

**Криворожский государственный педагогический институт  
Кафедра информатики и прикладной математики**

***Н.В. Грищенко  
С.А. Семериков  
А.А. Хараджян  
Е.В. Чернов***

***СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ  
МЕТОДОВ АППРОКСИМАЦИИ***

Кривой Рог  
1998

### **Рецензент**

Доцент кафедри математики Криворізького державного педагогічного інституту, к. ф.-м. н., *М.О. Рашевський*.

Грищенко Н.В., Семеріков С.О., Чернов Є.В., Хараджян О.А. Порівняльний аналіз методів апроксимації.- Кривий Ріг: КДПІ, 1998. – 25 с.

Розглянуто основні методи апроксимації залежностей, наведено класифікацію. Наведено приклади розрахунків фізичних залежностей різної природи.

Для викладачів і студентів фізико-математичних факультетів, для аспірантів та науковців, що займаються статистичною обробкою даних

© Н.В. Грищенко, С.О. Семеріков, О.А. Хараджян, Є.В. Чернов, 1998  
© СП Міра, 1998

# Сравнительный анализ методов аппроксимации

## 1. Аналитическое приближение функций

Представление функций в виде дискретной последовательности значений аргумента (узлов) и соответствующих значений функции в узловых точках – обычное представление данных при их обработке на цифровой вычислительной машине.

Если при вычислениях возникает необходимость выполнения таких операций как интегрирование и дифференцирование функций, то вполне естественна замена дискретной последовательности аналитической функцией (Рис.1.).

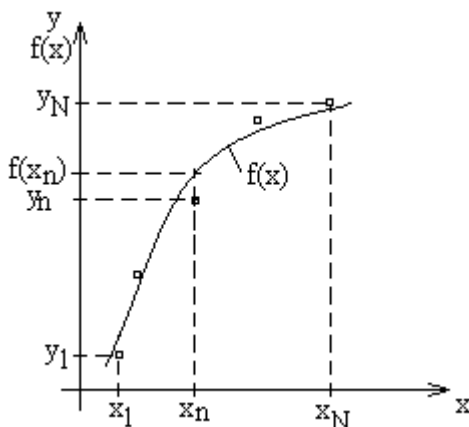


Рис.1. Аппроксимация функции.

Для упрощения принимаем, что значения функций заданы при равноотстоящих значениях аргумента.

Методы аналитического приближения функций определяются следующими основными фактами, которые необходимо рассмотреть:

- 1) первой проблемой является определение критерия оптимальности приближения. Классические методы приближения функций используют в качестве критерия оптимальности приближения требование точного совпадения значений приближающей функции с табличными значениями в узлах (приближение по критерию Лагранжа). Преимущество такого подхода – в простоте теории приближения и вычислительных процедур. При необхо-

димости учета ошибок наблюдений чаще всего используют критерий минимума суммы квадратов разностей между расчетными по приближающей функции и наблюдаемыми значениями в узлах (критерий Гаусса). Другой критерий состоит в требовании минимизировать максимальную разность между наблюдаемыми и расчетными значениями функции в узлах – так называемый минимаксный критерий (критерий Чебышева).

2) другой ключевой момент состоит в выборе класса приближающих функций. Основное требование к этим функциям - это независимость результатов отсчета от начала отсчета, т.е. от сдвига по последовательности значений аргумента. Другими словами, необходимо, чтобы конечное множество функций выбранного для аппроксимации класса переходило само в себя при замене  $x$  на  $x+k$ . Такими свойствами обладают:

- линейные комбинации степенных функций  $1, x, x^2, \dots, x^n$ ;
- тригонометрические функции  $\cos(ax), \sin(ax)$ ;
- экспоненциальные функции  $e^{-aiz}$ .

Использование любого другого конечного множества функций, кроме перечисленных, подразумевает наличие естественного начала отсчета, так как его выбор повлияет на результат.

## **2. Основные принципы решения задач аппроксимации**

Обычно в качестве аппроксимирующей функции выбирают линейную комбинацию функций из рассмотренных выше классов, вида:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi_i(x)$$

с действительными коэффициентами  $c_i$ . Если такой обобщенный многочлен сформирован и выбран критерий оптимальности приближения, то можно составить и решить систему алгебраических уравнений, линейных относительно коэффициентов  $c_i$ :

$$\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x_k) = f(x_k)$$

где  $k=0, 1, 2, \dots, n$  - порядковый номер узла,  
 $f(x_k)$  – заданное табличное значение функции в  $k$ -м узле.

