

УДК 372.851

Гриб'юк Олена Олександрівна

Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України

Юнчик Валентина Леонідівна

Комунальний заклад «Луцький навчально-виховний комплекс №9 Луцької міської ради»

yunchik@gmail.com

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ ІНФОРМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ GEOGEBRA В ПРОЦЕСІ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ФАХІВЦІВ

Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л. Навчання математичних основ інформатики з використання системи GeoGebra в процесі підготовки майбутніх фахівців. Аналізуються особливості навчання курсу «Математичні основи інформатики» в процесі підготовки майбутніх вчителів математики в контексті впровадження нових стандартів вищої освіти. Ґрунтовно розглядається логічно-структурна схема навчального курсу «Математичні основи інформатики», відповідні засоби, методи навчання та основні змістові модулі. Аналізуються пропедевтичні завдання курсу «Математичні основи інформатики» та відповідні ситуаційні задачі з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Пропонується система завдань із деталізацією відповідних математичних моделей та алгоритмів в контексті діяльнісного підходу до навчання та підготовки майбутніх вчителів математики.

Ключові слова: математичні основи інформатики; ситуаційні задачі; вища математика; GeoGebra; правило-орієнтир; система динамічної математики; компетентність; методика навчання математики; теорія розв'язування дослідницьких задач; верифікація; редукція; трансформація; теорія моделей лінійної алгебри; аналіз; синтез; міжпредметні зв'язки.

Grybyuk O.O., Yunchyk V.L. Teaching mathematical fundamentals of informatics on using GeoGebra in the process of training future specialists. The peculiarities of the course "Mathematical Fundamentals of Informatics" in the process of preparation of future teachers of mathematics in the context of introduction of new standards of higher education are analyzed. The logical-structural scheme of the training course "Mathematical Foundations of Informatics", the corresponding means, methods of training and main content modules is thoroughly considered. The propaedeutic tasks of the course "Mathematical Foundations of Informatics" and corresponding situational problems using the system of dynamic mathematics GeoGebra are analyzed. A system of tasks is proposed with the details of the corresponding mathematical models and algorithms in the context of the activity approach to the training and preparation of future mathematics teachers.

Keywords: mathematical fundamentals of informatics; situational tasks; higher mathematics; GeoGebra; rule-benchmark; system of dynamic mathematics; competence; methodology for teaching mathematics; the theory of solving research problems; verification; Reduction; transformation; the theory of models of linear algebra; analysis; synthesis; interpersonal connections.

ВСТУП. Основна задача навчальних закладів вищої освіти – підготувати компетентного фахівця, відповідно до сучасних вимог роботодавців. Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчальної діяльності сприяє активізації одержаних раніше знань, вмінь та навичок, розвитку логічного мислення, інтелектуальних здібностей, посилення інтересу до навчання та способу одержання знань.

У процесі навчання математичних дисциплін система GeoGebra використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об'єктів, виразів, ілюстрації методів побудови; як середовище для моделювання та емпіричного дослідження властивостей досліджуваних об'єктів; як інструментально-вимірювальний комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта, а також вимірювання його заданих параметрів.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ. Сьогодні неможливо вирішувати проблеми, що виникають у процесі конструювання й організації навчально-виховного процесу традиційними способами, спираючись тільки на власний досвід; необхідно враховувати соціальні й культурні, регіональні потреби підростаючого покоління, інновації та міжнародний досвід із використанням окремих аспектів систем динамічної математика в процесі навчання майбутніх вчителів математики (Carina Granberg, Jan Olsson, Djurdjica Такаї, Gerrit Stols, Hohenwarter M) [28], [29]; аналізу системи компетентностей в

процесі підготовки вчителів математики (Anne-Katrien Koenen, Belz H., Siegrist M, Kerimbayev N.) [22]; особливостей дослідницької діяльності в сучасній освіті (Dostál J., Felder R. M., Solomon B. A.) [24]; особливості використання когнітивних аспектів математичного мислення студентів (Duval R, Engelkamp J.) [25]; використання окремих компонентів комп'ютерно орієнтованих систем в процесі навчання студентів (Gonzalo Almerich, Inge Molenaar, Irina Golitsyna, Lily Orland-Barak) [29], [30].

