

# УРОКИ PISA-2018. АНАЛІЗ ОПРИЛЮДНЕНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ З МАТЕМАТИЧНОЇ ГРАМОТНОСТІ УЧНІВ

Дарина ВАСИЛЬЄВА — старший науковий співробітник відділу математичної та інформатичної освіти Інституту педагогіки НАПН України, вчитель ліцею «Престиж»

**Р**ISA (Programme for International Student Assessment) — міжнародне дослідження, що за певною методикою оцінює учнів і на цій основі вивчає та порівнює якість освіти у різних країнах світу. Започатковане це дослідження в 1997 році Організацією з економічного співробітництва та розвитку (ОЕСР), а з 2000 року проводиться кожні три роки й охоплює учнів понад 80 країн світу. Для країн-учасниць можливі дві форми участі — комп'ютерна і паперова.

Дослідження PISA орієнтоване на визначення того, наскільки 15-річні підлітки (у цьому віці підлітки майже всіх країн світу закінчують обов'язковий цикл навчання у школі) можуть застосовувати набуті компетентності у життєвих ситуаціях, тобто наскільки конкретний учень зможе використати знання і уміння, що їх отримано в школі, у нестандартних ситуаціях. Перевіряється, наскільки в учнів розвинена здатність:

- до читання, розуміння й інтерпретації різноманітних текстів, з якими вони матимуть справу в повсякденному житті;
- до використання знань і умінь з математики у подоланні різноманітних життєвих викликів і проблем, пов'язаних із математикою;
- до використання знань і умінь з природничих наук для розв'язання різноманітних життєвих проблем, пов'язаних із певними науковими ситуаціями.

Кожного разу для дослідження обирають провідну галузь. У 2018 році у фокусі була читацька грамотність і серед 80 країн-учасниць вперше була і Україна. Разом з іншими 7 країнами (Румунія, Молдова, Йорданія, Республіка Північна Македонія, Ліван, Аргентина, Саудівська Аравія) в Україні використовувалася паперова версія тестів (завдання учням були подані на паперових бланках, які учні заповнювали вручну; перевірялися бланки теж вручну). Решта країн брали участь в електронній формі.

## Структура тестування та його організація

Всі завдання моніторингу 2018 року були поділені на кластери (сукупність завдань): 9 кластерів з читання, 3 кластери з математики, 3 кластери з

© Васильєва Д. В., 2020

природничих наук. Кожен учень отримував один набір з чотирьох кластерів, завдання яких він мав виконати за 2 години. Кожен кластер був присвячений вимірюванню однієї з грамотностей (математичної, читацької чи грамотності у природничих науках). У кожного учня був свій набір кластерів, який подавався у вигляді зошита. Підготували і використали 30 різних варіантів зошитів. Моніторинг PISA оцінює продуктивність системи освіти певної країни, а не конкретних учнів, саме тому немає необхідності в однакових завданнях для кожного учня.

Оскільки у фокусі PISA в 2018 році була читацька грамотність, то в кожному зошиті був не менше ніж один кластер з читацької грамотності. В деяких зошитах не було жодного кластеру з математики, а в деяких їх було аж два. Кожен кластер з математики мав різну кількість завдань (орієнтовно 12 — 15).

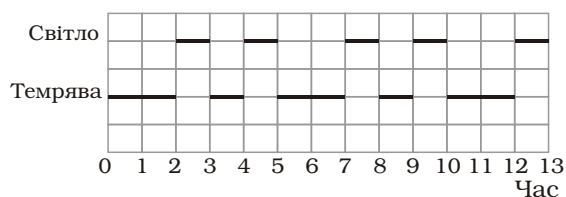
Деякі особливості завдань і їх оцінювання подано в статті М. В. Головка та Науменко С. О., фрагмент якої подамо далі. «Кожен кластер складається із окремих завдань, кожне з яких має власну назву (наприклад, «Оголошення в супермаркеті», «Продаж музичних дисків» та ін.) та містить текст або уривок тексту, який представляє реальну життєву ситуацію або розкриває зміст певної проблеми, та 1 — 6 запитань різної складності. За результатами відповідей оцінюються чотири когнітивні рівні засвоєння учнями навчального матеріалу: знання, розуміння, застосування в подібній і зміненій ситуаціях, застосування в новій ситуації. Аналізується здатність учнів розуміти проблему, описану в тексті, та вирішити її, застосовуючи знання, вміння та навички з тієї або іншої предметної галузі» [9].

У тестуванні використовувалися відкриті і закриті запитання та завдання.

Наприклад, група запитань і завдань «**МАЯК**».

Маяк — це вежа з ліхтарем угорі, що допомагає вночі кораблям знайти шлях під час плавання поблизу берега. Він випускає світлові сигнали в регулярній послідовності. У кожного маяка своя власна послідовність сигналів. На малюнку 1 нижче показана послідовність сигналів одного маяка. Спалахи світла чергуються з періодами темряви. Це регулярна послідовність.

Через деякий час послідовність повторюється. Час повної послідовності, що повторюється, називається періодом. Якщо знайти період послідовності, можна легко побудувати схему для проміжків часу тривалістю в секунди, хвилини або навіть години.



Мал. 1

**Запитання 1.** Які з наступних періодів можуть відповідати послідовності цього маяка?

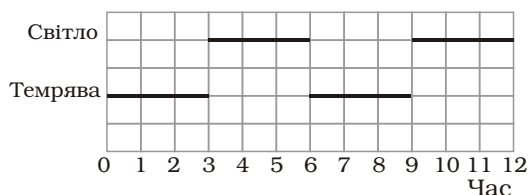
- A.** 2 секунди;      **B.** 3 секунди;  
**C.** 5 секунд\*;      **D.** 12 секунд.

**Запитання 2.** Скільки секунд маяк випромінює світлові сигнали впродовж однієї хвилини?

- A.** 4; **B.** 12; **C.** 20; **D.** 24\*.

**Завдання 3.** Побудуйте на поданій нижче сітці графік можливої послідовності світлових сигналів маяка, що світить упродовж 30 секунд кожну хвилину. Період цієї послідовності має дорівнювати шести секундам.

**Відповідь до завдання 3.** Малюнок 2.



Мал. 2

Інший приклад завдання подамо, щоб розкрити методику оцінювання правильності виконання завдань.

#### «ПРОКАТ DVD»

Галина працює в магазині, де можна взяти напрокат DVD-диски та комп'ютерні ігри. З магазином можна укласти договір і брати напрокат диски та ігри за пільговими цінами. Вартість внеску за укладення договору на рік становить 10 зедів. Ціни за прокат DVD-дисків для клієнтів, які уклали договір, та для клієнтів без договору наведено в таблиці:

Для клієнтів без договору (плата за один DVD-диск)	Для клієнтів із договором (плата за один DVD-диск)
3,20 зеда	2,50 зеда

**Завдання 2.** Яку мінімальну кількість DVD-дисків треба взяти напрокат клієнтам, які уклали договір, щоб окупити ті кошти, які вони витратили на укладення договору? Обґрунтуйте свою відповідь.

Кількість DVD-дисків: \_\_\_\_\_

#### Оцінювання відповідей на завдання 2

##### Відповідь зараховано повністю

Код 21: 15. Алгебраїчне розв'язання з правильним обґрунтуванням.

- $3,20x = 2,50x + 10$ ;
- $0,70x = 10$ ;
- $x = 10 : 0,70 = 14,2$  (приблизно);

АЛЕ відповідь має бути цілим числом: 15 дисків.

•  $3,20x > 2,50x + 10$  [Наведено міркування, аналогічні тим, які є в попередньому розв'язанні].

Код 22: 15. [Арифметичне розв'язання з правильним обґрунтуванням].

• Клієнт, який уклав договір, заощадить 0,70 зеда. Але він уже заплатив 10 зедів за укладання договору, тому йому треба принаймні повернути ці 10 зедів:

$10 : 0,7 = 14,2\dots$  Отже, треба взяти хоча б 15 дисків.

Код 23: 15. Використано метод спроб і помилок: учень знаходить суму грошей, яку витратить за прокат певної кількості дисків клієнт, що уклав договір, та суму грошей, яку витратить клієнт без договору, і систематично використовує це для знаходження правильної відповіді.

• 10 дисків = 32 зеди для клієнта без договору і 25 зедів + 10 зедів = 35 зедів для клієнта, який уклав договір.

Значить треба брати більше 10 дисків. За 15 дисків клієнт, який уклав договір, заплатить  $15 \cdot 2,5 + 10 = 47,50$  зеда, а без договору —  $3,2 \cdot 15 = 48$  зедів. Перевіримо для 14 дисків: з договором витратимо  $14 \cdot 2,5 + 10 = 45$  зедів, а без договору  $14 \cdot 3,2 = 44,8$  зеда. Отже, економія коштів починається з 15 дисків.