### **3. Основные методы аппроксимации. Классический интерполяционный полином.**

Использование в качестве  $\varphi_i(x)$  последовательности степенных функций приводит к аппроксимирующей функции в виде классического полинома  $\sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$  и к системе  $n+1$  линейных уравнений

вида:  $\sum_{i=0}^n c_i \cdot x_k^i = f(x_k)$  относительно  $c_i$ . Решение СЛАУ любым методом относительно  $c_i$  полностью определяет интерполяционный полином и оценка значения  $f(x)$  в любой не узловой точке может быть получена вычислением значения полинома в этой точке.

Метод относительно  $c_i$  полностью определяет интерполяционный полином и оценка значения  $f(x)$  в любой не узловой точке может быть получена вычислением значения полинома в этой точке.

Метод относительно  $c_i$  полностью определяет интерполяционный полином и оценка значения  $f(x)$  в любой не узловой точке может быть получена вычислением значения полинома в этой точке.

### **4. Метод интерполяции Лагранжа.**

Метод интерполяции Лагранжа заключается в нахождении коэффициентов Лагранжа, которые удовлетворяют условию:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

где  $i, j = 0 \dots n$  номер узла.

$L_i(x_j)$  представляет собой полином, который обращается в ноль в узлах, номер которых отличается от текущего, и в единицу в текущем узле.

В общем случае имеем:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot f(x_i)$$

Расчетная формула имеет вид:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{(x - x_i) \cdot \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)} \cdot f(x_i)$$

## 5. Интерполяционный полином Ньютона

Полином Ньютона для интерполяции имеет вид:

$$\varphi(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta^i \cdot f(x_0)}{i! \cdot h^i} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

где  $h$  – шаг дискретизации,  $h = x_{i+1} - x_i$ ,

$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$  – конечная разность первого порядка,

$\Delta^2 f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$  – конечная разность второго порядка,

$\Delta^n f(x_i) = \Delta^{n-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{n-1} f(x_i)$  – конечная разность  $n$ -го порядка,

В отличие от алгоритма вычисления полинома Лагранжа при интерполяции полиномом Ньютона удастся разделить задачи определения коэффициентов и вычисления значений полинома при различных значениях  $x$ .

## 6. Интерполяция сплайнами

Нецелесообразность использования высоких степеней интерполяционных полиномов очевидна. Но имеется и другая причина снижения степени интерполяционных полиномов: несмотря на выполнение условий Лагранжа в узлах интерполяции, интерполяционная функция может иметь значительное отклонение от аппроксимируемой кривой между узлами – эффект волнистости. Поэтому осуществляют кусочную аппроксимацию заданной функции, разбивают весь набор узлов на группы по 2-4 узла и аппроксимируют функцию на отрезках полиномами степеней не выше третьей. При этом необходимо «сшивать» соседние полиномы в точках соприкосновения, иначе результирующая кривая не будет гладкой.

Для проведения гладких кривых через узловые точки, помимо условий Лагранжа, накладывают дополнительные требования к интерполяционной кривой.

При сплайн-интерполяции на каждом интервале  $[x_{j-1}, x_j]$  строится отдельный полином 3-й степени со своими коэффициентами, которые определяются из условия сшивания соседних сплайнов в узловых точках:

- выполнение условия Лагранжа  $\varphi_i(x_{i-1})=f(x_{i-1})$ ,  $\varphi_i(x_i)=f(x_i)$ ;
- непрерывность первой и второй производной в узлах  $\varphi_i^{(1)}(x_i)=\varphi_{i+1}^{(1)}(x_i)$ ,  $\varphi_i^{(2)}(x_i)=\varphi_{i+1}^{(2)}(x_i)$ ;
- условия на концах могут быть различными, в том числе со свободными концами, то есть описываться уравнениями прямых и в этом случае иметь нулевые вторые производные:  $\varphi_1^{(2)}(x_0)=0$ ,  $\varphi_n^{(2)}(x_n)=0$ .

Интерполяция сплайнами требует больших вычислительных затрат, но обеспечивает точное нахождение первой производной.

