УДК51:373.57(045)

Муранова Н.П.,
к. пед. н., доцент,
завідувач кафедри базових
і спеціальних дисциплін ІДП
Мазур К.І.,
к. ф.-м. н., доцент кафедри базових
і спеціальних дисциплін ІДП
Мазур О.К.,
ст. викладач кафедри вищої математики НУХТ
Сич О.К.,
аспірант

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ З ПАРАМЕТРАМИ НА ВСТУПНИХ ВИПРОБУВАННЯХ У ВИЩИХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДАХ

Майже вся теорія квадратного тричлена, а також розв'язання багатьох задач, зв'язаних з ним, базується на прийомі, що називається „виділення повного квадрата". Застосовуючи цей прийом до квадратного тричлена ax^2+bx+c, приходимо до рівності

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Вираз b^2-4ac називається дискримінантом квадратного тричлена $\left(D=b^2-4ac\right)$. Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ має відповідно 2, 1 або 0 розв'язків у залежності від того, буде його дискримінант додатним $(D>0)$, рівним нулю $(D=0)$, або від'ємним $(D<0)$. (Нагадаємо, що за визначенням квадратного рівняння $a\neq 0$). Корені квадратного рівняння x_1 і x_2 дорівнюють:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a},\ x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}.$$

Правда, нумерація коренів умовна. Зазвичай намагаються занумерувати їх у порядку зростання, але це не обов'язково.

Якщо другий коефіцієнт (b) парний (причому він може бути просто парним числом, а може мати вид $b = 2k$), то зручніше користуватися для знаходження коренів формулами

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}D}}{a}, \text{ де } \frac{1}{4}D = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac.$$

Задачі, зв'язані з квадратним тричленом, що зустрічаються на вступних випробуваннях, надзвичайно різноманітні.

Задача 1. Знайти всі значення *параметра a*, при яких рівняння $2ax^2 - 4(a+1)x + 4a + 1 = 0$ має один корінь.

Розв'язання. Оскільки в умові не вказується, що розглядається квадратне рівняння, то при $a = 0$ маємо лінійне рівняння $-4x + 1 = 0$ з єдиним коренем $x = \frac{1}{4}$. Решту значень *параметра a* ми дістанемо з рівняння $D = 0$, а краще $\frac{1}{4}D = 0$:

$$4(a^2 + 2a + 1) - 2a(4a + 1) = 0, \; 2a^2 - 3a - 2 = 0; \; a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = 2.$$

Відповідь. $0; \; -\frac{1}{2}; \; 2.$

До азбуки квадратного тричлена відноситься і **теорема Вієта.** Для того, щоб x_1 та x_2 були коренями рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, необхідно і достатньо виконання рівностей $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1 - x_2 = \frac{c}{a}$.

Зверніть увагу на те, що тут сформульовано два твердження – пряме і обернене. Часто, формулюючи теорему Вієта, обмежуються одним прямим твердженням: «Якщо x_1 та x_2 – корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то виконуються рівності...»

Деякі логічні термінологічні проблеми виникають у випадку $D = 0$, але ми їх не будемо трактувати. Зауважимо лише, що вирази «квадратне рівняння що має один розв'язок» і «квадратне рівняння з рівними коренями» означають одне і те ж.

З теореми Вієта виходить також розкладання на множники квадратного тричлена:

$$ax^2+bx+c=0=a(x-x_1)(x-x_2).$$

На теоремі Вієта основано цілий ряд традиційних задач і методів розв'язання.

Задача 2. Довести, що при довільному a рівняння $\left(a^3-2a^2\right)x^2-\left(a^3-a+2\right)x+a^2+1=0$ має розв'язок.

Розв'язання. Можна, звичайно, знайти дискримінант і попробувати довести, що він додатний. А можна поступити мудріше. Позначимо ліву частину даного рівняння через $f(x)$. Відразу видно, що $f(0)=a^2+1>0$ при $a\in R.$ А $f(1)=-a^2+a+1<0$ при $a\in R.$ Тепер можна зробити висновок, що задане рівняння завжди має розв'язок. Більше того, якщо $a^3-2a^2\neq 0,$ тобто $a\neq 0$ і $a\neq 2,$ то задане рівняння має два корені; при цьому завжди є корінь, що задовольняє нерівності $0<x<1$.

Задача 3. Не розв'язуючи рівняння $ax^2+bx+c=0,$ знайти $x_1^{-2}+x_2^{-2}$, де x_1 і x_2 – корені заданого рівняння.