Код 24: Інші правильні міркування, які приведуть до правильної відповіді — 15 DVD-дисків.

##### Відповідь зараховано частково

Код 11: 15. Міркувань і розрахунків не наведено.

Код 12: Правильні обчислення, але неправильне округлення або без округлення для врахування контексту.

Код 21: 15. Алгебраїчне розв'язання з правильним обґрунтуванням.

- $3,20x = 2,50x + 10$ ;
- $0,70x = 10$ ;
- $x = 10 : 0,70 = 14,2$  (приблизно)

АЛЕ відповідь має бути цілим числом: 15 дисків.

•  $3,20x > 2,50x + 10$  [Наведено міркування, аналогічні тим, які є в попередньому розв'язанні].

- 14;
- 14,2;
- 14,0;
- 14,28 ...

Таблиця 1

## Статистика до завдання 2 «Прокат DVD»

Завдання попередніх циклів, що було оприлюднене (завдання-приклад)			Завдання, що було використане в циклі PISA-2018 (завдання-аналог)			
Номер завдання	Рік циклу	Середня складність (P-value) по ОЕСР у попередніх циклах, %	Номер завдання	Рік циклу	Середня складність (P-value) по ОЕСР у попередніх і поточному циклах, %	Складність (P-value) по Україні в циклі 2018 р., %
PM977Q02 <sup>100</sup>	2000		PM906Q02	2000		46,6
	2003			2003		
	2006			2006		
	2009			2009		
	2012			2012	42,12 <sup>101</sup>	
	2015			2015	39,53 <sup>102</sup>	
	2018			2018		

**Відповідь не зараховано**

Код 01: Інші відповіді.

Код 99: Відповіді немає.

У дослідженні PISA кожне завдання ретельно готується, щоб забезпечити відповідність меті тестування та адаптувати для різних мов і культур. Крім того, за результатами виконання тестів збираються та систематизуються певні статистичні дані для кожного завдання. У таблиці 1 подано статистику до розглянутого вище завдання.

Як бачимо, оцінювання результатів здійснюється досить демократично (лояльно). Учень може використати будь-який спосіб розв'язання, включаючи міркування побудовані на методі перебору чи повної індукції. Значна увага приділяється врахуванню всіх умов завдання та правильній інтерпретації отриманих результатів.

«Методика оцінювання тестів передбачає, що учні за виконання кожної групи завдань (з читання, математики і природознавства, фінансової грамотності) отримують від 1 до 1000 балів. Кожному завданню також відповідає певний бал, що характеризує його складність за цією ж шкалою. Бал залежить від того, наскільки успішно було виконано завдання всіма учасниками тестування. З метою змістовної інтерпре-

тації отриманих результатів бали шкалюються разом зі складністю завдань. Тобто за балами кожного учасника тестування можна проаналізувати, на які найскладніші завдання він дав відповіді. Середній бал по країні відповідно демонструє, які найскладніші завдання виконав середній учень цієї країни» [9].

З іншими прикладами завдань можна ознайомитися за посиланнями [12], [18].

Під час тесту можна було користуватися лише калькулятором, а виходити з аудиторії учень міг лише в супроводі спостерігача. Перевіряли тестові зошити українські педагоги, які попередньо пройшли триетапне навчання. Тестування пройшли понад 6 тисяч учнів із 250 закладів освіти по всій Україні. [19].

### Результати вимірювання рівня математичної грамотності українських 15-річних учнів

Вимірники PISA перевіряють не наявні знання з математики у 15-річних учнів, а саме вміння застосувати набуті знання та вміння до розв'язування життєвих проблем, тобто математичну грамотність учнів. Результати вимірювання рівня математичної грамотності 15-річних учнів різних країн у 2018 році подано у таблиці 2.

Таблиця 2

## Успішність учнів/студентів з математики у балах PISA за країнами/економіками

	Шкала з математики							
	Середня оцінка	95 % довірчий інтервал	Діапазон рейтингів					
			Країни ОЕСР		Всі країни / економіки		Країни / економіки, які проводили в комп'ютерній формі	
			Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг
П-Ш-Ц-Г (Китай)	591	586 – 596			1	1	1	1
Сингапур	569	566 – 572			2	2	2	2
Макао (Китай)	558	555 – 561			3	4	3	4
Гонконг (Китай)	551	545 – 557			3	4	3	4
Китайський Тайбей	531	525 – 537			5	7	5	7

	Шкала з математики							
	Середня оцінка	95 % довірчий інтервал	Діапазон рейтингів					
			Країни ОЕСР		Всі країни / економіки		Країни / економіки, які проводили в комп'ютерній формі	
			Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг
Японія	527	522 – 532	1	3	5	8	5	8
Корея	526	520 – 532	1	4	5	9	5	9
Естонія	523	520 – 527	1	4	6	9	6	9
Нідерланди	519	514 – 524	2	6	7	11	7	11
Польща	516	511 – 521	4	8	9	13	9	13
Швейцарія	515	510 – 521	4	9	9	14	9	14
Канада	512	507 – 517	5	11	1	16	10	16
Данія	509	506 – 513	6	11	11	16	11	16
Словенія	509	506 – 512	7	11	12	16	12	16
Бельгія	508	504 – 513	7	13	12	18	12	18
Фінляндія	507	503 – 511	7	13	12	18	12	18
Швеція	502	497 – 508	10	19	15	24	15	24
Велика Британія	502	497 – 507	10	19	15	24	15	24
Норвегія	501	497 – 505	11	19	16	24	16	24
Німеччина	500	495 – 505	11	21	16	26	16	26
Ірландія	500	495 – 504	12	21	17	26	17	26
Чехія	499	495 – 504	12	21	17	26	17	26
Австрія	499	493 – 505	12	23	17	28	17	28
Латвія	496	492 – 500	15	23	20	28	20	28
Франція	495	491 – 500	15	24	20	29	20	29
Ісландія	495	491 – 499	16	24	21	29	21	29
Нова Зеландія	494	491 – 498	18	24	22	29	22	29
Португалія	492	487 – 498	18	26	23	31	23	31
Австралія	491	488 – 495	20	25	25	31	25	31
Російська Федерація	488	482 – 494			27	35	27	35
Італія	487	481 – 492	23	29	28	35	28	35
Словацька Республіка	486	481 – 491	23	29	28	35	28	35
Люксембург	483	481 – 486	25	29	31	36	31	36
Іспанія	481	479 – 484	26	31	32	37	32	37
Литва	481	477 – 485	26	31	32	37	32	37
Угорщина	481	477 – 486	26	31	31	37	31	37
США	478	472 – 485	27	31	32	39	32	39
Білорусь	472	467 – 477			37	40	37	40
Мальта	472	468 – 475			37	39	37	39
Хорватія	464	459 – 469			39	41	40	41
Ізраїль	463	456 – 470	32	32	39	42	39	41
Туреччина	454	449 – 458	33	34	42	46	42	45
Україна	453	446 – 460			41	46		
Греція	451	445 – 457	33	34	42	46	42	45
Кіпр	451	448 – 453			42	46	42	45
Сербія	448	442 – 454			42	47	42	46
Малайзія	440	435 – 446			46	50	45	49
Албанія	437	432 – 442			47	51	46	49
Болгарія	436	429 – 444			47	53	46	51
Об'єднані Арабські Емірати	435	431 – 439			47	51	46	50
Бруней-Даруссалам	430	428 – 432			50	53	49	51
Румунія	430	420 – 440			47	56		
Чорногорія	430	427 – 432			50	53	49	51

	Шкала з математики							
	Середня оцінка	95 % довірчий інтервал	Діапазон рейтингів					
			Країни ОЕСР		Всі країни / економіки		Країни / економіки, які проводили в комп'ютерній формі	
			Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг	Вищий рейтинг	Нижчий рейтинг
Казахстан	423	419 – 427			53	57	52	54
Молдова	421	416 – 425			54	59		
Баку (Азербайджан)	420	414 – 425			54	60	52	57
Таїланд	419	412 – 425			53	60	52	57
Уругвай	418	413 – 423			54	60	52	57
Чилі	417	413 – 422	35	35	55	60	53	57
Катар	414	412 – 417			58	61	55	58
Мексика	409	404 – 414	36	36	60	63	57	60
Боснія і Герцеговина	406	400 – 412			61	65	58	61
Коста-Ріка	402	396 – 409			61	66	58	62
Перу	400	395 – 405			62	67	59	62
Йорданія	400	393 – 406			62	68		
Грузія	398	392 – 403			63	68	60	63
Республіка Північна Македонія	394	391 – 398			65	69		
Ліван	393	386 – 401			63	69		
Колумбія	391	385 – 397	37	37	66	70	62	64
Бразилія	384	380 – 388			69	70	64	65
Аргентина	379	374 – 385			70	73		
Індонезія	379	373 – 385			70	73	64	65
Саудівська Аравія	373	367 – 379			71	74		
Марокко	368	361 – 374			73	75	66	67
Косово	366	363 – 369			74	75	66	67
Панама	353	348 – 358			76	77	68	69
Філіппіни	353	346 – 359			76	77	68	69
Домініканська Республіка	325	320 – 330			78	78	70	70

Варто зазначити, що паперовий варіант є не настільки деталізований як комп'ютерний, тож пропонуємо порівняти результати успішності з математики учнів з України з результатами успішності учнів інших 7 країн, які також брали участь у дослідженні PISA в паперовій формі. Як свідчать дані таблиці 3, серед цих країн Україна займає перше місце.