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ. На основі аналізу навчальних програм з математики [12], [18], [19], результати зовнішнього незалежного оцінювання [20] та результатів навчання українських школярів у міжнародному дослідженні TIMSS [27] можна констатувати недостатньо високий рівень знань з математики. Безперечно, навчальні програми потребують розвантаження від другорядного матеріалу, переорієнтації змісту в контексті світоглядної функції природничих та математичних наук, профілізації математичних дисциплін до прикладного спрямування. Усі зазначені аспекти стосуються також рівня стандарту у вищих навчальних закладах. Посилаючись на закон України про вищу освіту [1] виникає необхідність впровадження навчального курсу «Математичні основи інформатики» із врахуванням пропедевтичного матеріалу щодо теорії розв'язування дослідницьких задач. В курсі «Математичні основи інформатики» дібрано відповідні ситуаційні задачі, в тому числі задачі з параметрами, що розв'язуються з використанням численних математичних методів та окремих компонентів комп'ютерно орієнтованої системи навчання математики. Напрямом наукових досліджень теоретичних основ інформатики є математичні моделі і засоби, що використовуються для моделювання та дослідження інформаційних процесів у різних сферах діяльності людини. В даному курсі вивчаються основні моделі, методи і алгоритми розв'язування задач, що виникають у сфері інтелектуалізації інформаційних систем, а також розглядаються проблеми використання інформаційних, зокрема математичних, моделей та інформаційних технологій для їх дослідження (рис 1.).



Рис. 1. Логічно-структурна схема навчального курсу «Математичні основи інформатики»

Нижче запропоновано короткі анотації щодо тем навчального курсу «Математичні основи інформатики» (таблиця 1).

Таблиця 1

Тема 1. Теорія розв'язування дослідницьких задач
<p>Задача про ханойську вежу. Розглядаються особливості розв'язування задачі про ханойську вежу із використанням сукупності рекурентностей. Пропонуються можливі способи розв'язування рекурентних співвідношень. Пропонується доведення рекурентного співвідношення з використанням методу математичної індукції.</p>
<p>Задача про розрізання піци. Розглядається геометрична задача поділу області на частини з використанням числа прямих. Розглядається знаходження розв'язку в замкнутій формі з використанням величини S_n, що дорівнює сумі перших n додатних цілих чисел та складено таблицю для кількох перших чисел. Аналізується означення замкнутої форми та наводяться відповідні приклади.</p>
Тема 2. Суми та рекурентності
<p>Перетворення сум. Розглядається означення суми, способи запису та позначення з усіма їх елементами. Демонструються різні способи знаходження сум в узагальненому сигма-поданні. Показано зв'язок між сумами та рекурентностями із використанням відповідних співвідношень. Розглядаються основні правила знаходження суми з використанням розподільного, сполучного та переставного законів та наводяться відповідні приклади. Ґрунтовно описується знаходження суми геометричної прогресії.</p>
<p>Загальні методи сумування. Розглядається знаходження значення виразу для суми перших n квадратів (\square_n) різними способами: Метод 1: вгадування відповіді з підтвердженням з математичної індукції. Метод 2: метод перетворення (виокремлено перший і останній члени \square_{n+1}, для того щоб отримати рівняння відносно \square_n). Метод 3: узагальнення рекурентних співвідношень. Метод 4: заміна сум інтегралами (зв'язок між \sum та \int). Метод 5: ускладнення і спрощення (заміна початкової суми складнішою на перший погляд подвійною сумою). Метод 6: обчислення кінцевих різниць. Метод 7: використання похідних функцій.</p>
Тема 3. Бінарні операції
<p>Розглядається бінарна операція mod та приклади її використання. Описується знаходження частки від ділення, алгоритм виведення загальної формули. Демонструється найважливіша алгебраїчна властивість операції mod (розподільний закон) та наводяться відповідні приклади.</p>
Тема 4. Елементи теорії чисел
<p>Описуються основні елементи теорії чисел. Розглядається співвідношення подільності: найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел. Пропонується рекурентне визначення числа Евкліда та записується їх послідовності. Розглядається розкладання на прості множники складених виразів, факторіалів. Демонструється таблиця перших десяти факторіальних функцій та зазначається кілька основних факторіальних фактів.</p>
Тема 5. Спеціальні числа
<p>Розглядаються основні пункти теорії дійсних та комплексних чисел, в тому числі: числа Ейлера, Бернуллі та Фібоначчі.</p>
<p>Числа Ейлера. Числа Ейлера $\langle n \rangle$ – утворюють трикутники коефіцієнтів, що подібні біноміальним коефіцієнтам $\binom{n}{k}$ із трикутника Паскаля. Розглядається таблиця чисел трикутник Ейлера. Описується процес знаходження рекурентності для $\langle n \rangle$. Розглядається таблиця трикутник чисел Ейлера другого порядку. Визначаються многочлени Стерлінга за правилом та наводяться основні формули.</p>
<p>Числа Бернуллі. Демонструється послідовність чисел Якоба Бернуллі, що має певну закономірність в сумі m-них степенів натуральних чисел, що і зазначається в лекції. Формули Бернуллі доводяться з використанням індукції по m, застосовуючи метод перетворення. Демонструється зв'язок чисел Бернуллі з числами Стерлінга.</p>

