https://doi.org/10.32405/2411-1309-2019-22-30-37

УДК 37.013.3

# ЗАСТОСУВАННЯ ДОПОМІЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ПІДРУЧНИКА З ГЕОМЕТРІЇ

**Михайло Бурда,**
доктор педагогічних наук, професор,
дійсний член НАПН України,
завідувач відділу математичної та інформатичної освіти
Інституту педагогіки НАПН України,
м. Київ, Україна,
**e-mail:** mibur5@ukr.net

У статті розкриваються суть допоміжних елементів та особливості їх застосування у розв'язуванні геометричних задач. Пропонується методика навчання застосовувати допоміжні геометричні фігури і параметри та її відображення у підручнику. Обґрунтовується доцільність формування способів розв'язання задач з орієнтацією на види допоміжних елементів та уточнення і узагальнення цих способів по мірі вивчення програмного матеріалу. Наводяться відповідні зразки задач та способів їх розв'язання.

**Ключові слова:** підручник; геометрія; допоміжні елементи; способи діяльності.

**Постановка проблеми.** Компетентнісний підхід передбачає реалізацію прикладної спрямованості змісту математики, яка забезпечить соціально ефективну математичну підготовку учнів. Прикладна спрямованість досягається включенням у зміст підручників задач практичного змісту (екологічного, економічного, валеологічного, фінансового, виробничого тощо). Успішне їх розв'язування потребує загальних вмінь розв'язувати відповідні математичні задачі. Одним із засобів вироблення таких умінь є задачі, розв'язання яких передбачає використання допоміжних елементів (безпосередньо не даних в умовах задач). Підручники з геометрії мають містити такі задачі, а їх методичний апарат сприяти навчанню учнів відшукувати і застосовувати допоміжні елементи. Це покращить вироблення загальних вмінь розв'язувати задачі, а отже, і набуття учнями математичної і ключових компетентностей.

**Аналіз останніх досліджень.** Методам і прийомам розв'язування геометричних задач присвячені дослідження В. Г. Бевз, М. Я. Ігнатенка, Ю. І. Мальованого, Н. А. Тарасенкової, В. О. Швеця та ін. Розв'язування задач з використанням допоміжних елементів розглядалися в роботах Ф. К. Благодира (допоміжні побудови), І. А. Кушніра (допоміжні лінійні елементи, кути, площі, об'єми), Г. М. Кирилецької (допоміжні фігури), В. Є. Куценка (допоміжні кола) та ін. Проте, методика навчання учнів використовувати допоміжні елементи в процесі розв'язання геометричних задач розроблена не достатньо повно.

**Мета статті** — розкрити можливості змісту і методичного апарату підручника з геометрії у навчанні застосовувати допоміжні елементи до розв'язування задач.

**Виклад основного матеріалу.** Розв'язання задачі зводиться до її переформулювання, яке полягає в зведенні задачі до раніше розв'язаних. Задачу послідовно замінюємо еквівалентами доти, поки не одержимо задачу, яку зможемо розв'язати. В процесі розв'язання співставляємо дані умови з висновком, намагаємося зблизити їх, включити умову і висновок в одне відношення. Все це передбачає заміну понять умови їх означеннями, виведення наслідків з умови, співвіднесення наслідків з вимогою задачі, отримання нової інформації з виведених наслідків. При переформулюванні умова і вимога варіюються (наприклад, апофема піраміди може бути медіаною або бісектрисою бічної грані). У результаті дістаємо такі дані умови: вихідні (задані безпосередньо), шукані (наслідки вихідних) і допоміжні (задані опосередковано).

Вміння знаходити і застосовувати допоміжні дані полегшує розв'язання задачі. Допоміжними даними або елементами можуть бути параметри (довжина відрізка, величина кута, площа, об'єм) або геометричні фігури (трикутник, рівні та подібні трикутники, коло) (табл. 1).

*Таблиця 1*

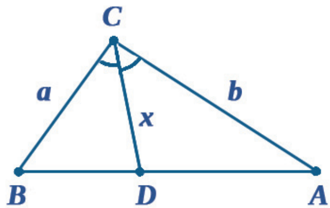
| Допоміжні елементи | |
|---|---|
| Параметри | Геометричні фігури |
| Довжина відрізка | Коло |
| Величина кута | Трикутник або ланцюг нерівних трикутників |
| Площа | Рівні трикутники |
| Об'єм | Подібні трикутники |

Застосовуючи при розв'язуванні задач допоміжні параметри, спочатку складаємо за їх допомогою рівняння чи систему рівнянь (іноді деяке співвідношення), де невідомим є шуканий елемент або елемент, за допомого якого можна знайти шуканий. Потім шляхом перетворень виключаємо допоміжний параметр і знаходимо шуканий елемент. Це дає можливість іноді значно спростити розв'язування задач.