Таблиця 3

**Успішність з математики учнів, що брали участь у дослідженні PISA в паперовій формі**

Країна	Кількість балів
<b>Україна</b>	<b>453</b>
Румунія	430
Молдова	421
Йорданія	400
Республіка Північна Македонія	394
Ліван	393
Аргентина	379
Саудівська Аравія	373

Якщо ж розглядати загальний рейтинг, то є сенс порівнювати Україну з референтними

країнами (подібність соціально-економічних станів, культурна чи історична спорідненість країн), а саме: Білорусь, Грузія, Естонія, Молдова, Польща, Угорщина та Словацька Республіка. Результати цих країн подано у таблиці 4.

Таблиця 4

**Успішність з математики учнів з країн, референтних до України**

Країна	Кількість балів
Естонія	523
Польща	516
Словацька Республіка	486
Угорщина	481
Білорусь	472
<b>Україна</b>	<b>453</b>
Молдова	421
Грузія	398

Слід звернути увагу на той факт, що у більшості названих вище країн немає значних відмінностей між результатами учнів у різних предметних галузях. Про це свідчить діаграма «Успішність учнів/студентів у читанні, мате-

матиці та природничо-наукових дисциплінах», подана на мал. 3.



Джерело: База даних PISA-2018

Мал. 3

Лише у трьох країнах — Грузія, Словацька Республіка та Україна — простежується

суттєвий розрив між успішністю учнів з математики й іншими галузями. Успішність учнів Словацької Республіки з читання та природничо-наукових дисциплін досить близькі до аналогічних даних в Україні. А от успішність з математики учнів зі Словацької Республіки суттєво перевищує їх успішність з природничо-наукових дисциплін, у той час як успішність з математики учнів з України нижча за їх показники в природничо-наукових дисциплінах.

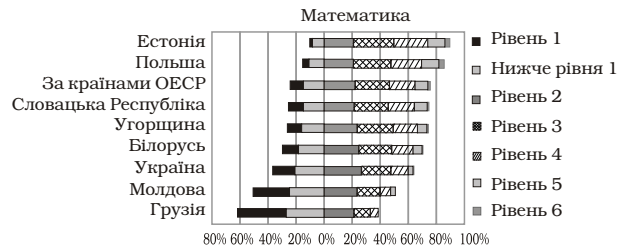
Для кращого усвідомлення результатів успішності учнів з математики за дослідженням PISA, визначення напрямів покращення ситуації та шляхів підготовки до участі в наступних дослідженнях пропонуємо розглянути рівні сформованості математичної грамотності учнів (таблиця 5), які виокремлюються в дослідженні PISA.

Таблиця 5

### Рівні сформованості математичної грамотності в дослідженні PISA

Рівень	Нижня межа балів	Характеристики завдань
6	669	У завданнях цього рівня учні / студенти можуть осмислювати, узагальнювати та використовувати інформацію на основі своїх досліджень та моделювати складні проблемні ситуації, використовуючи свої знання в нетипових контекстах. Вони можуть використовувати різні джерела інформації та гнучко оперувати ними. На цьому рівні учні / студенти здатні демонструвати високий рівень математичного мислення й міркувань. Разом з оперуванням математичними символами та формальними математичними операціями й відношеннями вони здатні розробляти нові підходи та стратегії для розв'язування нестандартних задач. Учні / студенти на цьому рівні можуть обмірковувати, формулювати й точно обґрунтовувати свої дії та міркування щодо своїх висновків, інтерпретацій, аргументів, а також пояснювати доречність їх використання в певній ситуації
5	607	У завданнях цього рівня учні/студенти можуть розробляти моделі складних проблемних ситуацій та працювати з ними, виявляти їхні обмеження й робити припущення щодо них. Вони можуть обирати, порівнювати й оцінювати відповідні стратегії розв'язування складних задач, які відповідають цим моделям. Учні / студенти на цьому рівні можуть цілеспрямовано працювати із задачею, використовуючи добре розвинені вміння мислити й міркувати, застосовуючи відповідні форми представлення інформації, використовуючи власну інтуїцію та описуючи розглядувану ситуацію формально або за допомогою символів. Вони розмірковують про способи розв'язування задачі та можуть формулювати й повідомляти свої інтерпретації й міркування
4	545	У завданнях цього рівня учні / студенти можуть ефективно працювати з детальними моделями складних конкретних ситуацій, які можуть мати певні обмеження або потребують установлення певних припущень. Вони можуть відбирати й інтегрувати інформацію, представлену в різних формах, зокрема у символічній, безпосередньо пов'язуючи її з різними аспектами реального світу. Учні / студенти на цьому рівні можуть користуватися обмеженим діапазоном своїх умінь та можуть міркувати, виявляючи певну інтуїцію в нескладних ситуаціях. Базуючись на власних інтерпретаціях, аргументах і діях, вони можуть вибудовувати й наводити свої пояснення стосовно способу розв'язування задачі
3	482	У завданнях цього рівня учні / студенти можуть виконувати чітко описані процедури, зокрема й ті, що потребують послідовного прийняття рішень. Вони можуть достатньо чітко інтерпретувати дані та створювати прості моделі для вибору й застосування простих стратегій розв'язування задачі. Учні / студенти на цьому рівні можуть інтерпретувати та використовувати різні форми представлення інформації з різних джерел і міркувати, безпосередньо спираючись на неї. Вони, зазвичай, демонструють певну здатність оперувати процентами, звичайними й десятковими дробами та працювати з пропорційними залежностями. Наведені ними відповіді свідчать про здатність надавати елементарну інтерпретацію отриманих результатів і проводити міркування
2	420	У завданнях цього рівня учні / студенти можуть інтерпретувати й розпізнавати ситуації в контекстах, які не потребують більшого, ніж прямих умовиводів. Вони можуть видобувати відповідну інформацію з одного джерела й використовувати інформацію, представлену лише в одній формі. Учні / студенти на цьому рівні можуть застосувати базові алгоритми, формули або правила для розв'язування задач, у яких доводиться мати справу з натуральними числами. Вони здатні буквально інтерпретувати результати
1	358	У завданнях цього рівня учні / студенти можуть відповідати на запитання, у яких використовується знайомий їм контекст, де всю необхідну інформацію наведено, а саме запитання чітко сформульоване. Вони здатні знаходити інформацію та виконувати прості процедури відповідно до прямих вказівок у явно описаних ситуаціях. Вони можуть виконувати дії, які майже завжди очевидні й безпосередньо впливають з умови

Рівні сформованості математичної грамотності учасників PISA (референтних до України) можна проаналізувати за діаграмою, поданою на малюнку 4.



Мал. 4

Найкращі результати показує Естонія — лише 10 % учнів не досягли базового рівня.

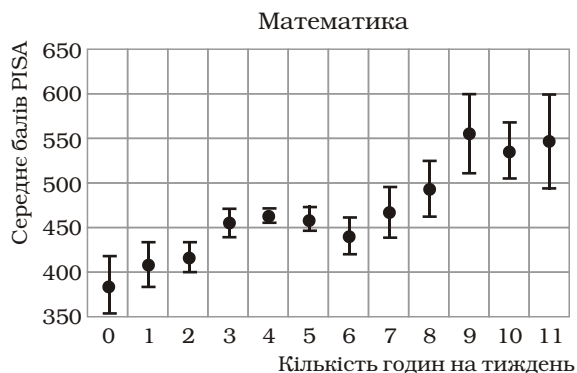
Що стосується України, то, як свідчить діаграма, приблизно 15,6 % учнів мають рівень нижче першого, орієнтовно ще 20,3 % мають перший рівень. Тобто, приблизно 36 % учнів не досягли базового рівня і не можуть «створювати прості моделі для вибору й застосування простих стратегій розв'язування задачі».

