

Гриб'юк Олена Олександрівна
кандидат педагогічних наук, провідний
науковий співробітник Інституту
інформаційних технологій і засобів
навчання НАПН України

Юнчик Валентина Леонідівна
вчитель інформатики
Комунального закладу «Луцький
навчально-виховний комплекс №9»

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИЧНИМ ОСНОВАМ ІНФОРМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯ GEOGEBRA В КОНТЕКСТІ РЕФОРМУВАННЯ СИСТЕМИ ВИЩОЇ ОСВІТИ

Аналізуються особливості навчання курсу «Математичні основи інформатики» в процесі підготовки майбутніх вчителів математики в контексті впровадження нових стандартів вищої освіти. Ґрунтовно розглядається логічно-структурна схема навчального курсу «Математичні основи інформатики», відповідні засоби, методи навчання та основні змістові модулі. Аналізуються пропедевтичні завдання курсу «Математичні основи інформатики» та відповідні ситуаційні задачі з використанням системи динамічної математики GeoGebra. Пропонується система завдань із деталізацією відповідних математичних моделей та алгоритмів в контексті діяльнісного підходу до навчання та підготовки майбутніх вчителів математики.

Ключові слова: математичні основи інформатики; ситуаційні задачі; вища математика; GeoGebra; правило-орієнтир; система динамічної математики; компетентність; методика навчання математики; теорія розв'язування дослідницьких задач; верифікація; редукція; трансформація; теорія моделей лінійної алгебри; аналіз; синтез; міжпредметні зв'язки.

Grybyuk O.O., Yunchyk V.L. Teaching mathematical fundamentals of informatics on using GeoGebra in the context of reforming the higher education system.

The peculiarities of the course "Mathematical Fundamentals of Informatics" in the process of preparation of future teachers of mathematics in the context of introduction of new standards of higher education are analyzed. The logical-structural scheme of the training course "Mathematical Foundations of Informatics", the corresponding means, methods of training and main content modules is thoroughly considered. The propaedeutic tasks of the course "Mathematical Foundations of Informatics" and corresponding situational problems using the system of dynamic mathematics GeoGebra are analyzed. A system of tasks is proposed with the details of the corresponding mathematical models and algorithms

in the context of the activity approach to the training and preparation of future mathematics teachers.

Key words: *mathematical fundamentals of informatics; situational tasks; higher mathematics; GeoGebra; rule-benchmark; system of dynamic mathematics; competence; methodology for teaching mathematics; the theory of solving research problems; verification; Reduction; transformation; the theory of models of linear algebra; analysis; synthesis; interpersonal connections.*

Однією з основних задач вищих навчальних закладів є підготовка майбутніх фахівців. В процесі підготовки вчителя математики необхідно враховувати особливості та умови навчання, виховання та формування особистості професіонала в контексті сучасного ринку праці. Розглядаючи характер і зміст праці вчителів математики в умовах інформаційного суспільства, потрібно враховувати цілі та зміст навчання, організаційні форми, методи, прийоми та засоби професійної підготовки майбутніх вчителів математики. Сучасна школа потребує фахівців, здатних сприяти розвитку самостійної і відповідальної особистості людини, вихованню її творчої індивідуальності. Сьогодні неможливо вирішувати проблеми, що виникають у процесі конструювання й організації навчально-виховного процесу традиційними способами, спираючись тільки на власний досвід; необхідно враховувати соціальні й культурні, регіональні потреби підростаючого покоління, інновації та міжнародний досвід із використанням окремих аспектів систем динамічної математика в процесі навчання майбутніх вчителів математики (Carina Granberg, Jan Olsson, Djurdjica Такачі, Gerrit Stols, Hohenwarter M) [27], [28]; аналізу системи компетентностей в процесі підготовки вчителів математики (Anne-Katrien Koenen, Belz H., Siegrist M, Kerimbayev N.) [22]; особливостей дослідницької діяльності в сучасній освіті (Dostál J., Felder R. M., Solomon B. A.) [24]; особливості використання когнітивних аспектів математичного мислення студентів (Duval R, Engelkamp J.) [25]; використання окремих компонентів комп'ютерно орієнтованих систем в процесі навчання студентів (Gonzalo Almerich, Inge Molenaar, Irina Golitsyna, Lily Orland-Barak) [29], [30].