<p>Числа Фібоначчі. Розглядається послідовність Фібоначчі та їх рекурентні співвідношення. Наводиться приклад природного виникнення чисел Фібоначчі. Демонструється доведення за індукцією співвідношення Кассіни, що лежить в основі геометричного парадоксу (головоломка Льюїса Керрола). Описується доведення леми Матіасевича. Демонструється система Фібоначчі числення та приклади від 1 до 20.</p>
<p align="center">Тема 6. Дискретна ймовірність</p>
<p>Математичне сподівання і дисперсія. Описується означення дискретності, ймовірнісного простору, розподілу ймовірності, елементарних подій, середнього арифметичного, медіани, моди. Описується означення математичного сподівання та дисперсії та наводяться відповідні приклади. В нерівності Чебишева встановлюється важлива властивість дисперсій.</p>
<p>Хешування. Описується взаємозв'язок теорії ймовірності та програмування. Підставою ряду важливих алгоритмів зберігання і вибірки даних в ЕОМ є метод хешування. Хешування описує як пришвидшити пошук потрібних даних, приклади яких наводяться в лекції. Зазначається поняття аналізу алгоритмів та ймовірнісного аналізу алгоритмів. Наводяться кілька випадків пошуку.</p>
<p align="center">Тема 7. Асимптотика</p>
<p>Два асимптотичні приклади. Означується поняття асимптоти. Демонструються основні асимптотичні приклади. Наводяться асимптотичні рекурентні співвідношення.</p>
<p>Формула сумування Ейлера. Описується загальний метод апроксимації сум, що був вперше опублікований Леонардом Ейлером. Розглядається та доводиться його загальна формула.</p>
<p align="center">Тема 8. Похідні функцій</p>
<p>Метод роботи з послідовностями – перетворення нескінченних рядів.</p>
<p>Розв'язування рекурентних співвідношень. Демонструється найважливіше застосування похідних функцій – розв'язування рекурентних співвідношень. Покроково описується як з використанням похідних для рекурентного співвідношення $\langle g_n \rangle$ можна отримати вираз g_n через n в замкненому вигляді. Наводяться приклад чисел Фібоначчі, що розв'язуються даним методом. Формулюється та доводиться теорема про розкладання раціональних функцій в випадку знаходження різних коренів. Наводиться загальна теорема про перетворення раціональних похідних функцій. Наводиться приклад довільного рекурентного співвідношення та приклад взаємних рекурентних послідовностей. Розглядаються приклади рекурентних співвідношень.</p>
<p>Функції Діріхле. Описується похідна функції Діріхле, зазначається її загальний вигляд. Описується корисність похідної функції Діріхле, коли вона є мультиплікативною функцією. Перетворення ПФД в простих числах.</p>
<p align="center">Тема 9. Біноміальні коефіцієнти</p>
<p>Твірні функцій. Описується поняття твірної функції з використанням степеневих рядів. Розглядаються означення та основні формули узагальненого біноміального ряду та узагальненого експоненційного ряду та їх застосування. Розглядаються часткові загальні результати даних рядів. Розглядаються формули чисел Каталана та наводиться їх послідовність.</p>
<p>Гіпергеометричні функції. Розглядається уніфікований принцип для систематизації методів для знаходження суми біноміальних коефіцієнтів, гіпергеометричні ряди. Зазначається узагальнений гіпергеометричний ряд та описуються всі його величини. Використовується модифікована функція Бесселя, вироджений та гаусовий гіпергеометричні ряди. Розглядається формули Куммера та Діксона для комплексних чисел.</p>
<p>Гіпергеометричні перетворення. Демонструється перетворення однієї гіпергеометричної функції з різними параметрами. Аналізується закон симетрії, формула Куммера для здійснення перетворень. Наводяться різні приклади гіпергеометричних перетворень.</p>

Аналізуючи навчальні плани підготовки бакалаврів вищих навчальних закладів (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки [18], Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» [12], Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна [19] та інші), а також посилаючись на логічно-структурну схему навчального курсу «Математичні основи інформатики» (Рис. 1) приходимо до висновку, що даний курс доцільно упроваджувати для підготовки майбутніх вчителів математики на другому курсі в першому семестрі (вибіркові навчальні дисципліни циклу дисциплін фундаментальної, природничо-наукової підготовки).

Метою навчального курсу «Математичні основи інформатики» є ознайомлення студентів з фундаментальними поняттями, основними означеннями і математичними методами інформатики – фундаментальної природничої науки, що вивчає процеси передавання та опрацювання даних. В процесі навчання даного курсу студенти ознайомлюються з теоретичним матеріалом, вивчають закони і добирають методи опрацювання даних, будують математичні моделі інформаційних систем для конкретних технічних, соціальних і фізичних систем, вивчають лінійні оптимізаційні моделі, завдання дискретної оптимізації, теорію алгоритмів.

