

Ю.С. РУДЬ, д-р техн. наук, проф., В.Ю. БЕЛОНОЖКО, С.Ю. ОЛЕЙНИК, ст. преподаватели  
Криворожский национальный университет

## ОЦЕНКА МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГОРНЫХ ПОРОД НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ГОРНОДОБЫВАЮЩЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В работе ставится задача на основе модели кристаллического строения горных пород разработать метод оценки их механических характеристик, в т.ч. предела прочности горной породы  $\sigma_{сж}$  и модуля продольной упругости  $E$ .

Модель кристаллического строения вещества основана на ионной связи и характерна для значительной части горных пород, например для магнетита. Кубическая кристаллическая решетка магнетита сформирована анионами кислорода  $O_{2-}$ , с которыми соединены катионы железа  $Fe_{3+}$  и  $Fe_{2+}$ .

На основе модели кристаллического строения вещества разработан метод оценки механических характеристик горных пород, в т.ч. предела прочности и модуля продольной упругости горной породы. Прогнозная оценка механических характеристик горных пород по предлагаемой методике позволяет в дальнейшем исключить принятие грубых ошибочных технологических решений при проектных работах по добыче полезных ископаемых.

Для значительной части горных пород, в т.ч. и для магнетита, на примере которого показано прикладное значение разработанного авторами метода, характерна ионная связь между атомами [8, 9]. В кристаллах породы наблюдается ионная связь между положительными и отрицательными ионами. Ионы образуют кристаллическую решетку за счет того, что кулоновское отталкивание между ионами одного знака меньше, чем кулоновское притяжение между ионами противоположного знака.

Прогнозная оценка механических характеристик горных пород по предлагаемому методу позволяет исключить принятие грубых ошибочных технологических решений при проектных работах по добыче полезных ископаемых, сократить период подготовительных работ по проектированию горных предприятий.

**Ключевые слова:** горные породы, магнетит, механические характеристики, модель, кристалл, ион, предел прочности.

**Проблема и ее связь с научными и практическими задачами.** Для принятия эффективных технологических решений при добыче полезных ископаемых механическим разрушением необходима достоверная информация о свойствах горных пород в массиве. Главным и наиболее достоверным источником информации о механических характеристиках горных пород являются экспериментальные исследования образцов [1,2]. Однако для организации и проведения экспериментальных исследований необходимы значительные затраты времени, а результаты исследований образцов, как правило, не дают одинаковых результатов даже при использовании практически идентичных образцов горной породы при одинаковых условиях проведения эксперимента. Это обусловлено естественной неоднородностью материала породы, а также тем, что диапазон напряжений, в котором исследуются механические свойства горных пород, определяется через средние значения предела прочности испытываемой породы при одноосном сжатии образцов. В то же время предел прочности реальных образцов горной породы может сильно отличаться от его среднего значения, что приводит к снижению точности результатов измерений.

Механические свойства горной породы, как твердого тела, связаны с ее структурой, с молекулярными силами сцепления ее компонент. Под структурой горной породы понимают совокупность особенностей ее строения, обусловленных формой, размерами и пространственными взаимоотношениями отдельных составных кристаллических частиц породы: минералов и нераскристаллизованного их остатка - стекла, что все вместе определяет ее механические свойства [3]. Следовательно, открывается новое направление в методах определения механических свойств горных пород на основе модели их кристаллического строения.

**Анализ исследований и публикаций.** Наиболее распространенным методом общей оценки механических характеристик горных пород является испытание горных пород на одноосное сжатие. Максимальная нагрузка, приходящаяся на единицу площади сжимаемого образца в момент его разрушения, является временным сопротивлением породы одноосному сжатию  $\sigma_{сж}$  или пределом прочности породы на одноосное сжатие [4,5]. Нагрузку на образцы правильной кубической или цилиндрической формы создают с помощью гидравлического пресса. В процессе испытаний определяют пределы прочности при сжатии  $\sigma_{сж}$  и растяжении  $\sigma_r$ , модуль продольной упругости  $E$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Соответствующие величины находят расчетным путем по уравнениям

$$\sigma_{сж} = F_{\max}/S; \quad \sigma_p = F_{\max}/S; \quad E = F_{\max}\Delta l/S; \quad \nu = l\Delta d/d\Delta l, \quad (1)$$

где  $F_{\max}$  - максимальная нагрузка на образец;  $S$  - площадь поперечного сечения образца;  $l, d$  - длина и диаметр образца;  $\Delta d$  и  $\Delta l$  - изменения диаметра и длины образца, соответствующие изменению нагрузки на величину  $\Delta F$ .