## **7. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов**

Если снять требование обязательного прохождения аппроксимирующей функции через узловые точки и заменить его требованием минимума суммы квадратов разностей между значениями аппроксимирующей и аппроксимируемой функции в узлах, то получится метод наименьших квадратов, который не игнорирует наличие ошибок в значениях аппроксимирующей функции, а пытается усреднить их влияние на результат аппроксимации.

Метод наименьших квадратов основывается на минимизации функционала:

$$F = \sum_{i=0}^n (\varphi(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \text{Min}$$

где  $n$  – число точек измерения.

В данном методе аппроксимирующая функция  $f(x)$  представляется полиномом степени  $k$ :

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k$$

или с подстановкой

$$F = \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k - y_i)^2 \rightarrow \text{Min}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов находят производные от данного функционала по соответствующему коэффициенту, и приравнивают их к нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_k \cdot x_i^k - y_i) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n x_i \cdot (a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_k \cdot x_i^k - y_i) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_k} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot (a_0 + a_1 \cdot x_i + \dots + a_k \cdot x_i^k - y_i) = 0 \end{array} \right.$$

После преобразований получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} n + \sum_{i=0}^n x_i + \dots + \sum_{i=0}^n x_i^k = \sum_{i=0}^n y_i \\ \sum_{i=0}^n x_i + \sum_{i=0}^n x_i^2 + \dots + \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n x_i^k + \sum_{i=0}^n x_i^{k+1} + \dots + \sum_{i=0}^n x_i^{2 \cdot k} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i \end{array} \right.$$

Решая полученную систему уравнений, находят  $a_0, a_1, \dots, a_k$ .

Метод наименьших квадратов обычно используется не для кусочной аппроксимации на отрезках общего интервала, а для аппроксимации на всем интервале задания исходной функции.

## **8. Аппроксимация функций рядами Фурье**

Использование в качестве функции  $\varphi(x)$  последовательности тригонометрических функций синуса и косинуса приводит к аппроксимирующей функции в виде ряда

$$\varphi(x) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i \cdot \cos(\omega \cdot i \cdot x) + b_i \cdot \sin(\omega \cdot i \cdot x)$$

где  $k$  – число гармоник;

$\omega$  – частота первой гармоники.

Аппроксимация рядами Фурье может быть проведена как с минимизацией суммы квадратов разностей между значениями ап-



проксимирующей и аппроксимируемой функции в узлах, так и без нее.

Аппроксимация без минимизации квадрата отклонений. Так как в каждом узле должно выполняться условие  $\varphi(x_i) = f(x_i)$ , то очевидно следующее выражение:

$$a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot x_0) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot x_0) + \dots + a_k \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot x_0) + b_k \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot x_0) = f(x_0)$$

$$a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot x_1) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot x_1) + \dots + a_k \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot x_1) + b_k \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot x_1) = f(x_1)$$

⋮

$$a_0 + a_1 \cdot \cos(\omega \cdot x_k) + b_1 \cdot \sin(\omega \cdot x_k) + \dots + a_k \cdot \cos(\omega \cdot k \cdot x_k) + b_k \cdot \sin(\omega \cdot k \cdot x_k) = f(x_k)$$

где  $k$  – количество гармоник.

Полученная система линейна относительно  $a_i$ ,  $b_i$  и её решение не представляет особых трудностей. Решение СЛАУ любым методом относительно  $a_i$ ,  $b_i$  полностью определяет аппроксимирующий ряд и оценка значения  $f(x)$  в любой не узловой точке может быть получена вычислением значения полинома в этой точке.

Аппроксимация с минимизации квадрата отклонений аналогична методу наименьших квадратов. Используя свойство ортогональности тригонометрических функций, получим выражения для определения коэффициентов аппроксимирующего ряда:

$$a_i = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \cos(\omega \cdot i \cdot x_i) \quad \text{для } i = 0, 1, \dots, k$$

$$b_i = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \sin(\omega \cdot i \cdot x_i) \quad \text{для } i = 1, \dots, k$$

где  $k$  - число гармоник;  
 $n$  - число выборок сигнала.

Аппроксимация рядами Фурье может использоваться как для приближения периодических функций, так и непериодических. В любом случае целесообразно частоту первой гармоники определять выражением:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{x_{\text{кон}} - x_{\text{нач}}},$$

где  $x_{\text{нач}}$ ,  $x_{\text{кон}}$  – соответственно начальное и конечный значение аргумента на интервале аппроксимации.