Основними завданнями навчального курсу «Математичні основи інформатики» є формування знань, вмінь та навичок, необхідних для раціональної роботи з програмними засобами загального призначення в майбутній фаховій діяльності; формування системного уявлення про математичну базу інформатики; формування вміння розв'язувати дослідницькі та практичні задачі; розвиток здатності до проектної, дослідницької діяльності майбутніх фахівців та їх самостійне навчання.

У процесі навчання курсу «Математичні основи інформатики» використовуються методи побудови математичних моделей реальних об'єктів; аксіоматичний метод – встановлення істинності/хибності тверджень. В ході навчальної діяльності використовуються такі форми організації навчальної діяльності студентів, як проектно-дослідницький підхід; змішане навчання; групові форми роботи, відповідно засоби навчання – система динамічної математики GeoGebra та інші системи комп'ютерної математики (за потреби), в процесі чого відбувається ефективність навчання математичних основ інформатики. Доступ до системи GeoGebra можливий з мобільного пристрою, з використанням експериментальної версії *geogebra*mobile (<http://www.geogebra.org/mobile/>). З метою вдосконалення сервісу для зберігання, перегляду, використання та обміну електронними відкритими дидактичними матеріалами, розробленими за допомогою GeoGebra, було створено платформу GeoGebraTube (<http://www.geogebra.org/tube>). Користувачі мають можливість завантажувати власні матеріали або створювати їх в режимі online.

В процесі дослідження розроблено пропедевтичні задачі та розміщено їх на платформі GeoGebraTube з метою підвищення ефективності навчання математичних основ інформатики з використанням системи комп'ютерної математики GeoGebra та здійснено класифікацію таких задач. Для кожного класу задач наведено правило-орієнтир та відповідний перелік алгоритмів (<https://www.geogebra.org/m/wtChjjgU#chapter/213521>) [рис.2]. В ході дослідження пропонується використання правил-орієнтирів, пов'язаних із внесенням до навчання компонентів, характерних для прикладної діяльності: використання евристичних міркувань, застосування математичного моделювання як основи навчання курсу та методу розв'язування прикладних задач, розвиток математичних вмінь та навичок, потрібних для розв'язування прикладних задач; дії, що притаманні професійно-навчальній діяльності (навички планування та коригування діяльності, самостійної роботи, творчої діяльності, роботи із комп'ютерними програмами); дії, пов'язані з моделюванням геометричних ситуацій.

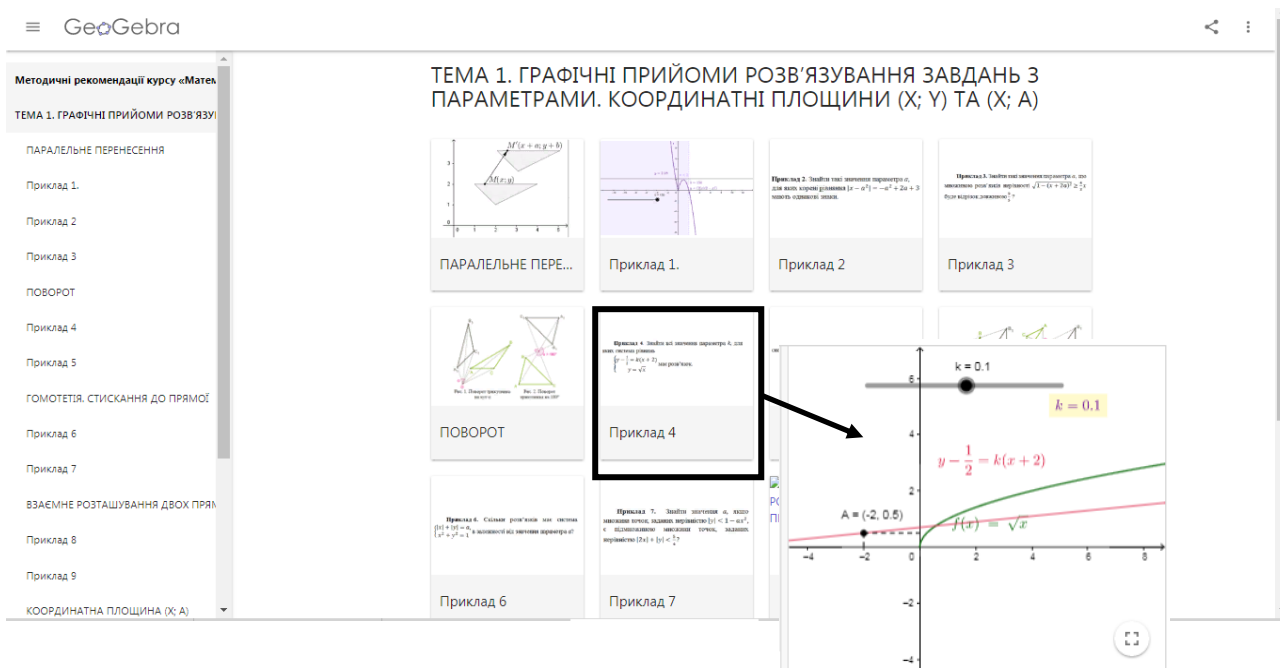


Рис. 2. Фрагмент курсу на платформі GeoGebraTube

Для розв'язування практичних завдань виробництва, планування, проектування, управління, проведення відповідних досліджень розроблено математичні моделі та алгоритми. Для кожного класу задач існує узагальнена схема розв'язування задачі, перелік алгоритмів.