Согласно действующим стандартам для определения прочности горных пород на сжатие требуется испытывать от 6 до 10 образцов из каждого слоя породы [4]. Поэтому для обеспечения необходимой повторяемости результатов испытаний суммарная длина скважины, из которой получают образцы, в несколько раз превышает полезную длину столбиков керна требуемых размеров [6].

Таким образом, применяемые в настоящее время методы общей оценки механических характеристик горных пород отличаются значительной трудоемкостью процесса подготовки образцов горных пород к испытаниям и проведения самих испытаний, не обеспечивая при этом необходимой точности полученных результатов, требуют значительных временных, материальных и финансовых затрат.

Авторами работы [6] предложен метод определения физико-механических свойств горных пород на основе модели кристаллического строения вещества. Однако некоторые положения этой работы требуют уточнения.

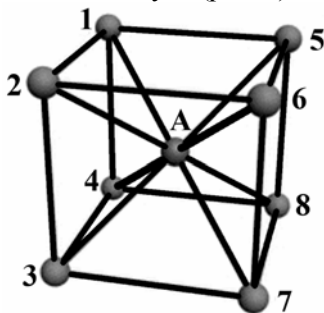
**Цель и задачи исследования.** В работе ставится задача на основе модели кристаллического строения горных пород разработать метод оценки их механических характеристик, в т.ч. предела прочности горной породы  $\sigma_{сж}$  и модуля продольной упругости  $E$ , на ранних стадиях проектирования горнодобывающего предприятия.

**Изложение материала и результаты.** Построение модели кристаллической структуры горной породы. Реальный кристалл горной породы состоит из дискретных частиц-атомов. При исследовании упругих свойств кристаллов их можно считать однородной непрерывной средой. Данное приближение в физике твердого тела называют континуальным приближением. При таком приближении для описания состояния кристалла можно использовать закон Гука и второй закон Ньютона [7].

Для значительной части горных пород, в т.ч. и для магнетита, на примере которого показано прикладное значение разработанного авторами метода, характерна ионная связь между атомами [8,9]. В кристаллах породы наблюдается ионная связь между положительными и отрицательными ионами. Ионы образуют кристаллическую решетку за счет того, что кулоновское отталкивание между ионами одного знака меньше, чем кулоновское притяжение между ионами противоположного знака.

Следовательно, ионная связь - это связь, которую обуславливает в основном электрическое взаимодействие противоположно заряженных ионов. Магнетит представляет собой закись-окись железа  $Fe_3O_4$  и относится к семейству минералов кубической сингонии [10].

В кубической сингонии решеток Браве магнетит имеет кубическую объёмно-центрированную решетку (ОЦР) которая содержит дополнительно один атом на пересечении пространственных диагоналей куба (рис. 1).



**Рис. 1.** Число формульных единиц для атома А в объёмно-центрированной кубической кристаллической решетке магнетита

Кубическая кристаллическая решетка магнетита сформирована анионами кислорода  $O_{2-}$ , с которыми соединены катионы железа  $Fe_{3+}$  и  $Fe_{2+}$ .

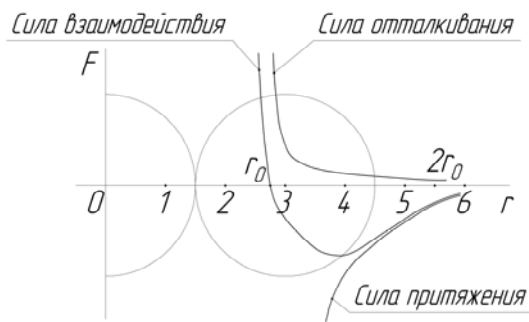
Параметры ячейки ОЦР  $a=8,397\text{Å}$  ( $1\text{Å}=10^{-10}$  м). Параметр решетки - это расстояние между атомами по ребру элементарной ячейки. Для кристаллической решетки типа объёмно-центрированного куба параметр  $a = 2d/\sqrt{3} = 1,16d$ , где  $d$  атомный диаметр.

Число формульных единиц решетки равно 8.

Оценим величину силы единичной межатомной связи, которая в ионных кристаллах определяется силой взаимодействия между двумя ионами.

На рис. 2 показана зависимость сил межатомного взаимодействия  $F$  от расстояния между центрами атомов  $r$  в твердых телах [11].

Из анализа рисунка можно сделать выводы о некоторых особенностях сил межатомного взаимодействия кристаллов горных пород.