На основі аналізу навчальних програм з математики [12], [18], [19], результати зовнішнього незалежного оцінювання [20] та результатів навчання українських школярів у міжнародному дослідженні TIMSS [26] можна констатувати недостатньо високий рівень знань з математики. Безперечно, навчальні програми

потребують розвантаження від другорядного матеріалу, переорієнтації змісту в контексті світоглядної функції природничих та математичних наук, профілізації математичних дисциплін до прикладного спрямування. Усі зазначені аспекти стосуються також рівня стандарту у вищих навчальних закладах. Посилаючись на закон України про вищу освіту [1] виникає необхідність впровадження навчального курсу «Математичні основи інформатики» із врахуванням пропедевтичного матеріалу щодо теорії розв'язування дослідницьких задач. В курсі «Математичні основи інформатики» дібрано відповідні ситуаційні задачі, в тому числі задачі з параметрами, що розв'язуються з використанням численних математичних методів та окремих компонентів комп'ютерно орієнтованої системи навчання математики. Напрямом наукових досліджень теоретичних основ інформатики є математичні моделі і засоби, що використовуються для моделювання та дослідження інформаційних процесів у різних сферах діяльності людини. В даному курсі вивчаються основні моделі, методи і алгоритми розв'язування задач, що виникають у сфері інтелектуалізації інформаційних систем, а також розглядаються проблеми використання інформаційних, зокрема математичних, моделей та інформаційних технологій для їх дослідження (рис 1.).



Рис. 1. Логічно-структурна схема навчального курсу «Математичні основи інформатики»

Нижче запропоновано короткі анотації щодо тем навчального курсу «Математичні основи інформатики» (таблиця 1).

Таблиця 1

Тема 1. Теорія розв’язування дослідницьких задач
<p>Задача про ханойську вежу. Розглядаються особливості розв’язування задачі про ханойську вежу із використанням сукупності рекурентностей. Пропонуються можливі способи розв’язування рекурентних співвідношень. Пропонується доведення рекурентного співвідношення з використанням методу математичної індукції.</p>

Задача про розрізання піци. Розглядається геометрична задача поділу області на частини з використанням числа прямих. Розглядається знаходження розв'язку в замкнутій формі з використанням величини S_n , що дорівнює сумі перших n додатних цілих чисел та складено таблицю для кількох перших чисел. Аналізується означення замкнутої форми та наводяться відповідні приклади.

Тема 2. Суми та рекурентності

Перетворення сум. Розглядається означення суми, способи запису та позначення з усіма їх елементами. Демонструються різні способи знаходження сум в узагальненому сигма-поданні. Показано зв'язок між сумами та рекурентностями із використанням відповідних співвідношень. Розглядаються основні правила знаходження суми з використанням розподільного, сполучного та переставного законів та наводяться відповідні приклади. Ґрунтовно описується знаходження суми геометричної прогресії.

Загальні методи сумування. Розглядається знаходження значення виразу для суми перших n квадратів (\square_n) різними способами: Метод 1: вгадування відповіді з підтвердженням з математичної індукції. Метод 2: метод перетворення (виокремлено перший і останній члени \square_{n+1} , для того щоб отримати рівняння відносно \square_n). Метод 3: узагальнення рекурентних співвідношень. Метод 4: заміна сум інтегралами (зв'язок між \sum та \int). Метод 5: ускладнення і спрощення (заміна початкової суми складнішою на перший погляд подвійною сумою). Метод 6: обчислення кінцевих різниць. Метод 7: використання похідних функцій.

Тема 3. Бінарні операції

Розглядається бінарна операція mod та приклади її використання. Описується знаходження частки від ділення, алгоритм виведення загальної формули. Демонструється найважливіша алгебраїчна властивість операції mod (розподільний закон) та наводяться відповідні приклади.

Тема 4. Елементи теорії чисел

Описуються основні елементи теорії чисел. Розглядається співвідношення подільності: найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне чисел. Пропонується рекурентне визначення числа Евкліда та записується їх послідовності. Розглядається розкладання на прості множники складених виразів, факторіалів. Демонструється таблиця перших десяти факторіальних

функцій та зазначається кілька основних факторіальних фактів.

Тема 5. Спеціальні числа

Розглядаються основні пункти теорії дійсних та комплексних чисел, в тому числі: числа Ейлера, Бернуллі та Фібоначчі.

Числа Ейлера. Числа Ейлера $\langle n \rangle_k$ – утворюють трикутники коефіцієнтів, що подібні біноміальним коефіцієнтам $\binom{n}{k}$ із трикутника Паскаля. Розглядається таблиця чисел трикутник Ейлера. Описується процес знаходження рекурентності для $\langle n \rangle_k$. Розглядається таблиця трикутник чисел Ейлера другого порядку. Визначаються многочлени Стерлінга за правилом та наводяться основні формули.

Числа Бернуллі. Демонструється послідовність чисел Якоба Бернуллі, що має певну закономірність в сумі m -них степенів натуральних чисел, що і зазначається в лекції. Формули Бернуллі доводяться з використанням індукції по m , застосовуючи метод перетворення. Демонструється зв'язок чисел Бернуллі з числами Стерлінга.