*Площа або об'єм*, як допоміжний елемент, найчастіше застосовується так: спочатку площу чи об'єм деякої фігури виражаємо через дані й шукані величини двома різними способами, а потім прирівнюємо знайдені вирази. Одержуємо рівняння, з якого можна знайти шукану величину.

**Задача.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють $a$ і $b$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника, проведену з вершини прямого кута.

Розв'язання. Нехай $\Delta ABC$ — даний ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $AC = b$, $CD$ — бісектриса (мал.1). Позначимо $CD = x$ і знайдемо площу $\Delta ABC$ двома способами:




Мал 1

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab}{2}\ (1);$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}ax\sin 45° + \frac{1}{2}ax\sin 45° = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b)\ .\ (2).$$

Прирівнявши праві частини рівностей (1) і (2), одержимо рівняння:

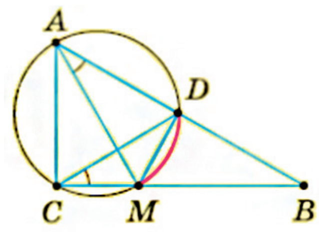
$$\frac{ab}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}(a+b)\text{. Звідси } x = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}\ /$$

*Допоміжний відрізок* зручно вводити, якщо є подібні фігури. Тоді за допомогою пропорцій складаємо рівняння. Якщо шукані чи задані елементи зручно виразити за допомогою тригонометричних функцій, то використовуємо *допоміжний кут.*

Успішне розв'язання багатьох задач залежить від уміння скористатися *допоміжним трикутником* (або ланцюгом нерівних трикутників). Шуканий елемент фігури розглядаємо як елемент деякого трикутника, який можна розв'язати. Відшукуємо на малюнку до задачі такий трикутник (або утворюємо його, провівши потрібні відрізки). Задача буде розв'язаною, якщо знайдений елемент цього трикутника задовольняє умову задачі. Якщо ні, то враховуючи знайдений елемент, відшукуємо на малюнку (чи будуємо) другий визначений трикутник. Якщо задачу задовольняє знайдений елемент другого трикутника, — вона розв'язана. В іншому випадку відшукуємо третій визначений трикутник і т. д. доти, поки не дістанемо такий трикутник, сторона чи кут якого є розв'язок задачі.

*Рівні допоміжні трикутники* використовуємо для обґрунтування рівності відрізків (кутів) — включаємо їх у рівні трикутники; якщо на малюнку таких трикутників немає, то будуємо їх. При доведенні метричних співвідношень, які містять рівності другого степеня, вводимо *подібні допоміжні трикутники*. Аналогічно застосовуємо *коло як допоміжний елемент:* на малюнку до задачі спочатку знаходимо геометричну фігуру, навколо якої можна описати або в яку можна вписати коло, а потім використовуємо властивості хорд, діаметрів, вписаних кутів, кутів з вершиною всередині кола та ін.

**Задача.** З довільної точки $M$ катета $BC$ прямокутного трикутника $ABC$ проведено перпендикуляр $MD$ до гіпотенузи AB (мал. 2). Доведіть, що $\angle MAD = \angle MCD$.




**Мал 2**

Розв'язання Навколо чотирикутника $ADMC$ можна описати коло, оскільки $\angle ACM + \angle ADM = 180°$. Тоді $\angle MAD = \angle MCD$ як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу $MD$.

У підручнику виділяються лінії розміщення задач за видами допоміжних елементів. Задачі кожної лінії розв'язуються аналогічними способами, а задачі всіх ліній мають спільні підходи до розв'язання. Тоді навчання розв'язувати такі задачі передбачає: формування способів розв'язання задач виділених ліній та уточнення і узагальнення цих способів по мірі вивчення програмного матеріалу. Чим змістовніше узагальнення способу розв'язання, тим він охоплює ширше коло задач. Ефективність навчання забезпечується систематизацією задач та поділом їх на змістові блоки за рівнями складності (специфіка включення допоміжних даних) і способами розв'язання. Навчання застосовувати допоміжні елементи передбачає: 1) розв'язання типової задачі, де використовуються всі операції способу діяльності; 2) виділення способу діяльності; 3) закріплення операції способу діяльності дібраними вправами; 4) уточнення або узагальнення способу діяльності в процесі навчання.

Розглянемо застосування рівних та подібних допоміжних трикутників.

Навчання розпочинається під час вивчення ознаки рівності трикутників (7 клас). Спочатку розв'язуються задачі, де потрібно обґрунтувати рівність трикутників, спираючись на певну ознаку їх рівності, та виділяється спосіб діяльності у вигляді порад. Наприклад:

*Щоб довести рівність двох трикутників: 1) виділіть їх на малюнку; 2) доведіть, що дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника; 3) зробіть висновок: трикутники рівні за першою ознакою.*

Потім розглядаються задачі на обґрунтування рівності відрізків (кутів), де рівні трикутники містяться на малюнку. Виділяється спосіб діяльності.