**Рис. 2.** Зависимость сил межатомного взаимодействия  $F$  от расстояния между центрами атомов  $r$

Во-первых, между атомами одновременно действуют силы притяжения и силы отталкивания. Сумма этих сил определяет результирующую силу межатомного взаимодействия. Во-вторых, при уменьшении расстояния между атомами силы отталкивания нарастают значительно быстрее, чем силы притяжения. Существует некоторое расстояние  $r_0$ , при котором силы притяжения и силы отталкивания уравниваются. Результирующая сила взаимодействия  $F$  становится равной нулю.

В кристалле, который представлен самому себе, ионы располагаются именно на расстоянии  $r_0$  друг от друга. Если расстояние между атомами  $r$  меньше равновесного ( $r < r_0$ ), то преобладают силы отталкивания, если  $r > r_0$ , то преобладают силы притяжения. Эти свойства межатомных сил позволяют в первом приближении рассматривать частицы, которые образуют кристалл горной породы, как твердые упругие шарики, которые взаимодействуют между собой. В этом случае деформация растяжения кристалла приводит к увеличению расстояния между центрами соседних шариков и преобладанию сил притяжения, а деформация сжатия — к уменьшению этого расстояния и преобладанию сил отталкивания.

Вывод зависимостей для определения предела прочности  $\sigma_{сж}$  и модуля продольной упругости  $E$  кристалла горной породы (магнетита). При сжатии (растяжении) образца породы его предел прочности определяется максимальной величиной результирующей силы межатомного отталкивания (притяжения), приходящейся на единицу площади сечения, перпендикулярного к направлению действия силы. Обозначим через  $r_1$  расстояние между центрами атомов для случая, когда результирующая сила межатомного взаимодействия достигает максимального значения (см. рис. 2).

При дальнейшем уменьшении (увеличении) расстояния между атомами силы взаимодействия становятся настолько малыми, что связи между атомами обрываются. Пусть величина наибольшей силы притяжения между двумя атомами равна  $F_{\max}$ , а число связей на единицу площади поперечного сечения кристалла, перпендикулярного направлению этой силы —  $N_{св}$ . Тогда предел прочности кристалла  $\sigma_{сж}$  можно определить следующим равенством

$$\sigma_{сж} = F_{\max} \cdot N_{св}. \quad (2)$$

У каждого иона кристалла существует определенное число ближайших ионов-соседей с противоположным знаком заряда. В кристалле магнетита согласно числу формульных единиц решетки Браве их восемь. При разрушении кристалла у каждого иона обрывается по одной связи. Число связей, разрываемых на каждом квадратном сантиметре площади поперечного сечения кристалла, равно числу ионов, приходящихся на эту площадь, т.е.  $N_{св} = N_{ион}$ . В первом приближении можно пренебречь силами взаимодействия между ионами, расстояния между которыми больше, чем величина  $r_0$ . Силы их взаимодействия дают относительно небольшую поправку к конечному результату и их влиянием можно пренебречь.

Для оценки предела прочности кристалла горной породы  $\sigma_{сж}$  достаточно умножить наибольшее значение силы взаимодействия между двумя ионами  $F_{\max}$  на число ионов  $N_{ион}$ , которые приходятся на единицу площади плоскости разрыва кристалла

$$\sigma_{сж} = F_{\max} \cdot N_{ион}. \quad (3)$$

При известных значениях предела прочности кристалла  $\sigma_{сж}$  можно оценить величину модуля продольной упругости  $E$  горной породы, в т.ч. магнетита. Согласно закону Гука в пределах упругой деформации напряжение  $\sigma_{сж}$  пропорционально растяжению  $\varepsilon$ . Коэффициент пропорциональности между величиной деформации  $\varepsilon$  и напряжением  $\sigma_{сж}$  равен модулю продольной упругости  $E$ , т.е.  $\sigma_{сж} = E\varepsilon$ , откуда

$$E = \sigma_{сж} / \varepsilon. \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности или относительная деформация  $\varepsilon$  при растяжении равна отношению абсолютной деформации  $\Delta l$  тела к длине этого тела  $l$  в нормальном состоянии.

Вычисление сил связи  $N_{\text{ион}}$  в ионных кристаллах, предела прочности  $\sigma_{\text{сж}}$  и модуля продольной упругости  $E$  кристалла горной породы