Числа Фібоначчі. Розглядається послідовність Фібоначчі та їх рекурентні співвідношення. Наводиться приклад природного виникнення чисел Фібоначчі. Демонструється доведення за індукцією співвідношення Кассіні, що лежить в основі геометричного парадоксу (головоломка Льюїса Керрола). Описується доведення леми Матіасевича. Демонструється система Фібоначчі числення та приклади від 1 до 20.

Тема 6. Дискретна ймовірність

Математичне сподівання і дисперсія. Описується означення дискретності, ймовірнісного простору, розподілу ймовірності, елементарних подій, середнього арифметичного, медіани, моди. Описується означення математичного сподівання та дисперсії та наводяться відповідні приклади. В нерівності Чебишева встановлюється важлива властивість дисперсій.

Хешування. Описується взаємозв'язок теорії ймовірності та програмування. Підставою ряду важливих алгоритмів зберігання і вибірки даних в ЕОМ є метод хешування. Хешування описує як пришвидшити пошук потрібних даних, приклади яких наводяться в лекції. Зазначається поняття аналізу алгоритмів та ймовірнісного аналізу алгоритмів. Наводяться кілька випадків пошуку.

Тема 7. Асимптотика

Два асимптотичні приклади. Означується поняття асимптоти. Демонструються основні асимптотичні приклади. Наводяться асимптотичні рекурентні співвідношення.

Формула сумування Ейлера. Описується загальний метод апроксимації сум, що був вперше опублікований Леонардом Ейлером. Розглядається я та доводиться його загальна формула.

Тема 8. Похідні функцій

Метод роботи з послідовностями – перетворення нескінченних рядів.

Розв'язування рекурентних співвідношень. Демонструється найважливіше застосування похідних функцій – розв'язування рекурентних співвідношень. Покроково описується як з використанням похідних для рекурентного співвідношення $\langle g_n \rangle$ можна отримати вираз g_n через n в замкненому вигляді. Наводяться приклад чисел Фібоначчі, що розв'язуються даним методом. Формулюється та доводиться теорема про розкладання раціональних функцій в випадку знаходження різних коренів. Наводиться загальна теорема про перетворення раціональних похідних функцій. Наводиться приклад довільного рекурентного співвідношення та приклад взаємних рекурентних послідовностей. Розглядаються приклади рекурентних співвідношень.

Функції Діріхле. Описується похідна функції Діріхле, зазначається її загальний вигляд. Описується корисність похідної функції Діріхле, коли вона є мультиплікативною функцією. Перетворення ПФД в простими числами.

Тема 9. Біноміальні коефіцієнти

Твірні функцій. Описується поняття твірної функції з використанням степеневого ряду. Розглядаються означення та основні формули узагальненого біноміального ряду та узагальненого експоненційного ряду та їх застосування. Розглядаються часткові загальні результати даних рядів. Розглядаються формули чисел Каталана та наводиться їх послідовність.

Гіпергеометричні функції. Розглядається уніфікований принцип для систематизації методів для знаходження суми біноміальних коефіцієнтів, гіпергеометричні ряди. Зазначається узагальнений гіпергеометричний ряд та описуються всі його величини. Використовується модифікована функція Бесселя, вироджений та гаусовий гіпергеометричні ряди. Розглядається формули Куммера та Діксона для комплексних чисел.

Гіпергеометричні перетворення. Демонструється перетворення однієї гіпергеометричної функції з різними параметрами. Аналізується закон симетрії, формула Куммера для здійснення перетворень. Наводяться різні приклади гіпергеометричних перетворень.

Аналізуючи навчальні плани підготовки бакалаврів вищих навчальних закладів (Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки [18], Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» [12], Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна [19] та інші), а також посилаючись на логічно-структурну схему навчального курсу «Математичні основи інформатики» (Рис. 1) приходимо до висновку, що даний курс доцільно упроваджувати для підготовки майбутніх вчителів математики на другому курсі в першому семестрі (вибіркові навчальні дисципліни циклу дисциплін фундаментальної, природничо-наукової підготовки).

Метою навчального курсу «Математичні основи інформатики» є ознайомлення студентів з фундаментальними поняттями, основними означеннями і математичними методами інформатики – фундаментальної природничої науки, що вивчає процеси передавання та опрацювання даних. В процесі навчання даного курсу студенти ознайомлюються з теоретичним матеріалом, вивчають закони і добирають методи опрацювання даних, будують математичні моделі інформаційних систем для конкретних технічних, соціальних і фізичних систем, вивчають лінійні оптимізаційні моделі, завдання дискретної оптимізації, теорію алгоритмів.

Основними завданнями навчального курсу «Математичні основи інформатики» є формування знань, вмінь та навичок, необхідних для раціональної роботи з програмними засобами загального призначення в майбутній фаховій діяльності; формування системного уявлення про математичну базу інформатики; формування вміння розв'язувати дослідницькі та практичні задачі; розвиток здатності до проектної, дослідницької діяльності майбутніх фахівців та їх самостійне навчання.