Розв'язання. Виконавши перетворення і використавши теорему Вієта, дістанемо

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2}{\left(x_1x_2\right)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

Відповідь. $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}.$

Задача 4. Скласти квадратне рівняння з коренями $\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2},$ де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0.$

Розв'язання. Нехай шукане квадратне має вигляд $Ax^2+Bx+C=0$ або $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}=0$ (*), а $X_1=\frac{1}{x_1}$, $X_2=\frac{1}{x_2}$ – його корені. Згідно з теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} X_1+X_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c}=-\frac{B}{A}, \\ X_1\cdot X_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}=\frac{C}{A}, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \frac{b}{c}=\frac{B}{A}, \\ \frac{a}{c}=\frac{C}{A}. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення $\frac{B}{A}$ і $\frac{C}{A}$ в рівняння (*), дістанемо $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$, або $cx^2+bx+a=0$.

Відповідь. $cx^2+bx+a=0$.

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАКІВ ДІЙСНИХ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

Задача 5. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $ax^2-\left(a^2+2a-1\right)x+a^2-1=0$ має дійсні корені, та визначити їхні знаки.

Розв'язання. При $a=0$ задане рівняння матиме розв'язок $x=1$.

Нехай $a\neq 0$. Оскільки дискримінант $D=a^4+2a^2+1=\left(a^2+1\right)^2$ є повним квадратом, то визначимо корені квадратного рівняння в явному вигляді: $x_1=a+1$, $x_2=\frac{a-1}{a}$. Отже, обидва корені додатні, якщо $a+1>0$ і $\frac{a-1}{a}>0$, тобто при $a\in(-1;\,0)\cup(1;\,+\infty)$. Якщо ж корені від'ємні, то $a+1<0$ і $\frac{a-1}{a}<0$, що не має смислу. При решті значень параметра a задане квадратне рівняння має корені різних знаків ($D > 0$ при всіх $a \in R$).

Відповідь. Якщо $a \in (-1;\ 0] \cup (1;\ +\infty)$, то корені додатні; якщо $a \in (-\infty;\ -1] \cup (0;\ 1]$, то корені мають різні знаки.

Задача 6. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $(a^2 - 2a - 3)x^2 - 2(a^2 - a - 6)x + a^2 + 6a + 8 = 0$ має дійсні корені, та визначити їхні знаки.

Розв'язання. Якщо $a^2 - 2a - 3 = 0$, тобто $a = -1$ або $a = 3$, то дістанемо два лінійних рівняння $8x + 3 = 0$, звідки $x = -\frac{3}{8}$, або $35 = 0$, що не має змісту.

Якщо ж $a^2 - 2a - 3 \neq 0$, тобто $a \neq -1$ і $a \neq 3$, то маємо квадратне рівняння з параметром виду $Ax^2 + Bx + C = 0$, для знаходження існування його дійсних коренів і визначення їхніх знаків зручно скористатися рівносильністю таких умов:

$$\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0, \\ B^2 - 4AC \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B \cdot A > 0, \\ C \cdot A > 0, \\ B^2 - 4AC \geq 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 \cdot x_2 > 0, \\ D \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{B}{A} < 0, \\ \frac{C}{A} > 0, \\ B^2 - 4AC \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -B \cdot A < 0, \\ C \cdot A > 0, \\ B^2 - 4AC \geq 0; \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A} < 0 \Leftrightarrow C \cdot A < 0. \qquad (3)$$

Маємо:

$$-B\cdot A=2\left(a^2-a-6\right)\left(a^2-2a-3\right)=2(a+2)(a+1)(a-3)^2,$$

$$C\cdot A=\left(a^2+6a+8\right)\left(a^2-2a-3\right)=(a+4)(a+2)(a-3)(a+1),$$

$$D=4\left(a^2-a-6\right)^2-4\left(a^2-2a-3\right)\left(a^2+6a+8\right)=$$

$$=-8(a+2)(a-3)(3a+5).$$

Отже, задане рівняння має дійсні корені $x_1=\dfrac{a^2-a-6-\sqrt{D}}{2\left(a^2-2a-3\right)}$ і $x_2=\dfrac{a^2-a-6+\sqrt{D}}{2\left(a^2-2a-3\right)}$, якщо $D=-8(a+2)(a-3)(3a+5)\geq 0$, тобто при $a\in(-\infty;-2]\cup\left[-\dfrac{5}{3};3\right]$.