Середній рівень математичної грамотності українських учнів відповідає другому рівню (453 бали). Такі учні здатні розв'язувати задачі в ситуаціях, що допускають прямі умовиводи, можуть використовувати інформацію з одного джерела, представлену в одній формі.

Значну увагу в дослідженні PISA приділено вивченню чинників, що впливають на успішність навчання учнів.

#### Кількість годин на вивчення математики

Встановлена залежність між кількістю годин, що відводиться на вивчення математики, і успіхами країн-учасниць у моніторингах PISA. Зазвичай, найкращі успіхи (переважно в діапазоні 500-600 балів) показують країни, в яких кількість годин, що відводиться на вивчення математики складає понад 9 годин на тиждень. Про це свідчать дані діаграми, поданої на малюнку 5.



Мал. 5

Слід зазначити, що кількість годин, що відводиться на вивчення математики за тиждень, на цій діаграмі встановлені на основі анкету-

вання учнів, а не за офіційними даними. Саме тому на діаграмі можемо побачити і 0 годин з математики.

Якщо ж аналізувати офіційну інформацію про кількість годин на тиждень, то можемо порівняти:

- результати трьох країн:

Таблиця 6

#### Співвідношення кількості балів у дослідженні PISA та кількості годин математики на тиждень

Кількість балів	Країна	5 – 6 класи	7 – 9 класи
488	Росія	5 – 6 годин	5 – 6 годин
472	Білорусь	5 год	4 – 5 годин
453	Україна	4 год	4 год

- результати референтних країн:

За виключенням Естонії (від 8 до 14 годин на тиждень) та Білорусії (4-5 годин на тиждень), референтні для України країни мають 4 години на тиждень з математики. Але в Польщі, Словачкій Республіці і Угорщині довша тривалість навчального року, тож, більша сумарна кількість годин, що відводиться на вивчення математики.

**За висновками PISA кожна додаткова година уроків збільшує середній бал учнів приблизно на 10 балів [12].**

В Україні продовж більше 15 років на вивчення математики в 5 – 9 класах відводилося 4 години. Під час громадських обговорень неодноразово піднімалось питання про збільшення кількості годин в 5 – 11 класах, що відводяться на вивчення математики. Але це ніяким чином не вплинуло на нормативні документи.

Враховуючи, що PISA показала проблеми в оперуванні учнями звичайним дробами, десятковими дробами та відсотками (матеріал 5 – 6 класів), то критично важливим є збільшення кількості годин, що відводиться на вивчення математики в 5 – 6 класах. Саме в 5 – 6 класах закладається база, тож збільшення годин створить міцне підґрунтя для ефективного і свідомого вивчення математики в подальшому.

#### Змістовий компонент стандартів (програми)

Математичний зміст завдань PISA можна розділити на чотири категорії:

- зміни й залежності (алгебра);
- простір і форма (геометрія);
- кількість (арифметика);
- невизначеність і дані (теорія ймовірності й статистики).

На кожному з цих категорій припадає приблизно 25 % всіх можливих балів за завдання з математики.

Можна проаналізувати і теми, знання з яких знадобилися учням для розв'язування задач:

- Числа (цілі і дробові, вміння оперувати звичайними дробами, десятковими дробами; ірраціональні тощо).

- Відсотки.

- Відношення і пропорції.

- Вимірювання та знаходження величин (кількісне визначення характеристик фігур та об'єктів, наприклад, вимірювання кутів, довжин відрізків, відстаней, периметрів, довжин кіл, площ й об'ємів геометричних фігур, співвідношення між одиницями вимірювання).

- Система координат (представлення й опис даних, їх розташування й залежності між ними).

- Елементи комбінаторики (теорії ймовірностей, статистики).

- Наближені обчислення (наближені оцінювання кількостей і значень числових виразів, включаючи значущі цифри й округлення).

- Алгебраїчні вирази (словесна інтерпретація та перетворення алгебраїчних виразів, що включають числа, символи, арифметичні операції, степені й корені).

- Рівняння, нерівності та розв'язування текстових задач за допомогою них (лінійні рівняння й нерівності та ті, що зводяться до них; прості квадратні рівняння; аналітичні й неаналітичні методи розв'язання).

- Функції та їх графіки (переважно увагу приділено лінійним функціям, їх властивостям, різним формам їх опису й задання).

- Плоскі й об'ємні геометричні фігури, зв'язок між ними та між їхніми елементами: співвідношення між елементами фігур (наприклад, теорема Піфагора для прямокутного трикутника), взаємне розташування, подібність і конгруентність, динамічні відношення, пов'язані з перетворенням і рухом фігур, а також відповідність між плоскими та об'ємними фігурами.

Нагадаємо, що з 2003 року програми з математики в Україні постійно змінюються. В 2003 році з програми з математики були вилучені Наближені обчислення, а в 2012 році були вилучені теми:

- **5 клас** «Величини».

- **7 клас** «Лінійні рівняння». До 2012 року вивчення Алгебри у 7 класі розпочиналось з 9 годин актуалізації знань учнів про лінійні рівняння. Особлива увага в цій темі приділялась процесам моделювання, де лінійні рівняння розглядались як моделі прикладних задач. Тобто, у вчителя була можливість показати зв'язок математики з життям і познайомити учнів з таким процесом як моделювання.

- **9 клас** Навчальна тема «Елементи прикладної математики» замінено на «Елементи комбі-

наторики, теорії ймовірностей та статистики» і відповідно вилучено теми «Математичне моделювання», «Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків». Відтак, учні знайомляться з темою відсотки лише в 5 і 6 класах і більше до неї не повертаються.

У 2015 році на вимогу Міністерства освіти і науки програми з математики за 2012 рік були розвантажені. З програм було вилучено:

- **5 клас** «Комбінаторні задачі», «Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь».

- **6 клас** «Ймовірність випадкової події», «Циліндр. Конус. Куля».

- **8 клас** «Множина. Підмножина. Числові множини».

- **9 клас** зменшено з 10 до 8 годин на вивчення теми «Елементи комбінаторики, теорії ймовірностей та статистики». З теми «Числові послідовності» вилучено «Нескінченна геометрична прогресія та її сума».

Тему «Початкові відомості з стереометрії» повністю знято з програми за 9 клас. Тобто, учні в 5 класі вивчають прямокутний паралелепіпед та куб (а саме — мають уявлення як вони виглядають, вміють знаходити об'єм, площу поверхні і суму довжин усіх ребер); піраміду (мають уявлення як вона виглядає і скільки ребер, вершин і граней має), а з 6 до 9 класу вивчають лише плоскі фігури. Тобто, у вчителів навіть немає можливості (враховуючи малу кількість годин) розвивати просторове мислення учнів і розв'язувати окремі види прикладних стереометричних задач, що пропонуються в дослідженнях PISA.

Якщо підсумувати, то з 2012 року послаблювалася прикладна направленість математики, наприклад, з програми зникли взагалі в 9 класі «Математичне моделювання. Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків», крім того зменшилась кількість годин на статистику, комбінаторику та теорію ймовірності, яка тепер вивчається лише в кінці 9 класу без попередньої пропедевтики. З 2015 року в програмі відсутні «Початкові відомості з стереометрії».

15-річні учні, що писали PISA в 2018 році якраз вивчали математику за програмами 2012 та 2015 років. Тож, у них були труднощі в розв'язуванні: комбінаторні задачі, задачі на ймовірність, задач, в яких від об'ємних фігур треба було перейти до плоских тощо.

У 2017 році Навчальні програми з математики були оновлені, додано наскрізні лінії ключових компетентностей, що стали засобом інтеграції ключових і загальнопредметних компетентностей, навчальних предметів та предметних циклів. Передбачається, що формування саме таких компетентностей допомагає розвивати в учнів здатність застосовувати отримані знання у різних



ситуаціях і набувати досвіду використовувати набуті математичні компетентності на практиці. У Програмі для кожного класу окремою складовою прописали, задачі якої тематики вчителям доцільно розв'язувати з учнями для формування відповідних компетентностей. Для 6 класу це задачі на: розрахунок відсоткового відношення різних величин (наприклад, працездатного населення регіону, калорій тощо); прийняття рішень у сфері фінансових операцій, розрахунок власних та родинних фінансів, комунальних платежів; вміння розпоряджатись власними коштами, в простих ситуаціях оцінювати очікувані та реальні витрати тощо [11]. Але це не зовсім те, що перевіряється у дослідженні PISA.

### Специфіка моніторингу

Варто врахувати специфіку моніторингу PISA. Адже вимірюється саме математична грамотність учнів.