У процесі навчання курсу «Математичні основи інформатики» використовуються методи побудови математичних моделей реальних об'єктів; аксіоматичний метод – встановлення істинності/хибності тверджень. В ході навчальної діяльності використовуються такі

форми організації навчальної діяльності студентів, як проектно-дослідницький підхід; змішане навчання; групові форми роботи, відповідно засоби навчання – система динамічної математики *GeoGebra* та інші системи комп'ютерної математики (за потреби), в процесі чого відбувається ефективність навчання математичних основ інформатики. Доступ до системи GeoGebra можливий з мобільного пристрою, з використанням експериментальної версії *geogebra mobile* (<http://www.geogebra.org/mobile/>). З метою вдосконалення сервісу для зберігання, перегляду, використання та обміну електронними відкритими дидактичними матеріалами, розробленими за допомогою GeoGebra, було створено платформу *GeoGebraTube* (<http://www.geogebraTube.org>). Користувачі мають можливість завантажувати власні матеріали або створювати їх в режимі online.

В процесі дослідження розроблено пропедевтичні задачі та розміщено їх на платформі *GeoGebraTube* з метою підвищення ефективності навчання математичних основ інформатики з використанням системи комп'ютерної математики *GeoGebra* та здійснено класифікацію таких задач. Для кожного класу задач наведено правило-орієнтир та відповідний перелік алгоритмів (<https://www.geogebra.org/m/wtChjgU#chapter/213521>). В ході дослідження пропонується використання правил-орієнтирів, пов'язаних із внесенням до навчання компонентів, характерних для прикладної діяльності: використання евристичних міркувань, застосування математичного моделювання як основи навчання курсу та методу розв'язування прикладних задач, розвиток математичних вмінь та навичок, потрібних для розв'язування прикладних задач; дії, що притаманні професійно-навчальній діяльності (навички планування та коригування діяльності, самостійної роботи, творчої діяльності, роботи із комп'ютерними програмами); дії, пов'язані з моделюванням геометричних ситуацій.

Для розв'язування практичних завдань виробництва, планування, проектування, управління, проведення відповідних досліджень розроблено математичні моделі та алгоритми. Для кожного класу задач існує узагальнена схема розв'язування задачі, перелік алгоритмів. Нижче продемонстровано спрощений алгоритм знаходження об'єму параболоїда обертання (рис. 2) ситуаційної задачі.