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння додатні і $x_1<x_2$, якщо, згідно з зауваженням 1 (див. задачу 12), $A=(a+1)(a-3)>0$ і, згідно з (1),

$$\begin{cases}2(a+2)(a+1)(a-3)^2>0,\\(a+4)(a+2)(a+1)(a-3)>0,\\-8(a+2)(a-3)(3a+5)\geq 0,\end{cases}\text{ тобто при } a\in(-\infty;-4).$$

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння від'ємні і $x_2<x_1$, якщо, згідно з зауваженням (див. задачу 12), $A=(a+1)(a-3)<0$ і, згідно з (2),

$$\begin{cases}2(a+2)(a+1)(a-3)^2<0,\\(a+4)(a+2)(a+1)(a-3)>0,\\-8(a+2)(a-3)(3a+5)\geq 0,\end{cases}\text{ тобто при } a\in(-1;3).$$

Обидва корені x_1 і x_2 заданого рівняння різних знаків $x_1<0$, $x_2>0$ і $x_1<x_2$, якщо згідно з зауваженням 1 (див задачу 12),

$A=(a+1)(a-3)>0$ і, згідно з (3), $(a+4)(a+2)(a+1)(a-3)<0$, тобто при $a\in(-4;-2)$.

Аналогічно розглядається решта випадків.

Відповідь. Якщо $a\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{5}{3};3\right]$, то рівняння має дійсні корені $x_1=\dfrac{a^2-a-6-\sqrt{-8(a+2)(a-3)(3a+5)}}{2(a^2-2a-3)}$ і $x_2=\dfrac{a^2-a-6+\sqrt{-8(a+2)(a-3)(3a+5)}}{2(a^2-2a-3)}$; якщо $a\in(-\infty;-4)$, то $x_1+x_2>0$, $x_1\cdot x_2>0$, $A>0, x_1>0, x_2>0, x_1<x_2$; якщо $a=-4$, то $x_1+x_2>0$, $x_1+x_2=0, A>0, x_1=0, x_2>0, x_1<x_2$; якщо $a\in(-4;-2)$, то $x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0, A>0, x_1<0, x_2>0$, $x_1<x_2$; якщо $a=-2$, то $x_1+x_2=0, x_1\cdot x_2=0, A>0, x_1=0$, $x_2=0, x_1=x_2$; якщо $a\in\left(-2;-\frac{5}{3}\right)$, то рівняння дійсних коренів не має; якщо $a\in\left[-\frac{5}{3};-1\right)$, то $x_1+x_2<0, x_1\cdot x_2>0$, $A>0, x_1<0, x_2<0, x_1<x_2$; якщо $a=-1$, то рівняння лінійне, $x=-\frac{3}{8}$; якщо $a\in(-1;3)$, то $x_1+x_2>0, x_1\cdot x_2<0, A<0, x_1<0$, $x_2<0, x_2<x_1$; якщо $a=3$, то рівняння лінійне, розв'язків не існує; якщо $a\in(3;+\infty)$, то дійсних коренів не існує.

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ КОРЕНІВ ДВОХ КВАДРАТНИХ ТРИЧЛЕНІВ

Задача 7. Знайти всі значення параметра *a*, при яких рівняння $x^2-(2a-1)x+a=0$ і $(a+1)x^2-ax-1=0$ мають хоча б один спільний корінь.

Розв'язання. Якщо задані рівняння мають спільний корінь, то система

$$\begin{cases} x^2-(2a-1)x+a=0, \\ (a+1)x^2-ax-1=0 \end{cases}$$

мають той же корінь.

Помножимо обидві частини другого рівняння системи на a і додамо до першого. Дістанемо після скорочення на x, оскільки очевидно, що $x \neq 0$, рівняння

$$\left(a^2+a+1\right)x-\left(a^2+2a-1\right)=0.$$

Потім помножимо перше рівняння на $a+1$ і віднімемо його від другого. Дістанемо рівняння

$$\left(2a^2-1\right)x-\left(a^2+a+1\right)=0.$$

Оскільки x має задовольняти двом отриманим лінійним рівнянням, то для a має виконуватися співвідношення

$$\left(a^2+a+1\right)^2=\left(a^2+2a-1\right)\left(2a^2-1\right).$$

Потім отримуємо $a^4+2a^3-6a^2-4a=0$, або, після спрощень, $a(a-2)\left(a^2+4a+2\right)=0$, звідки $a_1=0, a_2=2,$

$a_3=-2-\sqrt{2}, a_4=-2+\sqrt{2}.$

Відповідь. $a_1=0, a_2=2, a_3=-2-\sqrt{2}, a_4=-2+\sqrt{2}.$

Зауваження. 1. Для кожного зі знайдених значень a необхідно переконатися, що відповідні рівняння мають розв'язки. (Достатньо перевірити існування коренів у одного з них). 2. Задану пару квадратних рівнянь можна розглядати як систему двох рівнянь з невідомими x і a.