Детальніше розглянуто приклади розв'язування задач з використанням системи GeoGebra.

Приклад 1. Знайти всі значення параметра $a \geq 0$, при кожному з яких система рівнянь $\begin{cases} (|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 = a^2, \\ |x + y| + |x - y| = 2 \end{cases}$ має рівно чотири розв'язки.

Розв'язання. Фіксована множина $|x + y| + |x - y| = 2$ – квадрат із стороною 2, точка перетину діагоналей співпадає з початком координат.

$(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ – коло з центром у точці $C(a, a)$ та радіусом $R = |a|$.

$(|x| - a)^2 + (|y| - a)^2 = a^2$ – параметрична сім'я кіл, центри яких знаходяться на прямих $x = y$ та $x = -y$, а радіус дорівнює a ($a \geq 0$ за умовою).

Чотири спільні точки множини можуть мати у двох випадках зображених на рис. 3, 4.

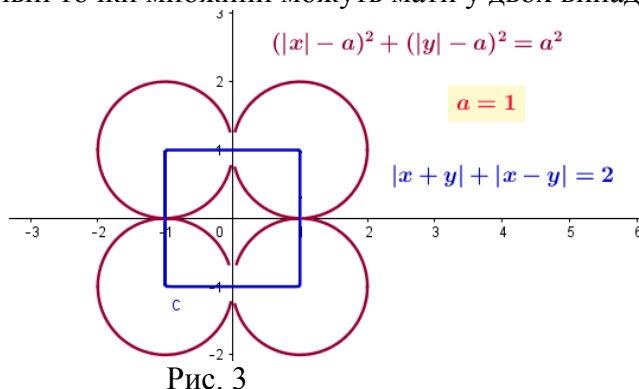


Рис. 3

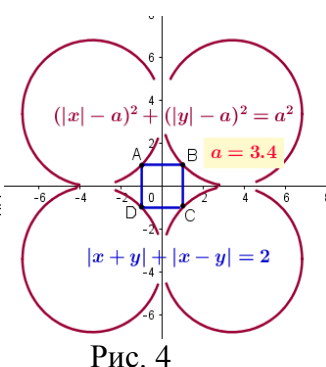


Рис. 4

Приклад 2. Дано коло $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$. Побудувати симетрію відносно осей x та y , прямої $x = y$ та точки O (рис. 5).

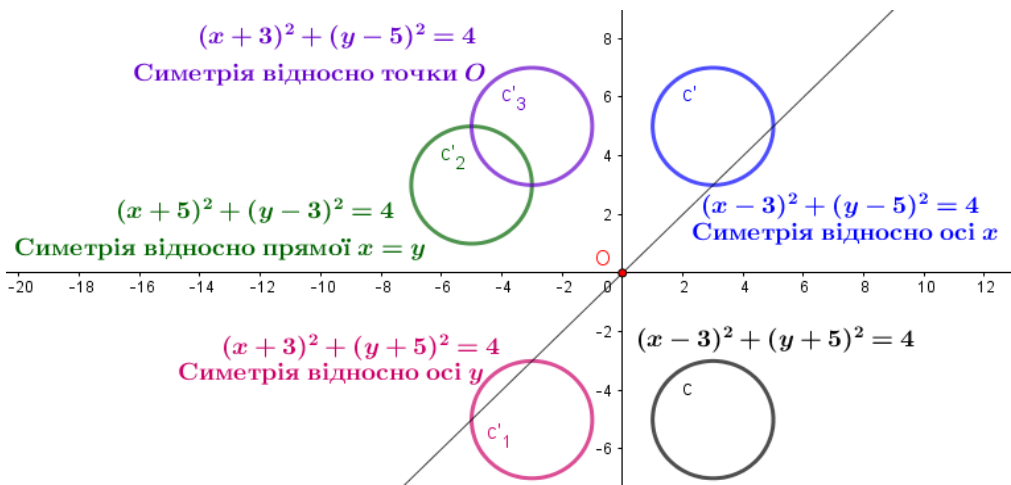


Рис. 5. Симетрія кола

Приклад 3. Знайти центр кола, діаметром якого є спільна хорда двох кіл, заданих рівняннями $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2 = 0$ та $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$. (рис. 6)

З використанням системи GeoGebra значно спрощується знаходження розв'язку даної задачі (рис. 7).