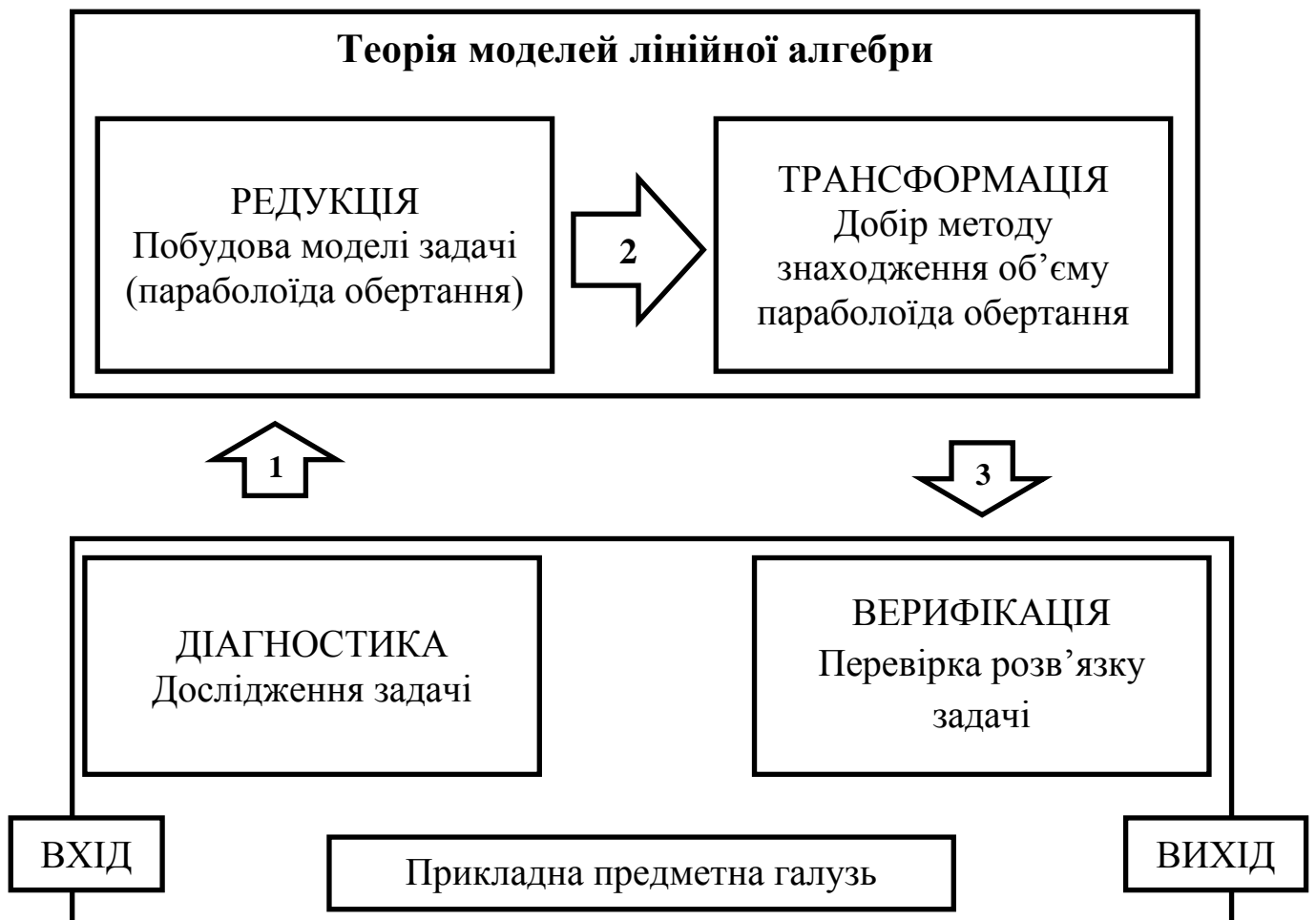


Рис. 2. Алгоритм знаходження об'єму параболоїда обертання

Добір практичного способу знаходження об'єму параболоїда обертання залежить від структури початкових даних, обсягу системи (кількості невідомих змінних) та обчислювального функціоналу комп'ютера.

Для даного класу задач використовується *варіативний алгоритмічний підхід*, що не залежить від змісту конкретних процедур його етапів. Етапи «*Діагностика*» і «*Верифікація*» відносяться до предметної галузі пропонованого завдання. Етапи «*Редукація*» і «*Трансформація*» відносяться до теорії лінійної алгебри. Переходи 1 і 3 потребують ґрунтовного повторення теоретичного матеріалу та розуміння теорії моделей та прикладної галузі їх застосування. Перехід 2 потребує вміння будувати моделі та здійснювати процес математичного моделювання.

Наприклад, пропонується завдання на обчислення об'єму параболоїда обертання.

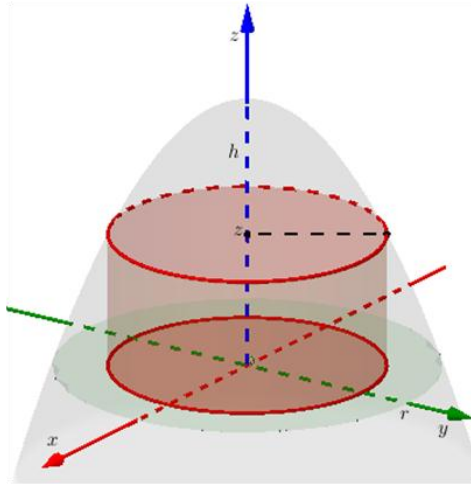


Рис. 3. Параболоїд обертання

Задано функцію $z = h \left(1 - \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) \right)$, $x^2 + y^2 \leq r^2$ (Рис. 3.)

Вказівка до розв'язування задачі:

$$f_{(x,y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & \text{коли } (x, y) \in G, \\ 0, & \text{коли } (x, y) \notin G \end{cases}$$

Якщо $x = 0$, тоді $z = h \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right)$, $\Rightarrow \frac{y^2}{r^2} = 1 - \frac{z}{h}$, $y = \pm r \sqrt{1 - \frac{z}{h}}$,

одержимо рисунок.

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \leq 0, \\ \frac{1}{\pi r^2} \left(\pi r^2 - \pi r^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right) = \frac{z}{h}, & \text{коли } z \in [0, h], \\ 1, & \text{коли } z \geq h. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \notin [0, h] \\ \frac{1}{h}, & \text{коли } z \in [0, h] \end{cases}$$

$$M[Y] = \int_0^h z \cdot \frac{1}{h} dz = \frac{h}{2}.$$

$$V = \iint_G h \left(1 - \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} \right) \right) dx dy = \frac{h}{2} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi r^2 h}{2}.$$

