin y+\operatorname{tg} z=3z, \end{cases} \text{ якщо } 0\le x<\frac{\pi}{2},\ 0\le y<\frac{\pi}{2},\ 0\le z<\frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Додавши рівняння системи, отримуємо, що розв'язок має задовольняти рівняння-наслідок: $(2\sin x+\operatorname{tg} x-3x)+(2\sin y+\operatorname{tg} y-3y)+(2\sin z+\operatorname{tg} z-3z)=0$.

Розглянемо функцію $f(x)=2\sin x+\operatorname{tg} x-3x$ для $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Застосувавши нерівність Коші, отримуємо

$$f'(x)=2\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3=\cos x+\cos x+\frac{1}{\cos^2 x}-3\ge 3\cdot$$

$$\cdot\sqrt[3]{\cos x\cdot\cos x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}-3=0.$$

Отже, $f'(x)\ge 0$, причому $f'(x)=0$ лише при $\cos x=1$, тобто при $x=0$. Отже, $f(x)$ є зростаючою. Тому $f(x)>f(0)=0$ для всіх $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, а вказане вище рівняння-наслідок може виконуватись лише при $x=y=z=0$.

Перевірка показує, що $x=y=z=0$ є розв'язком системи.

Список літератури

1. *Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й.* Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. – К.: Либідь. 1993.

2. *Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М.* Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища шк., 2001.

3. *Сарана О.А.* Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – К.: Видавництво АСК, 2004.

4. *Ясінський В.В., Мазур К.І., Мазур О.К.* Вибрані конкурсні задачі з математики. т.1. Арифметика. Алгебра: Навчальний посібник для вступників до вищих навчальних закладів. – К.: Фенікс, 2002.