«Математична грамотність учня / студента визначається як його здатність формулювати, застосовувати й інтерпретувати математику в різноманітних контекстах. Це включає математичні міркування й застосування математичних понять, процедур, фактів та інструментів для опису, пояснення й прогнозування явищ» [12]. Модель математичної грамотності на практиці подано на малюнку 6.



Мал. 6

У кожному з математичних завдань тестування PISA-2018 приділялася увага одному з трьох математичних процесів:

- формулювання ситуацій математично (25 % балів за завдання);
- застосування математичних понять, фактів, процедур і міркування (50 % балів за завдання);
- інтерпретація, застосування й оцінювання математичних результатів (25 % балів за завдання).

«Математичне формулювання ситуацій передбачає виявлення можливостей застосування

й використання математики, тобто здатність побачити, що для розуміння або розв'язання певної проблеми може бути застосована математика. Тобто, вміння трансформувати запропоновану ситуацію в таку форму, у якій вона підлягатиме математичній обробці, для чого її математично структурують і формулюють математичною мовою, визначивши змінні та зробивши спрощувальні припущення, які допоможуть розв'язати відповідну задачу.

Процес застосування показує, наскільки добре учні/студенти можуть виконувати обчислення й операції, а також використовувати відомі їм математичні поняття й факти для розв'язання проблеми, сформульованої математично.

Процес інтерпретації показує, наскільки ефективно учні/студенти можуть аналізувати математичні розв'язки або висновки, інтерпретувати їх у контексті проблеми з реального життя й визначати обґрунтованість результатів або висновків» [18].

Для того, щоб розв'язати завдання, запропоновані у дослідженні PISA, учням потрібно:

- прочитати досить громіздку прикладну задачу;
- переформулювати її на мову математики, тобто, перейти від прикладної до абстрактної задачі;
- правильно розв'язати абстрактну задачу;
- інтерпретувати результати отримані у процесі розв'язування абстрактної задачі до умови заданої прикладної задачі.

Аналіз оприлюднених завдань PISA й звіти дають підстави для систематизації пропонованих прикладних задач на три види життєвих ситуацій:

- задачі, які задіють повсякденний досвід учнів (купівля різного роду товарів, зокрема ліків, читання та аналіз інструкції)
- задачі, в яких йдеться про ситуації, з якими учень матиме справу у процесі навчання конкретного предмету чи у подальшій своїй професійній діяльності
- задачі, що вимагають опрацювання інформації з газет, журналів чи Інтернету.

Таке позиціонування допомагає сформуванню уявлення учнів про те, яку роль математика відіграє у світі і наскільки вона часто використовується в різних сферах життя.

### Українські підручники, посібники і завдання PISA

Завдання, що пропонуються у вимірниках PISA є досить громіздкими, а відповідно завдання такого типу не дуже часто зустрічаються в діючих підручниках. Хоча, і це зазначено у звіті [12], у діючих підручниках містяться задачі

аналогічні до тих, що пропонуються на PISA. У звіті проаналізовані підручники для 9 класу. Розглянемо кілька оприлюднених завдань, що використовувалися в PISA, та аналогічні їм, що містяться в шкільних підручниках математики для 5 – 9 класів.

### I. «ТЕСТИ З ГЕОГРАФІЇ»

Учитель географії пропонує учням тести, виконання кожного із яких оцінює в 100 балів. Середня оцінка Ігоря за чотири перших тести дорівнює 60 балам. За п'ятий тест він отримав 80 балів.

**Запитання:** Чому дорівнює середня оцінка Ігоря за п'ять тестів по географії?

**Відповідь:** 64.

Аналогічне завдання міститься в підручнику «Математика», 5 [13].

**1254.** Водій автобуса завжди дотримувався правил безпеки руху. За першу годину він проїхав 60 км, за другу й третю — у середньому по 61 км, а за четверту — на 10 км більше, ніж за першу годину. Скільки кілометрів у середньому за годину долав автобус?

**Розв'язання.** Нехай за 2-гу годину автобус проїхав  $S_2$  км, а за третю годину —  $S_3$  км. Тоді за умовою задачі  $(S_2 + S_3) : 2 = 61$  (км), звідки  $S_2 + S_3 = 61 \cdot 2 = 122$  (км).

Маємо:  $S_1 = 60$  км,  $S_2 + S_3 = 122$  км,

$S_4 = 60 + 10 = 70$  (км).

Тепер можемо знайти скільки кілометрів у середньому за годину долав автобус, який їхав 4 години.

$$\begin{aligned} (S_1 + S_2 + S_3 + S_4) : 4 &= \\ = (60 + 122 + 70) : 4 &= 63 \text{ (км)}. \end{aligned}$$

**Методичний коментар.** Особливість цього завдання та його складність для учнів полягає в тому, що кілька із значень, для яких вимагається знайти середнє арифметичне, задані в неявному вигляді. Перш ніж знаходити середнє арифметичне заданих значень учні мають відшукати суму тих, для яких відоме середнє арифметичне. Варто зауважити також, що різні розв'язники та ГДЗ до підручника не містять правильного розв'язання.

Аналогічні завдання (у різних формах подання) зустрічаються також як повторення в інших класах, а також у матеріалах для підготовки для ЗНО. Саме такий тип завдань на знаходження середнього арифметичного (поруч з іншими) слід частіше включати в процес навчання математики у кожному з 6 — 9 класів.

### II. «КРАЩА МАШИНА»

Автомобільний журнал використовує рейтингову систему для оцінки нових машин і надає звання «Машина року» машині, що отримала найвищу загальну оцінку. Була проведена оцінка п'яти нових машин, і їх рейтинги представлені в таблиці.

Машина	Забезпечення безпеки	Економія пального	Зовнішній вигляд	Внутрішні зручності
	(S)	(F)	(E)	(T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Рейтинги означають наступне:

3 пункти — Чудово.

2 пункти — Добре.

1 пункт — Непогано.

**Запитання.** Для підрахунку загальної оцінки машини журнал використовує формулу, що подана нижче.




Загальна оцінка =  $3 \cdot S + F + E + T$ .

Підрахуйте загальну оцінку машини «Ca». Відповідь запишіть нижче.

**Відповідь.** Загальна оцінка «Ca»: 15.

Подібною можна вважати задачу з підручника «Математика», 5 [10].

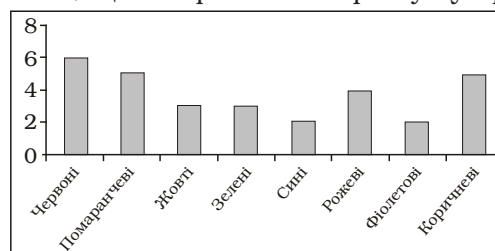
**361.** Яка з машин подолає більшу відстань? Значення виразу — це відстань (у кілометрах), яку пододала машина.

	$m + n \cdot p;$ $m = 173, n = 12, p = 3$	<input type="text"/>
	$a : b + c;$ $a = 900, b = 25, c = 72$	<input type="text"/>
	$(d - k) \cdot t;$ $d = 37, k = 9, t = 4$	<input type="text"/>

**Методичний коментар.** Основна мета таких завдань — учні мають відібрати й інтегрувати інформацію, представлену в різних формах, зокрема правильно підставити значення змінних, встановити порядок дій утвореного числового виразу, виконати відповідні дії та зробити висновки відповідно до умови задачі.

### III. «КОЛЬОРОВІ ЦУКЕРКИ»

**Запитання.** Мама Роберта дозволила йому виїняти з коробки одну цукерку, не заглядаючи в коробку. Розподіл кількості цукерок за кольорами в коробці поданий на діаграмі нижче. Яка ймовірність того, що Роберт виїме червону цукерку?



A. 10 %. B. 20 %\*. C. 25 %. D. 50 %.

Ідейно та за способом виконання це завдання схоже до завдання, що міститься в підручнику Алгебра, 7 [1].

**294.** З букв, написаних на окремих квадратних картках, складено слово ЦИВІЛІЗАЦІЯ. Потім ці картки перевернуто, перемішано й навмання взято одну. Яка ймовірність того, що на ній написано букву:

а) «Ц»; б) «І»; в) «Я»?

*Методичний коментар.* Складність таких завдань полягає не лише в тому, що учні мають усвідомити поняття ймовірність і знати формулу для її знаходження. Складним для учнів є те, що потрібні дані не задані в умові задачі у явному вигляді. Щоб скористатися формулою, потрібно спочатку зрозуміти, які значення слід в неї підставити. Мова йде про загальну кількість можливих варіантів і про кількість сприятливих варіантів для даної події. Виявляється, що саме це є найбільшою складністю для багатьох учнів.