Задача 8. При яких значеннях параметра a рівняння $(1-a)x^2+2x-4a=0$ і $ax^2-4x+4a=0$ рівносильні?

Розв'язання. Простіше всього з'ясувати, коли рівняння рівносильні, маючи порожню множину розв'язків кожного. Це має місце, коли дискримінант кожного з рівнянь від'ємний, тобто

$$\begin{cases} 1+4a(1-a)<0, \\ 4-4a^2<0, \end{cases} \begin{cases} 4a^2-4a-1>0, \\ a^2>1, \end{cases} \text{звідки}$$

$a \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}; +\infty \right).$

Припустимо тепер, що при деякому a рівняння рівносильні і хоча б одне з них має корінь x_0. Тоді x_0 є коренем і другого рівняння і мають місце рівності

$$\begin{cases} (1-a)x_0^2 + 2x_0 - 4a = 0, \\ ax_0^2 - 4x_0 + 4a = 0. \end{cases}$$

У нас вийшла система відносно x_0 і a. Додавши перше рівняння до другого, дістанемо рівняння $x_0^2 - 2x_0 = 0$, що не містить a. Звідси робимо висновок, що або $x_0 = 0$, або $x_0 = 2$. У першому випадку $a = 0$ і початкові рівняння набирають вигляду $x^2 + 2x = 0$ і $-4x = 0$. Зрозуміло, що ці рівняння не рівносильні, отже $a = 0$ не підходить.

Якщо $x_0 = 2$, то з першого рівняння системи знаходимо, що $a = 1$. При цьому вихідні рівняння мають вигляд $2x - 4 = 0$ і $x^2 - 4x + 4 = 0$. Кожне з них має єдиний корінь $x = 2$, тобто вони еквівалентні і $a = 1$ підходить.

Відповідь. $a \in (-\infty; -1) \cup (1+\sqrt{2}; +\infty)$, $a = 1$.

Задача 9. Розташувати корені рівнянь

$$x^2 + \frac{3}{a}x + 2a = 0 \text{ і } x^2 + \frac{12}{a}x - a = 0$$

у порядку зростання.

Розв'язання. Позначимо $f(x) = x^2 + \frac{3}{a}x + 2a$,

$g(x) = x^2 + \frac{12}{a}x - a$; α_1 і α_2 – корені рівняння $f(x) = 0$; β_1 і β_2 – корені рівняння $g(x) = 0$. За смислом задачі вимагається розглядати лише ті значення параметра a, для яких, обидва рівняння мають розв'язки. Умова невід'ємності обох дискримінантів дають нам нерівності $-\sqrt[3]{36} \le a < 0$, $0 < a \le \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$.

Знайдемо значення x, при яких $f(x)=g(x)$, $x=\frac{a^3}{3}$. Рівняння мають спільний корінь, якщо $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=0$, звідки $a=-3$.

Таким чином, множина значень параметра a, при яких обидва рівняння мають корені, розбито на три інтервали (рис. 1).

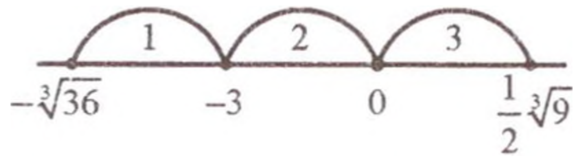

Рис. 1

Кінці інтервалів зручніше розглядати окремо. Виникають три випадки:

1. $-\sqrt[3]{36}<a<-3$. Маємо $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=a\left(a^3+27\right)>0$. З точністю до позначень, яка з двох парабол відповідає $f(x)$, а яка $g(x)$ можливі два випадки (рис. 2 і рис. 3).