*Щоб довести рівність двох відрізків (кутів): 1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути); 2) доведіть, що трикутники рівні; 3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.*

Нарешті пропонуються задачі, де на малюнку слід побудувати рівні трикутники, провівши допоміжні лінії. Розв'язуючи задачі учні мають дійти висновків: 1) якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проводимо допоміжні відрізки, щоб їх утворити; 2) інколи потрібно розглянути кількох пар рівних трикутників.

Навчальні тексти підручника також мають містити поради, які стосуються окремих випадків. Наприклад.

*Якщо в умові задачі дано медіану, то іноді доцільно продовжити медіану на відрізок, що дорівнює їй, сполучити його кінець з кінцем сторони трикутника, до якого проведено медіану, та розглянути утворені трикутники.*

У дев'ятому класі рівні трикутники як допоміжні елементи, застосовуються при обґрунтуванні властивостей чотирикутників, розв'язуванні задач на обчислення та побудову. Далі цей спосіб діяльності узагальнюється — для обґрунтування рівності відрізків (кутів) залучаються властивості чотирикутників.

При вивченні ознак подібності трикутників учні знайомляться з використанням допоміжних подібних трикутників.

Спочатку розв'язуються задачі, де потрібно обґрунтувати подібність трикутників, скориставшись певною ознакою їх подібності, та виділяється спосіб діяльності. Наприклад:

*Щоб довести подібність двох трикутників: 1) виділіть їх на малюнку;2) доведіть рівність двох пар відповідних кутів; 3) зробіть висновок: трикутники подібні за двома кутами.*

Потім доводимо твердження:

Хорди кола $AB$ і $CD$ перетинаються в точці $O$. Доведіть, що $AO \cdot BO = CO \cdot DO$.

Пошук доведення:

1) припустимо, що рівність $AO \cdot BO = CO \cdot DO$ (1) справджується;

2) звідси випливає, що $AO : CO = DO : BO$ (2). Тому, щоб довести рівність (1), достатньо довести рівність (2);

3) з рівності (2) випливає, що трикутники зі сторонами $AO$, $DO$, $BO$, $CO$ подібні ($\angle AOD = \angle COB$ як вертикальні). На малюнку таких трикутників немає, тому їх утворюємо, сполучивши, наприклад, точки $A$ і $D$, $B$ і $C$;

4) спробуємо встановити їх подібність. Справді, трикутники $AOD$ і $COB$ подібні, оскільки $\angle DCB = \angle DAB$, $\angle ABC = \angle ADC$.

Доведення твердження дістанемо рухаючись у зворотному напрямі (від п. 4 до п. 1):

1) виділяємо на малюнку трикутники AOD і COB;

2) $AOD \sim COB$ ($\angle DCB = \angle DAB$, $\angle ABC = \angle ADC$);

3) з подібності цих трикутників випливає: $AO : CO = DO : BO$;

4) дістанемо $AO \cdot BO = CO \cdot DO$, що й потрібно довести.

Виділяються спільні для пошуку доведення кроки: 1) припустити правильність доводжуваної рівності та записати її у вигляді пропорції; 2) відшукати на малюнку або побудувати трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції; 3) обґрунтувати подібність цих трикутників. Виділені кроки закріплюються:

1. Записати дані пропорції у вигляді рівностей, що містять добуток довжин двох пар відрізків: $a : b = m : n$, $h : c = a : b$; записати рівності у вигляді пропорцій: $h^2 = a_c b_c$, $h \cdot c = a \cdot b$.

2. Виконайте необхідні побудови: а) у паралелограмі; б) у трапеції; в) у колі, щоб утворилися подібні трикутників. Складіть відповідні пропорції.

3. Висота прямокутного трикутника, опущена з вершини прямого кута, розбиває його на два трикутники. Обґрунтуйте подібність цих трикутників.

4. У гострокутному трикутнику проведено три висоти. Основи висот сполучено відрізками. Знайдіть подібні трикутники.

Складається загальний план доведення рівностей, що складаються з добутків двох пар відрізків (табл. 2).

*Таблиця 2*

| Пошук доведення | Доведення |
|---|---|
| 1. Припустіть правильність доводжуваної рівності | 1. Виділіть на малюнку потрібні трикутники |
| 2. Запишіть її у вигляді пропорції | 2. Обґрунтуйте їх подібність |
| 3. Відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції | 3.Складіть пропорції з відповідних сторін цих трикутників |
| 4. Обґрунтуйте подібність цих трикутників | 4. Дістаньте з пропорції рівність, яку треба довести |

Надалі цей план застосовуємо при доведенні тверджень. Наприклад:

1. З точки $M$ проведено січну, що перетинає коло в точках $A$ і $B$, і дотичну з точкою дотику $C$. Доведіть, що $MC^2 = MA \cdot MB$.