Величину силы связи в ионных кристаллах можно найти, исходя из предположения, что ионы взаимодействуют между собой согласно закону Кулона. В модели кристалла рядом расположенные чередующиеся ионы имеют противоположные знаки. Равновесное состояние кристалла достигается тогда (см. рис. 2), когда расстояние между ионами равно  $r_0$ . Для кристаллов магнетита с объемно-центрированной ячейкой и параметром ячейки  $a = 8,397 \text{ \AA}$  расстояние

$$r_0 = d = a/1,16 = 8,4/1,16 = 7,24 \text{ \AA} \approx 7,2 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Пусть заряд всех ионов кристалла магнетита равен удвоенному заряду электрона  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ К}$  (валентности анионов кислорода  $\text{O}_2^-$  и катионов железа  $\text{Fe}_{2+}$  равны двум). При этих условиях максимальная сила притяжения  $F_{\text{max}}$  между двумя ионами может быть найдена с помощью формулы

$$F_{\text{max}} = (1/4\pi\epsilon_0) \cdot (2e^2/r^2), \quad (5)$$

где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = (1/4\pi c^2 \cdot 10^7) = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $c$  - скорость света в вакууме,  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

Подставив полученные численные данные в формулу (5), получим

$$F_{\text{max}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2 / (7,2 \cdot 10^{-10})^2 \approx 0,89 \cdot 10^{-9}, \text{ Н.} \quad (6)$$

Значение силы  $F_{\text{max}} \approx 0,89 \cdot 10^{-9}$  Н определяет величину максимальной силы взаимодействия между двумя ионами кристалла магнетита.

Оценим число ионов  $N_{\text{ион}}$ , которые находятся на единице площади поверхности разрыва кристалла. Пусть поверхность разрыва кристалла проходит по плоскости, параллельной основанию куба решетки с параметром решетки  $a$ . Число формульных единиц решетки равно 8.

В таком случае число ионов  $N_{\text{ион}}$  на каждом квадратном метре площади поверхности разрыва кристалла можно оценить формулой

$$N_{\text{ион}} \approx 8 / (7,2 \cdot 10^{-10})^2 \approx 1,54 \cdot 10^{19}, \text{ 1/м}^2. \quad (7)$$

Согласно предлагаемой модели строения вещества число связей, которые приходятся на единицу площади сечения кристалла, равно числу ионов ( $N_{\text{св}} = N_{\text{ион}}$ ), следовательно,  $N_{\text{св}} \approx 1,54 \cdot 10^{19}$  1/м<sup>2</sup>. Зная величину максимальной силы взаимодействия между ионами  $F_{\text{max}}$  (см. (6) и число ионов на каждом квадратном метре поверхности разрыва кристалла  $N_{\text{ион}}$  (см. (7), можно оценить теоретическую величину предела прочности кристалла магнетита по формуле (3)

$$\sigma_{\text{сж.т}} = 0,89 \cdot 10^{-9} \cdot 1,54 \cdot 10^{19} \approx 1,37 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2. \quad (8)$$

Известно, что теоретическая прочность кристаллов превышает величину, полученную из испытаний материалов, на несколько порядков. Например, теоретический предел прочности железа равен 56 ГПа, тогда как практический предел - 280 МПа, т.е. больший в 200 раз [13].

В работах [14,15] приведены данные по сравнению теоретической и реальной прочности кристаллической решетки каменной соли.

По расчету теоретическая прочность соли составляет 240 МПа, в то время как реальная техническая прочность равна 0,5 МПа, т.е. больше в 480 раз.

Основная причина этого связана с присутствием и движением дислокаций и других дефектов кристаллического строения вещества, трещин и т.п.

Введем для магнетита масштабный коэффициент  $k_{\text{мк}} = 56000/280 = 200$  [13] и получим расчетную формулу для оценки величины предела прочности магнетита

$$\sigma_{\text{сж}} = F_{\text{max}} \cdot N_{\text{ион}} / k_{\text{мк}} \text{ Н/м}^2. \quad (9)$$

После подстановки численных значений параметров формулы (9), получим

$$\sigma_{\text{сж}} = 0,89 \cdot 10^{-9} \cdot 1,54 \cdot 10^{19} / 200 = 0,69 \cdot 10^8 \approx 0,7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2. \quad (10)$$

Можно предположить, что деформация ионных кристаллов остается упругой вплоть до разрыва ионных связей, т.е. наибольшей упругой деформации соответствует напряжение, которое равно пределу прочности.

При этом максимальной упругой деформации ионных кристаллов соответствует максимальное значение силы межатомного взаимодействия между ионами.

Опыты с самыми прочными кристаллами показали [12], что максимальная относительная упругая деформация  $\epsilon_{\text{max}}$  перед их разрушением не превышает (0,5-2,0) %.