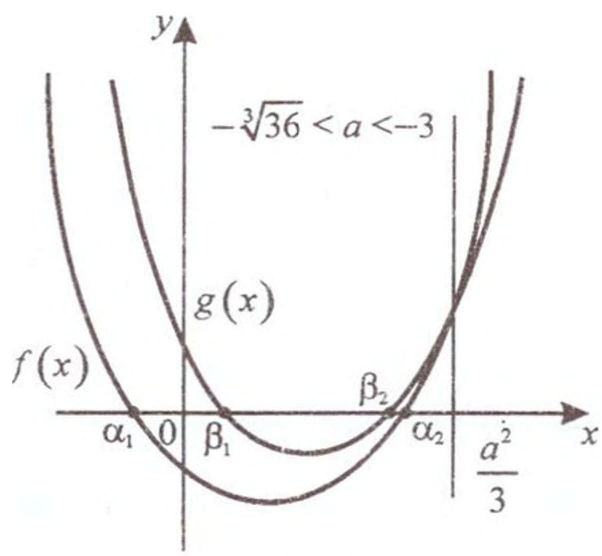

Рис. 2

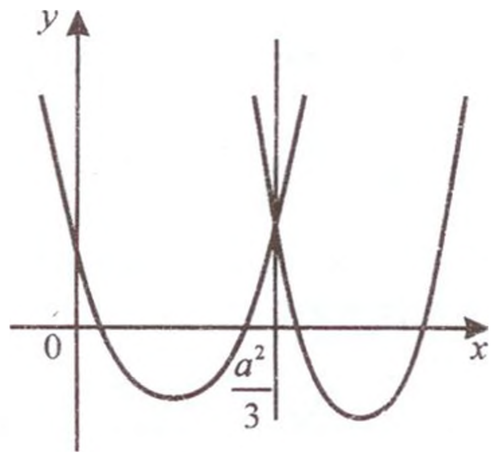

Рис. 3

Подивимося, як розташовані вершини кожної з парабол по відношенню до прямої $x=\frac{a^2}{3}$. Для $f(x)$ маємо $x_B=-\frac{3}{2a}$. На розглядуваному інтервалі зміни a маємо $-\frac{3}{2a}<\frac{a^2}{3}$ (доведіть). Вершина другої параболи також знаходиться лівіше від прямої $x=\frac{a^2}{3}$. (Перевірте правильність нерівності $-\frac{6}{a}<\frac{a^2}{3}$). Отже, має місце випадок, зображений на рис. 2. (На рис. 3 вершини парабол розташовані по різні боки від прямої $x=\frac{a^2}{3}$). Залишилося з'ясувати, яка з двох парабол на цьому рисунку відповідає $f(x)$, а яка $g(x)$.

Якщо $a<0$ і $x<\frac{a^2}{3}$, то $f(x)-g(x)=-\frac{9}{a}\left(x-\frac{a^2}{3}\right)<0$, тобто $f(x)<g(x)$. Отже, $g(x)$ при $x<\frac{a^2}{3}$ проходить вище $f(x)$ і $\alpha_1<\beta_1<\beta_2<\alpha_2$. Якщо $\alpha=-\sqrt[3]{36}$, то $\alpha_1<\beta_1=\beta_2<\alpha_2$.

2. $-3<a<0$. В цьому випадку $f\left(\frac{a^2}{3}\right)=g\left(\frac{a^2}{3}\right)=$ $=a\left(a^3+27\right)<0$. Як і в попередньому пункті, при

$x < \frac{a^2}{3}$ $f(x) < g(x)$, тобто графіки $f(x)$ і $g(x)$ розташовані так, як показано на рис. 4 і $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2$. Якщо $a = -3$, то $\alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 = \alpha_2$.

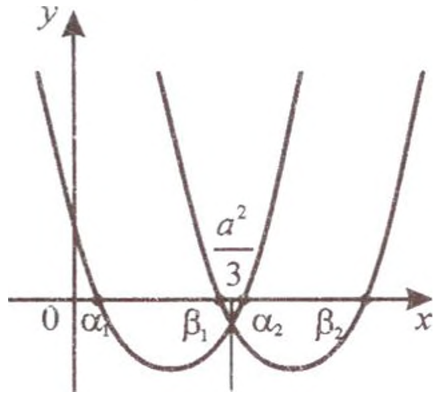

Рис. 4

3. $0 < a < \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$. Маємо $f\left(\frac{a^2}{3}\right) = g\left(\frac{a^2}{3}\right) > 0$. Обидві вершини знаходяться зліва від прямої $x = \frac{a^2}{3}$, і $f(x) > g(x)$ при $x < \frac{a^2}{3}$ (рис. 5). Отже, $\beta_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2$. Якщо $a = \frac{1}{2}\sqrt[3]{9}$, то $\beta_1 < \alpha_1 = \alpha_2 < \beta_2$.

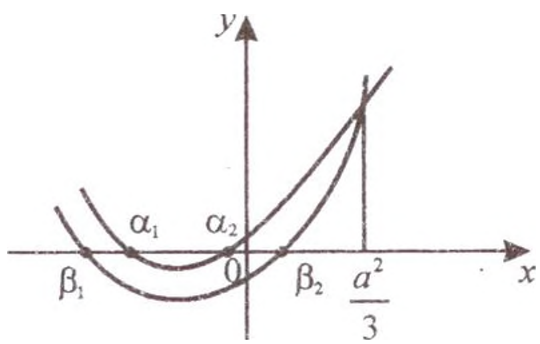

Рис. 5