Сума кутів при одній з основ трапеції дорівнює 90°. Доведіть, що висота трапеції є середнім пропорційним між проекціями її бічних сторін на основу.

Учням, які навчаються на вищому рівні, пропонуються задачі, для розв'язання яких потрібно поєднувати розглянуті випадки застосування допоміжних трикутників.

Висновки. Навчальні тексти, системи вправ та методичний апарат підручника з геометрії рекомендує орієнтуватися на виробленні загальних умін розв'язувати задачі, зокрема умінні застосовувати допоміжні елементи. У підручнику виділяються лінії розміщення задач за видами допоміжних елементів. Задачі кожної лінії розв'язуються аналогічними способами, а задачі всіх ліній мають спільні підходи до розв'язання. Ефективність навчання забезпечується систематизацією задач та поділом їх на змістові блоки за рівнями складності (специфіка включення допоміжних даних) та способами розв'язання.

## Використані джерела


1. Бурда М. І. Геометрія: підручник для 7 класу загальноосвіт. навч. закладів / [М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова]. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. — 208 с.
2. Бурда М. І. Геометрія: підручник для 8 класу загальноосвіт. навч. закладів / [М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова]. — К.: УОВЦ «Оріон», 2016. — 224 с.
3. Бурда М. І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвіт. навч. закладів / [М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова]. — К.: УОВЦ «Оріон», 2017. — 240 с.


## References


1. Heometriia: pidruch. dlia 7 kl. zahalnosvit. navch. zakladiv (akademichnyitap rofi lnyirivni) / [M. I. Burda, N. A. Tarasenkova]. — K.: Vydavnychyidim «Osvita», 2015. — 208 s.
2. Heometriia: pidruch. dlia 8 kl. zahalnosvit. navch. zakladiv (akademichnyitap rofi lnyirivni) / [M. I. Burda, N. A. Tarasenkova]. — K.: UEPC «Orion», 2016. — 224 s.
3. Heometriia: pidruch. dlia 9 kl. zahalnosvit. navch. zakladiv (akademichnyitap rofi lnyirivni) / [M. I. Burda, N. A. Tarasenkova]. — K.: UEPC «Orion», 2017. — 240 s.



**Михаил Бурда,**

**доктор педагогических наук, профессор, действительный член НАПН Украины, заведующий отдела математического и информационного образования Института педагогики НАПН Украины, г. Киев, Украина**


## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ УЧЕБНИКА ПО ГЕОМЕТРИИ


Раскрываются сущность вспомогательных элементов и особенности их применения при решении планиметрических задач. Предлагается методика обучения применять вспомогательные геометрические фигуры и параметры и ее отображение в учебнике. Обосновывается целесообразность формирования способов решения задач с ориентацией на виды вспомогательных элементов, уточнение и обобщение этих способов при изучении геометрии. Даются примеры задач и рассматриваются приемы их решения. Уделяется внимание приемам использования вспомогательных треугольников, а также подготовительным упражнениям и специальным указаниям.



**Ключевые слова:** ученик; геометрия; вспомогательные элементы; способы деятельности.

**Mykhailo Burda,**
Full Member of the NAES of Ukraine, Doctor of Pedagogical Sciences,
Professor, Head of the Mathematical and Informative Education Department
of the Institute of Pedagogy of the NAES of Ukraine, Kyiv, Ukraine

## USE OF SUPPLEMENTARY ELEMENTS IN SOLVING TASKS OF GEOMETRY TEXTBOOK

Educational texts, the system of exercises and the methodical apparatus of the textbook on geometry are recommended to focus on the development of general skills to solve tasks, in particular the ability to use supplementary elements — parameters (length of a segment, size of angle, area, volume) or geometric figures (triangle, equal and similar triangles, circle). The essence of the supplementary elements and their application are revealed. It is proposed to allocate lines of tasks, not only according to their typology, but also by types of supplementary elements. The tasks of each line are solved in similar ways, and the tasks of all lines have common approaches to the solution. Teaching to solve tasks involves the formation of methods for solving the tasks of the allocated lines and refinement and generalization of these methods in process of studying of program material. The learning efficiency is ensured by systematization of a large number of tasks and their division into content units according to the complexity levels (the specifics of the inclusion of supporting data) and the methods of solution. The stages of learning are proposed to apply supplementary geometric figures and parameters, as follows: solving typical tasks, where all operations of the mode of operation are used; allocation of the way of activity; securing the operation of the way of activity by separate exercises; clarifying the way of activity in process of studying the material. The expediency of forming methods for solving tasks with an orientation on types of supplementary elements is substantiated. The corresponding examples of tasks and methods of their solution are given.

**Keywords:** student; geometry; supplementary elements; modes of operation.