І в першій (PISA) і в другій (підручник) задачі учні мають самостійно встановити загальну кількість можливих варіантів (цукерок чи букв) за допомогою безпосереднього підрахунку.

Увагу учнів і вчителів слід звернути на завдання такого виду.

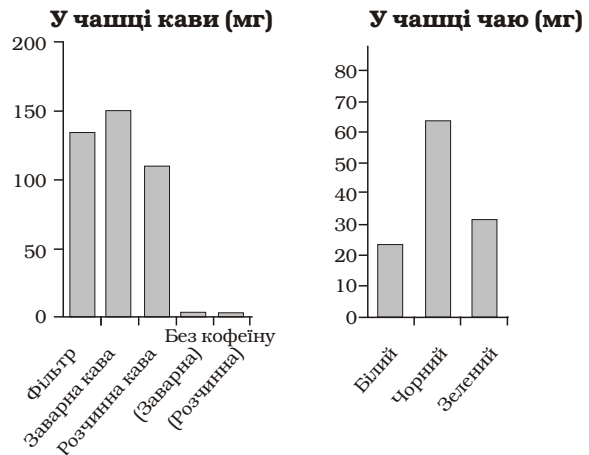
Також часто в завданнях PISA йде мова про конвертацію валют. Задачі таких фабул можна зустріти і в діючих підручниках. Наприклад, у підручнику [2] міститься така задача:

**№ 626.** Перебуваючи на відпочинку в Угорщині, у туристів закінчилася готівка, але у них є доларова банківська картка. Вони мають оплатити в магазині 30 євро. Здійснивши оплату через банківську картку, долари конвертуються в гривню, а потім у євро. Скільки євро на цій операції втратить турист, якщо в банку долар можна продати за 22 грн, а євро купити за 26,4 грн або за \$ 1,1?

Хотілося б звернути увагу, що кожен підручник проходить конкурс, що має певні вимоги до обмеження обсягу підручника по листажу. Тож, у авторів підручника немає можливості у великій кількості включати задачі у такій формі, як у PISA.

Для того, щоб пропонувати учням такого виду завдання зручно використовувати додаткові збірники задач чи спеціальні дидактичні матеріали. Наприклад, «Збірник задач з математики. 5 — 9 класи: Наскрізнi лінії ключових компетентностей та їх реалізація» [6] включає прикладні задачі, що схожі за формою до тих, що пропонуються на PISA. У цьому збірнику велика кількість завдань присвячена аналізу чи пошуку статистичної інформації чи її інтерпретації.

**4.44.** У каві та чаї міститься кофеїн. Вміст кофеїну в чашці кожного з напоїв подано на діаграмі.



1) Скільки кофеїну міститься в чашці:

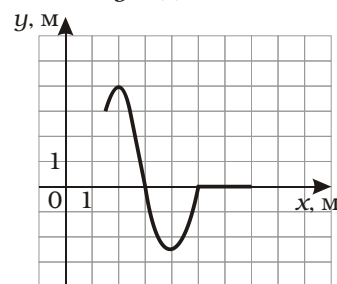
- заварної кави;
- фільтрованої кави;
- чорного чаю;
- зеленого чаю?

2) Максимальна безпечна доза кофеїну для дорослої людини — 400 мг. Яку найбільшу кількість чашок заварної кави можна випити протягом дня?

*Вживати каву дітям можна лише з 14 — 15 років. Вміст кофеїну призводить до перебудження і порушення роботи серця. Крім того, кофеїн вимиває кальцій з організму, тоді як саме даний мікроелемент просто необхідний для систем і органів дитини. Краще каву замінити цикорієм, ячменем або шипшиною. Вони смачні і дуже корисні.*

В посібниках [14, 15, 16, 17] з серії «Перевірка предметних компетентностей» для 5, 6 та 7 класів. пропонуються задачі, що за формою схожі до тих, що пропонуються у PISA. Їх зміст є прикладним, до того ж умови теж сформульовані у вигляді загальних великих текстів і містять декілька запитань до однієї умови. Наприклад.

**Завдання 1.** Настя займається стрибками у воду, спеціалізуючись у стрибках з трампліна. Нехай  $x$  — відстань (у метрах) від краю басейна,  $y$  — відстань (у метрах) від стоп дівчини до рівня води в басейні. На малюнку зображено графік залежності  $y$  від  $x$ .



1) На якій висоті над рівнем води в басейні розташовано трамплін?

- А.** 3 м. **Б.** 4,5 м. **В.** 4 м. **Г.** 5 м.

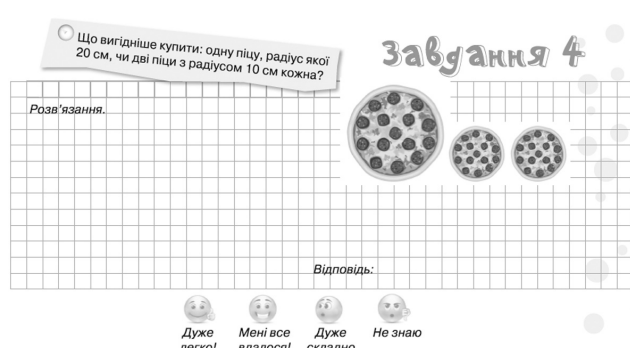
2) На якій максимальній висоті над рівнем води в басейні була дівчинка під час стрибка?

**A.** 5 м. **B.** 4,5 м. **B.** 4 м. **Г.** 3 м.

3) На якій відстані від краю басейну Настя почала пливти після стрибка?

**A.** 3 м. **B.** 5 м. **B.** 4 м. **Г.** 1,5 м.

Щоб підсилити прикладну направленість математики та показати її тісний зв'язок з життям в рамках Всеукраїнського експерименту «Я-Дослідник» розроблені робочі зошити з математики для 5 і 6 класу. В них розглядаються окремі теми з математики і до кожної запропоновано низку прикладних завдань, що вимагають від учня аналізу ситуації, вміння сформулювати гіпотезу та перевірити її. На малюнку 7 подано фрагмент сторінки робочого зошита з відповідним завданням.



Мал. 7

### Роль учителів у підготовці учнів до дослідження PISA

У визначенні математичної грамотності для PISA особливий наголос варто робити на необхідності розвитку вміння учнів/ студентів застосовувати математику в життєвому контексті, для чого необхідно забезпечити їх багатим досвідом використання математики на заняттях у навчальному закладі. Математична грамотність не є властивістю, яку людина може мати або не мати. Це, найімовірніше, така властивість, яку набувають безперервно, завдяки чому одні особи стають більш математично грамотними, ніж інші. Водночас потенціал для її розвитку є завжди [18].

У формуванні в учнів умінь розв'язувати прикладні задачі велику роль відіграє вчитель:

1. Чи пропонує він такого роду задачі?
2. Чи відводить він достатньо часу для розв'язування таких задач на уроці?
3. Чи стимулює учнів аналізувати умову або ж пропонувати декілька моделей до однієї задачі?
4. Чи заохочує пошук нестандартних шляхів розв'язку задачі?
5. Чи звертає особливу увагу на інтерпретацію отриманих учнями результатів?

Як уже зазначалося вище, підручники з математики для 5 — 11 класів, деякі збірники завдань, дидактичні матеріали, публікації у різних джерелах тощо містять завдання, які певним чином спрямовані на формування в учнів здатності до використання отриманих знань і вмінь у реальних життєвих ситуаціях. Інша справа, що вчителі не мають вдосталь часу, щоб звертати на ці завдання більше часу, а інколи й не усвідомлюють значення таких завдань для формування в учнів математичної грамотності.

Розглянемо декілька завдань з PISA.

### ПОСЛІДОВНІСТЬ «СХОДИНОК»

Роберт малює послідовність «драбинок», складених з квадратів. Нижче показані етапи побудови.



Видно, що на етапі 1 він використав один квадрат, на етапі 2 — три квадрати і на етапі 3 — шість квадратів. Скільки квадратів він використовує на четвертому етапі?

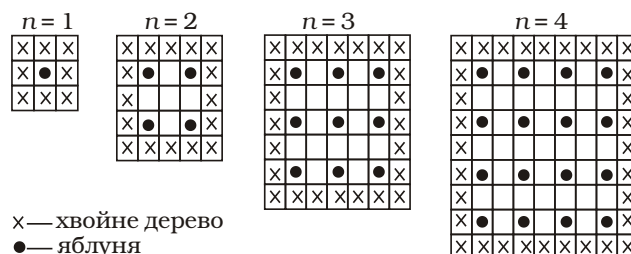
**Відповідь:** 10

### «ЯБЛУНІ»

Фермер на садовій ділянці висаджує яблуні у формі квадрата, як показано на малюнку. Для захисту яблунь від вітру він саджає по краях ділянки хвойні дерева. Нижче на малюнку зображені схеми посадки яблунь і хвойних дерев для декількох значень  $n$ , де  $n$  — кількість рядів висаджених яблунь. Цю послідовність можна продовжити для будь-якого числа  $n$ .