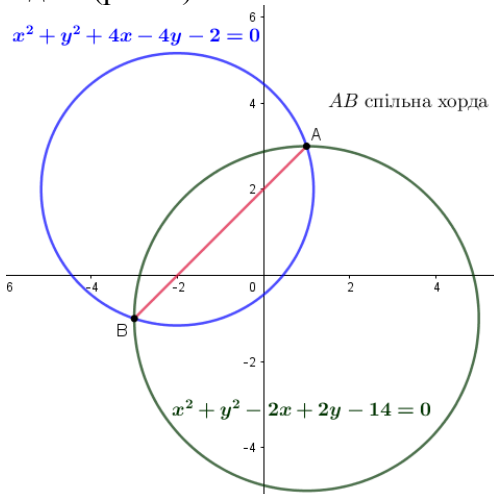


Рис. 6

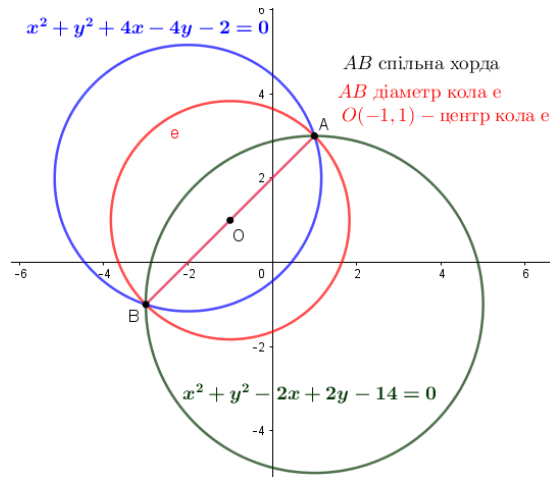


Рис. 7

Приклад 4. Кулю, радіус якої 21 см, перетнуто площиною на відстані 9 см від центра. Знайти площу перерізу (рис. 8).

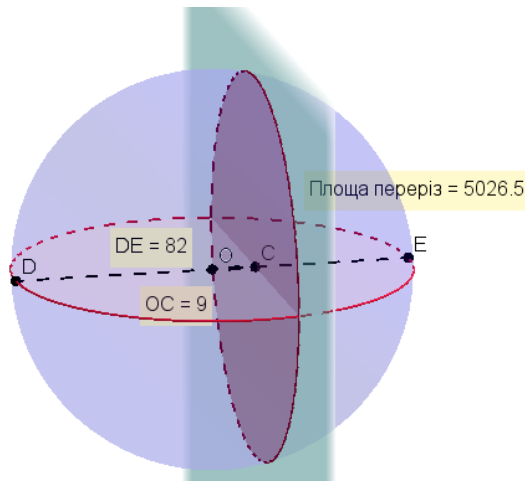


Рис. 8. Переріз кулі

Приклад 5. Радіуси куль дорівнюють 25 см і 29 см, а відстані між їх центрами 36 см. Знайти довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні (Рис. 9).

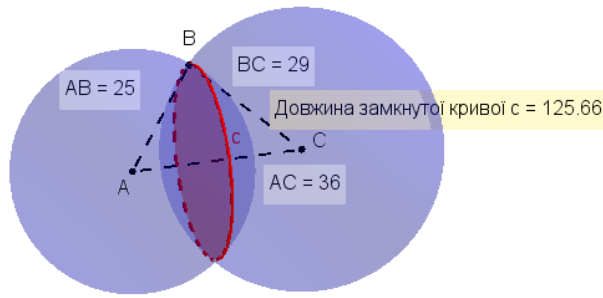


Рис. 9. Перетин двох куль

Систему GeoGebra доцільно використовувати в процесі розв’язування задач алгебри та геометрії, а також задач прикладного спрямування.

Сутність прикладної спрямованості курсу полягає в здійсненні міжпредметних зв’язків. Основним методом реалізації прикладної спрямованості курсу є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – прикладні (ситуаційні) задачі, розв’язування яких потребує глибоких знань як з математики, так і з інших дисциплін. Курс «Математичні основи інформатики» має варіативний, міждисциплінарний характер і орієнтований на студентів фізико-математичного профілю.

Наприклад, нехай (рис. 10) $\Omega = \{(x_j, y_j) | x_j \in \overline{1,3}, y_j \in \overline{1,3}\} \subset R^2$,

$$S = \left\{ A \mid A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (x_i, y_j) \right\}, I \subset \{1,2,3\},$$

$$J \subset \{1,2,3\} = \left\{ A \mid A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} H_{ij}, I \subset \{1,2,3\}, J \subset \{1,2,3\} \right\},$$

$H_{ij} = \{(x_i, y_j)\}, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}$ – односточкові підмножини розглядуваної скінченної множини Ω .