Пусть  $\varepsilon_{\max} \approx 1,0\% = 0,01$ . Подставив в формулу (4) вычисленное ранее значение  $\sigma_{сж}$  и  $\varepsilon = 0,01$ , получим равенство, позволяющее оценить величину модуля продольной упругости  $E$  кристаллической горной породы, Н/м<sup>2</sup>

$$E = \sigma_{сж} / \varepsilon = 0,7 \cdot 10^8 / 0,01 = 7 \cdot 10^{10}. \quad (11)$$

Отметим, что результаты оценочного расчета напряжения сжатия  $\sigma_{сж}$  и модуля продольной упругости кристалла  $E$ , определяемые с помощью уравнений (10) и (11), достаточно полно соответствуют величинам, полученным экспериментальным путем.

Так, в работе [16] разрушающее напряжение руды на сжатие, принято в пределах 90-155 МПа =  $(0,9-1,55) \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup> - полученный результат -  $0,7 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, модуль продольной упругости  $(7-10) \cdot 10^4$  МПа =  $(7-10) \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup> - полученный результат -  $7 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

**Выводы и направление дальнейших исследований.** Изложенный материал позволяет сделать следующие выводы. Пользуясь моделью кристаллического строения вещества можно с удовлетворительной точностью дать оценку механических характеристик горных пород, таких как предел прочности горной породы  $\sigma_{сж}$  и модуль продольной упругости  $E$ , которые являются главными параметрами деформационных свойств горных пород.

Прогнозная оценка механических характеристик горных пород по предлагаемому методу позволяет исключить принятие грубых ошибочных технологических решений при проектных работах по добыче полезных ископаемых, сократить период подготовительных работ по проектированию горных предприятий.

Проверка метода на примере кристалла магнетита показала удовлетворительную сходимость расчетных и экспериментальных результатов.

#### Список литературы

1. <http://www.mining-enc.ru> «Горная энциклопедия».
2. **Макаров В.В.** Деформационные предвестники геодинамических явлений в массивах горных пород [Текст] / **В.В. Макаров** // Электронное периодическое издание «Вестник Дальневосточного государственного технического университета», 2009. - № 1 (1).
3. **Аникеева Н.Ф.** Структуры горных пород. Том I. Магматические породы [Текст] / **Н.Ф. Аникеева, Е.Н. Егорова, А.Е. Комарова, Ю.И. Половинкина.** – М. - Л.: Государственное издательство геологической литературы, 1948. - 203 с.
4. ГОСТ 21153.2-84 Породы горные. Методы определения предела прочности при одноосном сжатии / [Текст]. – Действ. От 1.07.1986. - Государственный комитет стандартов при СМ СССР. – 8 с.
5. **Калинин А.Г.** Разведочное бурение [Текст] / **А.Г. Калинин, О.В. Ошкордин, В.М. Питерский, Н.В. Соловьев.** - М.: Недра, 2000. - 747 с.
6. **Рудь Ю.С.** Определение физико-механических свойств горных пород на основе модели кристаллического строения вещества [Текст] / **Ю.С. Рудь, И.С. Радченко, В.Ю. Белоножко, С.Ю. Олейник** // Вісник Криворізького національного університету, 2014. - Вип. 38. - С. 49-54.
7. **Киттель Ч.** Введение в физику твердого тела [Текст] / **Ч. Киттель.** - М.: «Наука», 1978. – 790 с.
8. **Бронь М.** Динамическая теория кристаллических решеток [Текст] / **М. Бронь, Хуан Кунь.** - М.: Издательство иностранной литературы, 1958. - 488 с.
9. [http://www.tsogu.ru/media/files/2009/12\\_03/file.2008-10-07.doc](http://www.tsogu.ru/media/files/2009/12_03/file.2008-10-07.doc).
10. [<https://ru.wikipedia.org/wiki/>].
11. **Madelung E.** Das Elektrische Feld in Systemen von regelmaessigen angeordneten Punktladungen [Текст] / **Madelung E.** - Phys. Z., 1958, В.19/ - S. 524-533.
12. <https://ru.wikipedia.org/wiki/> Теоретический предел прочности.
13. **Спивак А.И.** Разрушение горных пород при бурении скважин [Текст] / **А.И. Спивак, А.Н. Попов.** - М.: Недра, 1994.
14. **Ржевский В.В.** Основы физики горных пород [Текст] / **В.В. Ржевский, Г.Я. Новик.** - М.: Недра, 1978. - 390 с.
15. **Жданов Г.С.** Физика твердого тела [Текст] / **Г.С. Жданов.** – М.: Издательство МГУ, 1962. - 560 с.
16. Исследование напряженно-деформированного состояния пород вокруг камер больших размеров численными методами теории упругости / В.И. Бузило, Т.С. Савельева, В.А. Савельев, Т.И. Морозова // Materialy Szkoloty Eksploatacji Podziemnej – Krakow: Instytut Gospodarski Surowcami Mineralnymi i Energia PAN, 2010. – С. 1147-1152.