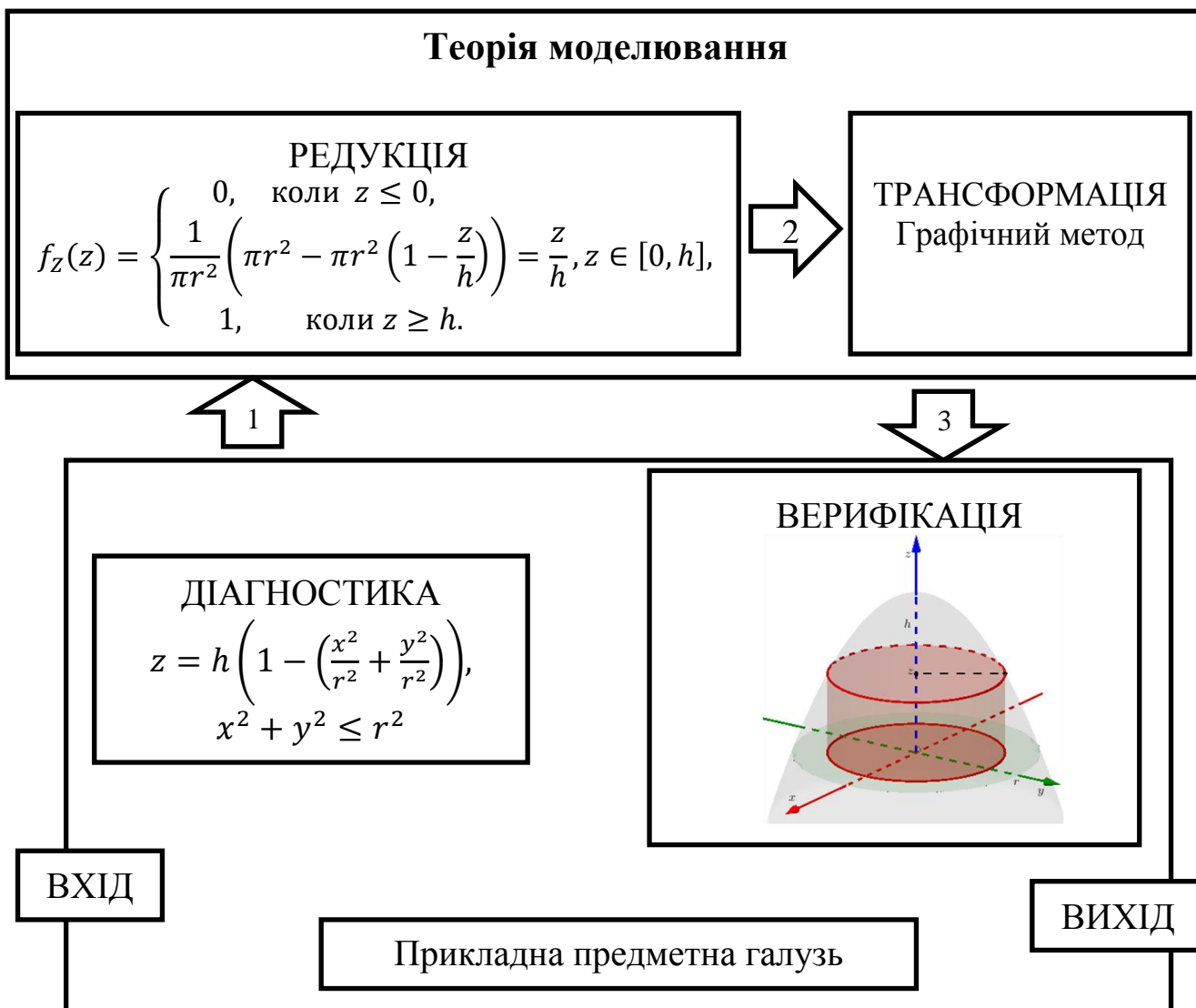


Рис. 3. Алгоритм знаходження об'єму параболоїда обертання

Сутність прикладної спрямованості курсу полягає в здійсненні міжпредметних зв'язків. Основним методом реалізації прикладної спрямованості курсу є метод математичного моделювання, а найбільш ефективним засобом – прикладні (ситуаційні) задачі, розв'язування яких потребує глибоких знань як з математики, так і з інших дисциплін. Курс «Математичні основи інформатики» має варіативний, міждисциплінарний характер і орієнтований на студентів фізико-математичного профілю.

Наприклад, нехай (рис. 4) $\Omega = \{(x_j, y_j) \mid x_j \in \overline{1,3}, y_j \in \overline{1,3}\} \subset R^2$,

$$S = \left\{ A \mid A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (x_i, y_j) \right\}, I \subset \{1,2,3\},$$

$$J \subset \{1,2,3\} = \left\{ A \mid A = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} H_{ij}, I \subset \{1,2,3\}, J \subset \{1,2,3\} \right\},$$

$H_{ij} = \{(x_i, y_j)\}, i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3\}$ – одноточкові підмножини розглядуваної скінченної множини Ω .