#### Запитання 1.

Заповніть таблицю



x — хвойне дерево  
o — яблуня

#### Запитання 1.

Заповніть таблицю:

$n$	Кількість яблунь	Кількість хвойних дерев
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

**Відповідь:**

$n$	Кількість яблунь	Кількість хвойних дерев
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

**Запитання 2.** Є дві формули, що Ви можете використати для обчислення кількості висаджених яблунь і хвойних дерев в описаній вище ситуації:

- кількість яблунь =  $n^2$ ;
- кількість хвойних дерев =  $8n$ , де  $n$  — кількість рядів висаджених яблунь.

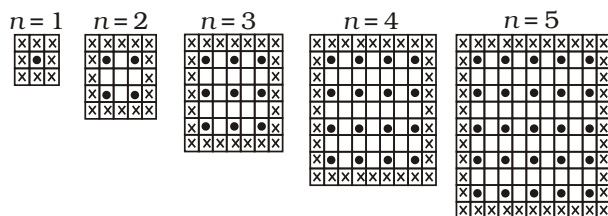
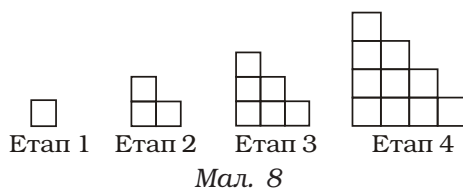
Для якого значення  $n$  число яблунь буде дорівнювати числу посаджених навколо них хвойних дерев?

**Відповідь:** 8.

**Запитання 3.** Припустимо, що фермер вирішив поступово збільшувати кількість рядів яблунь на своїй ділянці. Що при цьому збільшуватиметься швидше: кількість висаджених яблунь або кількість хвойних дерев?

**Відповідь:** кількість висаджених яблунь менше за кількість хвойних дерев при збільшенні кількості рядів яблунь з одного до чотирьох; при подальшому збільшенні кількості рядів яблунь кількість висаджених яблунь більше за кількість хвойних дерев.

**Методичний коментар.** Перше завдання і перше запитання до другого завдання можна розв'язати безпосередньою побудовою та відповідними підрахунками. На малюнках 8 і 9 відповідно подано малюнки за допомогою яких можна безпосередньо підрахувати потрібні дані.



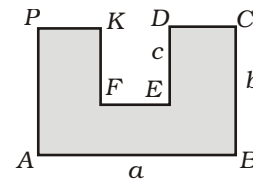
Мал. 9

Слід частіше пропонувати учням на уроках математики задачі, які ефективно розв'язуються безпосереднім перебором можливих варіантів чи побудовою наступного (або кількох наступних елементів послідовності).

У підручниках математики містяться завдання, які є серйозним підґрунтям для розв'язування багатьох логічних (абстрактних і прикладних) задач з арифметики, алгебри та геометрії. Не всі вчителі усвідомлюють глибокий зміст таких задач і тому не завжди надають їм відповідної уваги.

Розглянемо ще кілька прикладів. У підручнику «Алгебра», 7 [1] у темі «Вирази зі змінними» подається з розв'язанням така задача.

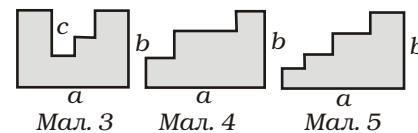
**3.** Знайдіть периметр многокутника, зображеного на малюнку, якщо  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $DE = c$ .



**Розв'язання.** Оскільки  $CD + EF + KP = AB$ , то  $AB + BC + CD + DE + EF + FK + KP + PA = 2AB + 2BC + 2FK = 2a + 2b + 2c$ .

Наприкінці параграфу для самостійного розв'язування учням пропонується кілька таких завдань.

**28\*.** Визначте периметри многокутників, зображених на малюнках 3 — 5.



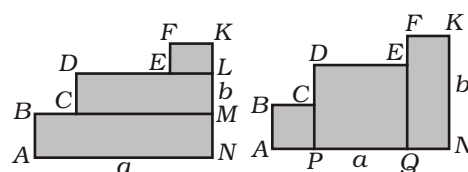
Мал. 3

Мал. 4

Мал. 5

Основною складністю для учнів є той факт, що вони не можуть знайти довжину окремих ланок заданих східчастих фігур (що і не вимагається). З такими задачами та способами їх розв'язування доцільно ознайомлювати учнів ще в 5 класі, а простіші східчасті фігури можна розглядати ще в початковій школі.

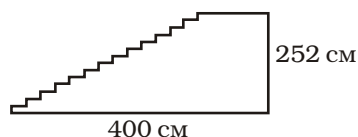
Наприклад, розглядаючи завдання з малюнка 4, молодшим школярам можна запропонувати виміряти довжину кожної горизонтальної і вертикальної ланки і висунути можливі гіпотези. Інший спосіб — позначити вершини, провести додаткові лінії, встановити рівність відповідних відрізків і знайти потрібні суми. Можна скористатися й іншим способом — основне, щоб учні усвідомили, що в східчастих фігурах не потрібно знаходити довжину кожної ланки окремо.



А тепер розглянемо дві задачі, що пропонувалися в дослідженнях PISA.

**«СХОДИ»**

На малюнку зображені сходи висотою 252 см. Яка висота кожної з 14 сходинок?

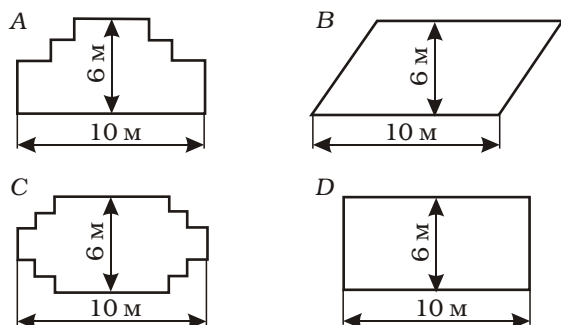


**Відповідь:** 18 см.

*Методичний коментар.* Якщо учні розуміють, що сума довжин усіх вертикальних ланок, кожна з яких є висотою сходинки, дорівнює загальній висоті сходів, то задача зводиться до однієї дії ділення  $252 : 14 = 18$ .

**«САДІВНИК»**

**Запитання.** У садівника є 32 м дроту, яким він хоче позначити на землі межу клумби. Форму клумби йому потрібно вибрати з наступних варіантів.



Обведіть слово «Так» або «Ні» біля кожної форми клумби залежно від того, вистачить або не вистачить садівникові 32 м дроту, щоб позначити її межу.

Форма клумби	Чи вистачить 32 м дроту, щоб позначити межу клумби?
Форма А	Так / Ні
Форма В	Так / Ні
Форма С	Так / Ні
Форма D	Так / Ні

**Відповідь:**

Форма клумби	Чи вистачить 32 м дроту, щоб позначити межу клумби?
Форма А	Так
Форма В	Ні
Форма С	Так
Форма D	Так

*Методичний коментар.* Малюнки А і С — східчасті фігури. Аналогічно попереднім міркуванням швидко можна встановити, що їхній периметр (як і периметр прямокутника на мал. D) дорівнює 32 см. Залишається розглянути малюнок В. Тут слід використати той факт, що похила завжди більша від перпендикуляра і одразу, не знаходячи периметр фігури, можна

встановити, що садівникові не вистачить 32 м дроту, щоб позначити межу такої клумби.

В умовах незмінної кількості годин учителям варто шукати шляхи інтенсифікації навчального процесу. Це може бути впровадження технологій змішаного навчання, проектного навчання, дослідницького навчання, тобто таких, в яких частину матеріалу відводиться на самостійне опрацювання учнем.

Також доречним буде започаткування різноманітних варіативних курсів, факультативних занять та гуртків, які будуть присвячені саме розв'язуванню прикладних задач з математики.

У вчителів математики є можливість впровадити варіативний курс «Логіка» для учнів 5 — 9 класів. Це дасть змогу відвести на розвиток логічного мислення (знайомство учнів з основними логічними операціями), поглиблення знань з математики та підготовки учнів до різноманітних моніторингів, конкурсів та олімпіад з математики ще 1 годину на тиждень.