Нехай на S задана ймовірнісна міра $P(\{(x_i, y_j)\}) = \frac{1}{9}$ для всіх $i \in \overline{1,3}, j \in \overline{1,3}$. Нехай $G = (-\infty, x) \times (-\infty, y) \in \tilde{S} \supset S, G \in \bar{S}$.

Покладемо $\alpha = 0$.

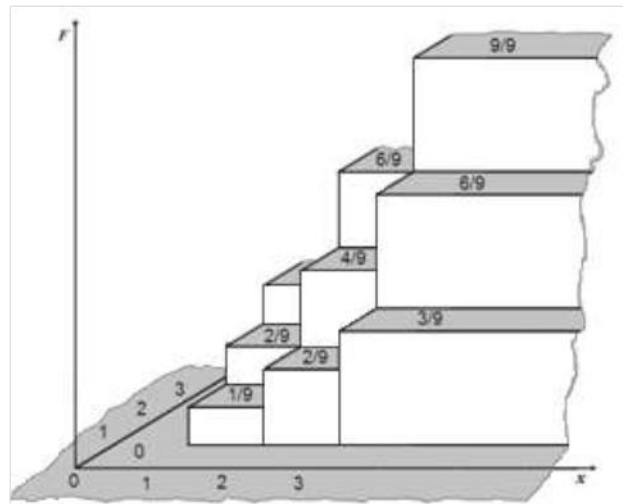
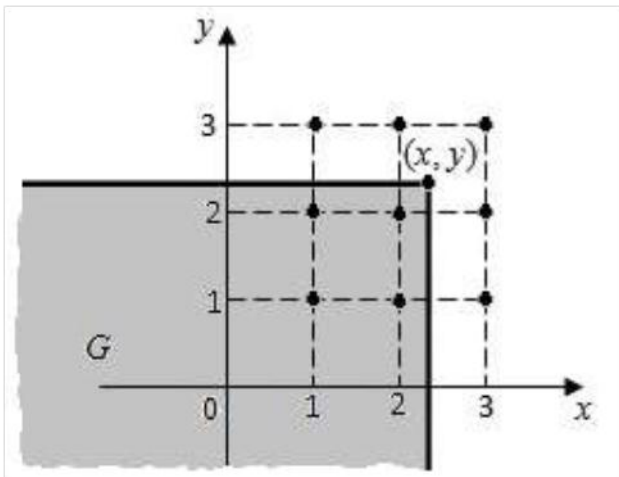


Рис. 10, 11. Поверхня $z = F(x, y)$

Тоді одержимо

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 1 \text{ або } y \leq 1, \\ \frac{1}{9}, & \text{коли } 1 < x \leq 2 \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ \frac{2}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ & \text{або } 1 < x \leq 2 \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{3}{9}, & \text{коли } 3 < x \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ & \text{або } 1 < x \leq 2 \text{ і } 3 < y, \\ \frac{4}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{6}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 3 < y, \\ & \text{або } 3 < x \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{9}{9}, & \text{коли } 3 < x \text{ і } 3 < y. \end{cases}$$

Графічне зображення поверхні $z = F(x, y)$ показано на рис. 11.

Якщо множина Ω скінченна,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^s (\{(x_j, y_j)\}),$$

і на ній задано поточковий розподіл імовірностей, тобто задані імовірності $P((x_j, y_j))$, $i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, s}$, тоді функція поточкового розподілу ймовірностей на множині за точками (x_j, y_j) , $i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, s}$, буде кусково сталою і множина її значень буде скінченна.

У дібраних ситуаційних задачах, що розглядаються з використанням системи GeoGebra показано відповідні математичні моделі та алгоритми в контексті діяльнісного підходу до навчання та підготовки майбутніх вчителів математики. Навчання математичних основ інформатики є педагогічно виваженим та методично вмотивованим з використанням у навчальному процесі системи динамічної математики GeoGebra сприяє вдосконаленню процесу навчання та застосуванню основних методів, понять математичних основ інформатики під час вирішення проблем навчання більшості предметів, що вивчають майбутні вчителі математики та сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності молоді.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Верховна Рада України. (2017, Лип.11) Закон № 2122-VIII, Про вищу освіту України [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/en/1556-18>
2. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., Конкретная математика. Основание информатики, М, Мир, 1998.
3. Гриб'юк О. О. Використання систем комп'ютерної математики у контексті моделі змішаного навчання / О.О. Гриб'юк, В.Л. Юнчик // Математика. Інформаційні технології. Освіта: [зб. статей] / СНУ імені Лесі Українки. – Луцьк – Світязь, 2015. – С. 52 - 71.
4. Гриб'юк О. О. Дослідницький підхід у навчанні з використанням системи динамічної математики GeoGebra. / О.О. Гриб'юк В.Л. Юнчик // Актуальні питання гуманітарних наук: міжвузівський збірник наукових праць молодих вчених Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка / [редактори-упорядники В. Ільницький, А. Душний, І. Зимомря]. – Дрогобич : Посвіт, 2016. – Вип. 15. – С. 284-298
5. Гриб'юк О. О. Евристичні задачі з використанням системи динамічної математики GeoGebra в контексті STEM-освіти / О. О. Гриб'юк, В. Л. Юнчик // Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук-практ.