Нехай на S задана ймовірнісна міра $P(\{(x_i, y_j)\}) = \frac{1}{9}$ для всіх $i \in \overline{1,3}, j \in \overline{1,3}$. Нехай $G = (-\infty, x) \times (-\infty, y) \in \tilde{S} \supset S, G \bar{\in} S$.

Покладемо $\alpha = 0$.

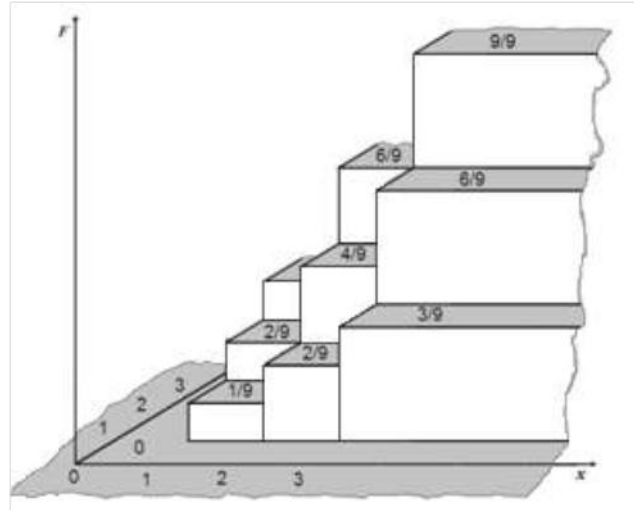
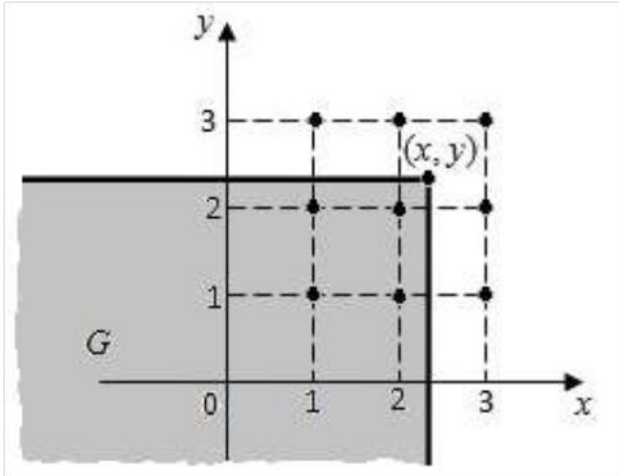


Рис. 4, 5. Поверхня $z = F(x, y)$

Тоді одержимо

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 1 \text{ або } y \leq 1, \\ \frac{1}{9}, & \text{коли } 1 < x \leq 2 \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ \frac{2}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ & \text{або } 1 < x \leq 2 \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{3}{9}, & \text{коли } 3 < x \text{ і } 1 < y \leq 2, \\ & \text{або } 1 < x \leq 2 \text{ і } 3 < y, \\ \frac{4}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{6}{9}, & \text{коли } 2 < x \leq 3 \text{ і } 3 < y, \\ & \text{або } 3 < x \text{ і } 2 < y \leq 3, \\ \frac{9}{9}, & \text{коли } 3 < x \text{ і } 3 < y. \end{cases}$$

Графічне зображення поверхні $z = F(x, y)$ показано на рис. 5.

Якщо множина Ω скінченна,

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^s (\{(x_j, y_j)\}),$$

і на ній задано поточковий розподіл імовірностей, тобто задані імовірності $P((x_j, y_j)), i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, s}$, тоді функція поточкового розподілу ймовірностей на множині за точками $(x_j, y_j), i \in \overline{1, m}, j \in \overline{1, s}$, буде кусково сталою і множина її значень буде скінченна.

У дібраних ситуаційних задачах, що розглядаються з використанням системи GeoGebra показано відповідні математичні моделі та алгоритми в контексті діяльнісного підходу до навчання та підготовки майбутніх вчителів математики. Навчання математичних основ інформатики є педагогічно виваженим та методично вмотивованим з використанням у навчальному процесі системи динамічної математики GeoGebra сприяє вдосконаленню процесу навчання та застосуванню основних методів, понять математичних основ інформатики під час вирішення проблем навчання більшості предметів, що вивчають майбутні вчителі математики та сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності молоді.

Список використаних джерел

1. Верховна Рада України. (2017, Лип.11) Закон № 2122-VIII, Про вищу освіту України [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://zakon3.rada.gov.ua/laws/show/en/1556-18>
2. Гальперин П. Я., Методы обучения и умственное развитие ребенка. М, МГУ, 1985.
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О., Конкретная математика. Основание информатики, М, Мир, 1998.
4. Hrybiuk O. *Mathematical modelling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.*
5. Гриб'юк О.О. Педагогічне проектування комп'ютерно орієнтованого середовища навчання дисциплін природничо-математичного циклу. /Гриб'юк О.О.// Наукові записки. – Випуск 7. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3. – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. – С. 38 – 50.