Для методичного супроводу такого курсу розроблено посібники «Зошит-конспект. 5 клас» (2017 року), «Зошит-конспект. 6 клас» (2018 року) та «Зошит-конспект. 7 клас» (2019 року). В межах цього курсу розглядаються завдання на встановлення істинності та хибності математичних тверджень, комбінаторні задачі, розв'язування задач на метод припущення та метод вилучення, метод математичної індукції, метод крайнього, принцип Діріхле тощо. Також особливу увагу приділено дослідницьким завданням та завданням, що вимагає від учнів пошукової діяльності та аналізу даних.

А в 7 класі курсу «Логіка» весь перший семестр присвячений розв'язуванню саме прикладних задач. Особлива увага присвячена процесу моделювання та інтерпретації результатів. За концепцією PISA, цикл моделювання є центральним у визначенні учня як особи, задіяної в процесі розв'язування задачі.

За версією PISA на якість системи математичної освіти позитивно впливають: групові форми роботи, колективне здобуття знань, сприяння формування в учнів активні позиції продовж навчального процесу, установка учнів на віру в себе, знання і спілкування декількома мовами батьками учнів.

**Низький рівень читацької грамотності учнів**

Один кластер містив 12 — 15 завдань з математики. Кожне завдання містить текст, в якому формулюються вихідні данні. Також зазвичай у вигляді додаткового тексту подані і запитання до задачі. Це означає, що низький рівень читацької грамотності значно впливав на кількість розв'язаних учнем завдань.

### Нерівний доступ до якісної освіти

Варто врахувати, що на середній бал з математики у дослідженні PISA вплинув суттєвий розрив між учнями міських, сільських й елітних навчальних закладів. Саме тому важливо підвищувати можливості учнів усіх шкіл отримати математичну освіту високого рівня та імідж учителя математики, зокрема і в селах, надаючи всім учителям рівні можливості для підвищення кваліфікації.

В умовах відсутності вчителів, учням у нагоді можуть стати онлайн курси чи електронні навчальні посібники з математики, за допомогою яких можна впроваджувати онлайн-навчання чи змішане навчання з математики. За умов змішаного навчання учні можуть в цікавій і сучасній формі здобувати знання з математики, а вчитель будь-якого предмету може стати тьютором для таких учнів.

В Україні є онлайн курси та електронні навчальні посібники, що мають гриф Міністерства освіти і науки України і можуть бути використані в навчальному процесі. Наприклад онлайн курси на платформі GIOS (gioschool.com)

### Підготовка до конкурсу

Для того, щоб показати адекватні результати у тестуванні необхідно бути знайомими з специфікою моніторингу, уявляти яким чином буде організований моніторинг, готувати до нього учнів і вчителів.

Україна не була готова до проведення PISA у 2018 році. Рішення про участь було прийняте у 2016 року. Заходи, що були спрямовані на зміну акцентів у навчальному процесі були проведені, але їх не було достатньо.

### Перспективи

Наступний моніторинг відбудеться у 2021 році і у фокусі буде саме математична грамотність. Україна також братиме участь, але тепер вже в електронній версії. В концепції PISA 2021 ключовою складовою математичної грамотності зазначене математичне мислення.

Логічне мислення і вміння наводити переконливі аргументи — це важливі навички для успішного життя в сучасному світі. В процесі вивчення математики, учні якраз набувають досвіду формулювання гіпотез, перевірки їх експериментом, доведення тверджень на основі поступового вибудовування істинних тверджень тощо.

В концепцію PISA з математики були додані 8 навичок 21 століття:

- Критичне мислення.
- Креативність.
- Дослідження та вивчення.
- Саморегуляція, ініціативність і настирливість.

- Використання інформації.
- Системне мислення.
- Комунікація.
- Рефлексія.

Формування цих навичок у підростаючого покоління забезпечить йому успіх у професійній та особистісній діяльності.

### Висновки

Дослідження PISA має на меті оцінити не суму набутих знань і вмінь, а визначити, як сформовані в учнів математичні та ключові компетентності. Тобто, під час дослідження перевіряється здатність учнів опрацьовувати різні види інформації, вміння використовувати набуті під час навчання математики знання та вміння до розв'язування прикладних задач, досвід поєднання знань і нової інформації тощо. Учні мають показати набутий рівень математичної грамотності, що дозволить їм мати успіх в інформаційному суспільстві 21-го століття.

Метою дослідження PISA є також визначення тенденцій у результатах освітніх програм різних країн; чинників, що впливають на рівень навчальних досягнень учнів у світі, підвищення якості викладання і організації систем освіти.

Успішність в оволодінні математичною грамотністю є результатом комплексного впливу сім'ї, суспільства та закладу освіти на життя учня. Усе це слід врахувати під час підготовки до участі в дослідженні PISA-2021.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Алгебра: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Видавництво «Відродження», 2015. — 288.
2. Буковська О. І., Васильєва Д. В., Глобін О. І., Сільвестрова І. А. Алгебра. 9 клас. Підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів/ Буковська О. І., Глобін О. І., Васильєва Д. В., Сільвестрова І. А. — К.: Педагогічна думка, 2017. — 320 с.
3. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка 5 клас: Зошит-конспект / О. І. Буковська, Д. В. Васильєва. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. — 112 с.
4. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка 6 клас: Зошит-конспект / О. І. Буковська, Д. В. Васильєва. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. — 96 с.
5. Буковська О. І., Васильєва Д. В. Логіка 7 клас: Зошит-конспект / О. І. Буковська, Д. В. Васильєва. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2020. — 82 с.
6. Васильєва Д. В. Збірник задач з математики. 5 — 9 класи: Наскрізнi лінії ключових компетентностей та їх реалізація / Д. В. Васильєва, Н. І. Василюк. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. — 112 с.
7. Васильєва Д. В. Я дослідник. Математика. 5 клас: Робочий зошит учня / Д. В. Васильєва. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. — 64 с.

8. Васильєва Д. В. Я дослідник. Математика. 6 клас: Робочий зошит учня / Д. В. Васильєва. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. — 80 с.
9. Головка М. В., Науменко С. О. PISA-2018 як індикатор стану загальної середньої освіти в Україні. — Український педагогічний журнал. 2017. — № 2. — С. 8 — 20.
10. Істер О. С. Математика, 5 клас. Підручник для 5 класу загальноосвітніх навчальних закладів. — К.: Генеза, 2018. — 288 с.
11. Математика. 5 — 9 класи. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів. URL: <https://mon.gov.ua › app › opovlennya-12-2017 › 5-programa-z-matematiki>
12. Національний звіт за результатами міжнародного дослідження якості освіти PISA-2018 / Кол. авт. : М. Мазорчук (осн. автор), Т. Вакуленко, В. Терещенко, Г. Бичко, К. Шумова, С. Раков, В. Горох та ін. — Український центр оцінювання якості освіти. — К.: УЦОЯО, 2019. — 439 с.
13. Тарасенкова Н. А. та ін. Математика, 5 клас. Підручник для 5 класу загальноосвітніх навчальних закладів/ Н. А. Тарасенкова, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. — 240 с.
14. Тарасенкова Н. А. Перевірка предметних компетентностей. Математика, 5 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч.-метод. посібник / Н. А. Тарасенкова, М. І. Бурда, О. І. Глобін, І. М. Богатирьова, О. П. Бочко, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк // За ред. Н. А. Тарасенкової. — К.: Орion, 2015. — 48 с.
15. Тарасенкова Н. А. Перевірка предметних компетентностей. Математика, 6 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч.-метод. посібник / Тарасенкова Н., Богатирьова І., Коломієць О., Сердюк З. // За ред. Н. А. Тарасенкової. — К.: Орion, 2015. — 40 с.
16. Тарасенкова Н. А. Перевірка предметних компетентностей. Алгебра, 7 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч.-метод. посібник / Н. А. Тарасенкова, О. І. Глобін, І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк // За ред. Н. А. Тарасенкової. — К.: Орion, 2015. — 32 с.
17. Тарасенкова Н. А. Перевірка предметних компетентностей. Геометрія, 7 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч.-метод. посібник / Тарасенкова Н., Бурда М., Богатирьова І., Коломієць О., Сердюк З. // За ред. Н. А. Тарасенкової. — К.: Орion, 2015. — 24 с.
18. PISA: математична грамотність / уклад. Т. С. Вакуленко, В. П. Горох, С. В. Ломакович, В. М. Терещенко; перекл. К. Є. Шумова. — К.: УЦОЯО, 2018. — 60 с.
19. PISA: усе, що треба знати про глобальне дослідження освіти. URL: <https://osvitoria.media/experience/pisa-use-shho-treba-znaty-pro-globalne-doslidzhennya-osvity/>