- конф., 26-27 листопада 2015 р. / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця: Планер, 2015. – С. 148 – 152.
6. Гриб'юк О. О. Проектно-дослідницька діяльність в процесі навчання математики з використанням системи динамічної математики GeoGebra/ О.О. Гриб'юк В.Л. Юнчик // Наукові записки. – Випуск 9. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 2. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2016. – С. 8–19
7. Гриб'юк О. О. Розв'язування евристичних задач в контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra / О. Гриб'юк, В. Юнчик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців : методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 43. – Київ-Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 206–218.
8. Гриб'юк О. О. Особливості використання системи GeoGebra в процесі навчання курсу «Математичні основи інформатики» / О.О. Гриб'юк, В.Л. Юнчик // Математика. Інформаційні технології. Освіта: [зб. статей] / СНУ імені Лесі Українки. – Луцьк – Світязь, 2017. – С.34-49.
9. Гриб'юк О.О. Стандартизація докторських освітньо-наукових програм та вимоги щодо підготовки докторів філософії. / Гриб'юк О.О. // Європейські принципи і стандарти підготовки публічних управлінців: орієнтири для України: матеріали щоріч. наук.-практ. конф. за міжнар. участю (Київ, 5-6 листоп. 2015р.) / [за заг. ред. Ю.В.Ковбасюка, М.М.Білінської, В.М.Сороко, Л.А.Гаєвської] . – К.: НАДУ, 2015. – С. 62-64.
10. Выготский Л. С., Мышление и речь. М, Педагогика, Т.2, 1982.
11. Рашкевич Ю. М., Болонський процес та нова парадигма вищої освіти: монографія, Львів, Львівська політехніка, 2014.
12. Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.mif.pu.if.ua/study/training/686---i->
13. Ершов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование / Информатика и образование. – 1992. – № 5-6, С. 3-12.
14. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Винниченко // Посібник для вчителів. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. – 2009.
15. Ляшенко О.І. Сучасний зміст шкільної освіти: яким йому бути? / О.І. Ляшенко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2009. – №6. – С. 3–6, 2009.
16. Машбиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью. – Киев : Высшая школа. – 1987.
17. Полат Е.С. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина //: учебное пособие для вузов. Москва : Академия. – 2007.
18. Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки. Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://eenu.edu.ua/uk/structure/faculties-and-institutes/fakultet-informaciynih-sistem-fiziki-ta-matematiki?query=Математика>
19. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://math.univer.kharkov.ua/?page_id=53
20. Український центр оцінювання якості освіти, Офіційний звіт про проведення в зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/ofzvvit/>.
21. A. Schleicher. PISA 2012 Results in Focus What 15-year-olds know and what they can do with what they know, 2014. Access to the resource: www.oecd.org/pisa.

22. Anne-Katrien Koenen, Filip Dochy, Inneke Berghmans A phenomenographic analysis of the implementation of competence-based education in higher education // *Teaching and Teacher Education* Volume 50, August 2015, Pages 1-12
23. Djurdjica Takači Gordana Stankov Ivana Milanovic Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups // *Computers & Education* (ISSN 0360-1315), [Volume 82](#), March 2015, Pages 421-431.
24. Dostál, J. (2013). Inquiry-based education as a trend of contemporary education. *E-pedagogium*, Olomouc: Palacky University, III. 81-93.
25. Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.
26. Hrybiuk O. Yunchyk V. Integration of Research Problems Salvation Theory with the Utilization of Computer Oriented Study Environment // *Scientific Monograph E-learning Methodology - Implementation and Evaluation*, edited by Eugenia Smyrnova-Trybulska, University of Silesia, Studio Noa, Katowice-Cieszyn 2016 ISSN 2451-3644 (print edition) ISSN 2451-3652 (digital edition).
27. Ina V.S. Mullis. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics* / Ina V.S. Mullis, Michael O. Martin, Pierre Foy, and Alka Arora // Boston College, 2012.
28. Gerrit Stols *GeoGebra in a Nutshell* (from <http://school-maths.com>)
29. Hohenwarter, M., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2009). Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute [Article], *International Journal for Technology in Mathematics Education: Research Information Ltd.*
30. Irina Golitsyna Educational process in electronic information-educational environment// *Irina Golitsyna / Procedia - Social and Behavioral Sciences* 237 (2017) 939 – 944
31. Lily Orland-Barak Mediation in mentoring: A synthesis of studies in *Teaching and Teacher Education* / *Teaching and Teacher Education* Volume 44, November 2014, Pages 180-188