6. Гриб'юк О.О. Перспективи впровадження варіативних моделей комп'ютерно орієнтованого середовища навчання предметів природничо-математичного циклу у загальноосвітніх навчальних закладах України / Гриб'юк О.О. // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія педагогічна / [редкол.: П.С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – Випуск 22: Дидактичні механізми дієвого формування компетентнісних якостей майбутніх фахівців фізико-технологічних спеціальностей. – С. 184-190.
7. Гриб'юк О.О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О.О. Гриб'юк. – Рівне: РДГУ, 2010. – 207 с.
8. Гриб'юк О.О. Когнітивна теорія комп'ютерно орієнтованої системи навчання природничо-математичних дисциплін та взаємозв'язки вербальної і візуальної компонент / Гриб'юк О.О. // Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» – Додаток 1 до Вип.36, Том IV (64): Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – Київ: Гнозис, 2015. – С. 158-175.
9. Гриб'юк О.О. Стандартизація докторських освітньо-наукових програм та вимоги щодо підготовки докторів філософії. / Гриб'юк О.О. // Європейські принципи і стандарти підготовки публічних управлінців: орієнтири для України: матеріали щоріч. наук.-практ. конф. за міжнар. участю (Київ, 5-6 листоп. 2015р.) / [за заг. ред. Ю.В.Ковбасюка, М.М.Білінської, В.М.Сороко, Л.А.Гаєвської] . – К.: НАДУ, 2015. – С. 62-64.
10. Выготский Л. С., Мышление и речь. М, Педагогика, Т.2, 1982.
11. Рашкевич Ю. М., Болонський процес та нова парадигма вищої освіти: монографія, Львів, Львівська політехніка, 2014.
12. Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://www.mif.pu.if.ua/study/training/686---i->
13. Еришов А.П. Компьютеризация школы и математическое образование / Информатика и образование. – 1992. – № 5-6, С. 3-12.
14. Жалдак М.І. Математика з комп'ютером / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко // Посібник для вчителів. – К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова. – 2009.
15. Ляшенко О.І. Сучасний зміст шкільної освіти: яким йому бути? / О.І. Ляшенко // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2009. – №6. – С. 3–6, 2009.
16. Машибиц Е.И. Психологические основы управления учебной деятельностью. – Киев : Высшая школа. – 1987.
17. Полат Е.С. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования / Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина //: учебное пособие для вузов. Москва : Академия. – 2007.

18. Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки. Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://eenu.edu.ua/uk/structure/faculties-and-institutes/fakultet-informaciynih-sistem-fiziki-ta-matematiki?query=Математика>
19. Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна Навчальні плани підготовки бакалаврів математики [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://math.univer.kharkov.ua/?page_id=53
20. Український центр оцінювання якості освіти, Офіційний звіт про проведення в зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/ofzvrit/>.
21. A. Schleicher. *PISA 2012 Results in Focus What 15-year-olds know and what they can do with what they know*, 2014. Access to the resource: www.oecd.org/pisa.
22. Anne-Katrien Koenen, Filip Dochyenneke, Berghmans A phenomenographic analysis of the implementation of competence-based education in higher education // *Teaching and Teacher Education* Volume 50, August 2015, Pages 1-12
23. Djurdjica Takači Gordana Stankov Ivana Milanovic Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups // *Computers & Education (ISSN 0360-1315)*, [Volume 82](#), March 2015, Pages 421-431.
24. Dostál, J. (2013). *Inquiry-based education as a trend of contemporary education*. *E-pedagogium*, Olomouc: Palacky University, III. 81-93.
25. Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning*. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3-26.
26. Ina V.S. Mullis. *TIMSS 2011 International Results in Mathematics* / Ina V.S. Mullis, Michael O. Martin, Pierre Foy, and Alka Arora // Boston College, 2012.
27. Gerrit Stols *GeoGebra in a Nutshell* (from <http://school-maths.com>)
28. Hohenwarter, M., Jarvis, D., & Lavicza, Z. (2009). *Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra Software and the Establishment of the International GeoGebra Institute* [Article], *International Journal for Technology in Mathematics Education: Research Information Ltd.*
29. Irina Golitsyna *Educational process in electronic information-educational environment*// Irina Golitsyna / *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 237 (2017) 939 – 944
30. Lily Orland-Barak *Mediation in mentoring: A synthesis of studies in Teaching and Teacher Education* / *Teaching and Teacher Education* Volume 44, November 2014, Pages 180-188