## 9. Аппроксимация кривых экспоненциальными функциями

Аппроксимацию экспоненциальными функциями так же целесообразно выполнять по методу наименьших квадратов. Аппроксимирующая функция имеет вид:  $\varphi(x) = e^{A+B \cdot x}$ . Такую функцию невозможно определить рассмотренными выше способами. Это объясняется тем, что уравнение  $f(x) = e^{A+B \cdot x}$  нелинейное относительно параметров  $A, B$ . Для их определения из

$$F = \sum_{i=0}^n \left( e^{A+B \cdot x_i} - f(x_i) \right)^2 \rightarrow \text{Min}$$

необходимо решить не линейную, а нелинейную систему уравнений, что труднее, из-за необходимости преобразования координат и линеаризации приведенного уравнения.

Если прологарифмировать ординаты, то экспоненциальная функция перейдет в прямую  $\varphi^*(x)$ :

$$\varphi^*(x) = \ln \varphi(x) = A + B \cdot x$$

Соответственно логарифмируются и значения  $y_i$ :

$$y_i^* = \ln y_i$$

После такого преобразования минимизируется сумма новых квадратов отклонений:

$$F = \sum_{i=0}^n \left( A + B \cdot x - \ln y_i \right)^2 \rightarrow \text{Min}$$

Коэффициенты  $A, B$  определяются по следующим формулам:

$$A = \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=0}^n y_i^* - B \cdot \sum_{i=0}^n x_i \right)$$
$$B = \frac{\sum_{i=0}^n x_i \cdot y_i^* - \frac{\sum_{i=0}^n x_i \cdot \sum_{i=0}^n y_i^*}{n}}{\sum_{i=0}^n x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=0}^n x_i \right)^2}{n}}$$

Аппроксимация экспоненциальными функциями имеет свои

недостатки: возможность аппроксимации, только монотонных функций в первом координатном квадранте.

## 10. Ортогональный метод решения систем линейных уравнений

При аппроксимации функций будем использовать ортогональный метод решения СЛАУ, т.к. он обеспечивает высокую точность результата, на которую не влияют промежуточные округления связанные с ограниченностью разрядной сетки ЭВМ.

Рассмотрим этот метод.

Исходными данными являются матрица коэффициентов - квадратная матрица  $N \times N$  и матрица-столбец свободных членов -  $N \times 1$ .

Пусть нам необходимо решить систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Из элементов этой системы составим три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножив матрицу  $A$  на матрицу  $X$ , мы получим матрицу-столбец, элементы которой представляют собой левую часть записанной системы. Так как левая часть системы равна правой, то полученная матрица столбец не может быть ничем иным, как матрицей-столбцом  $B$ . Таким образом, мы имеем право записать систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме как

$$AX=B.$$

В записанной системе матрица-столбец  $X$  представляет собой вектор неизвестных, которые необходимо будет определить,  $A$  - матрица коэффициентов при неизвестных и  $B$  - правая часть СЛАУ (мат-



Добавим к системе векторов  $A_i$  линейно независимый от них вектор  $A_{n+1}=(0, 0, \dots, 0, 1)$ . В векторном пространстве размерности  $n+1$  будем строить такой его ортонормированный базис  $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ , чтобы при любом  $k=1, 2, \dots, n+1$  векторы  $B_1, B_2, \dots, B_k$  образовывали ортонормированный базис подпространства  $P_k$ , порожденного рассматриваемыми векторами  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Для этого достаточно строить в подпространстве  $P_k$  некоторый ортогональный базис  $U_1, U_2, \dots, U_k$ , а затем нормировать его.

Вычисления будем вести в соответствии со следующим алгоритмом. Положим:

$$U_1 = A_1; \quad B_1 = \frac{U_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} U_{1j}^2}}.$$

Если для некоторого  $k \geq 1$  уже построены векторы  $U_1, U_2, \dots, U_k$  и векторы  $B_1, B_2, \dots, B_k$ , то вектор  $U_{k+1}$  вычисляется с помощью нескольких итераций по формулам

$$U_{k+1}^{(0)} = A_{k+1}; \quad U_{k+1}^{(t)} = U_{k+1}^{(t-1)} - \sum_{j=1}^k U_{k+1}^{(t-1)} \cdot B_j^2.$$

Здесь  $U_{k+1}^{(0)}$  - начальное, а  $U_{k+1}^{(t)}$  - очередное приближение вектора  $U_{k+1}$ . Вектор  $B_{k+1}$  по вектору  $U_{k+1}$  определяется в соответствии с формулой

$$B_{k+1} = \frac{U_{k+1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} U_{(k+1)j}^2}}.$$

Значения корней системы связаны с координатами вектора  $B_{n+1}$  так:

$$x_i = \frac{B_{(n+1)i}}{B_{(n+1)(n+1)}}.$$

Обычно этот процесс рекомендуется повторить 3-4 раза с целью как можно более точной ортогонализации и, соответственно, более точного решения рассматриваемой системы. Более просто рассмотренный алгоритм можно сформулировать так:

1. Нормируем первую вектор-строку системы.
2. Ортогонализируем второй вектор к первому, а затем нормируем его.

3. Ортогонализируем третий вектор к первому и ко второму, а затем нормируем, и т.д., со всеми остальными векторами.

При этом самый последний вектор, которым мы дополнили систему, будет ортогонален ко всем предыдущим, а, значит, будет являться её решением.

## **11. Сравнение способов аппроксимации**

Так как при диагностике двигателей постоянного тока наиболее часто встречаются следующие виды кривых:

- неизменная или медленноменяющаяся величина,
- кривая экспоненциального характера,
- затухающий синусоидальный сигнал

то целесообразно использовать аналогичные зависимости при сравнении методов аппроксимации. Следует отметить, что при применении дискретной цифровой системы регулирования координат двигателя, особое внимание необходимо обратить на аппроксимацию данных кривых на интервалах соизмеримых с периодом дискретности системы управления. Также желательно чтобы точность производной найденной прямым дифференцированием аппроксимирующей функции была минимальна.

При сравнении методов аппроксимации применим следующие исходные функциональные зависимости:

- постоянное питающее напряжение

$$f(x) = 220$$

- переходный процесс по току при прямом пуске двигателя

$$f(x) = 250 + 11808.6 \cdot e^{-5.486 \cdot t} - 11808.6 \cdot e^{-16.381 \cdot t}$$

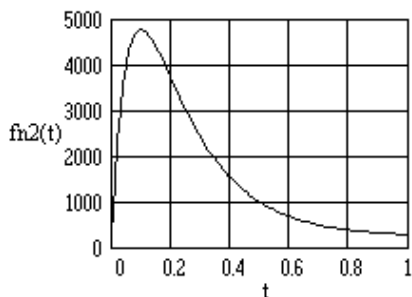
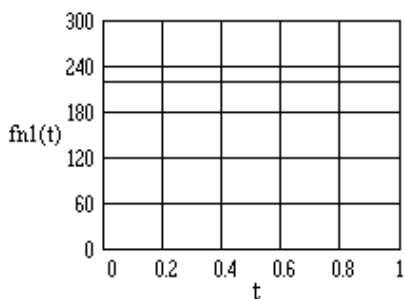
- переходный процесс по скорости

$$f(x) = 109.367 - 164.437 \cdot e^{-5.486 \cdot t} + 55.071 \cdot e^{-16.381 \cdot t}$$

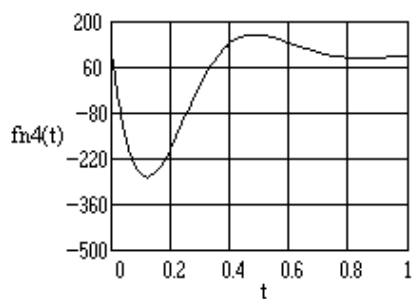
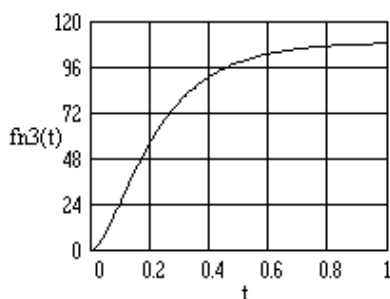
- колебательный переходный процесс то току

$$f(x) = 100 + 396.807 \cdot e^{-5 \cdot t} \cdot \sin(8.66 \cdot t + 4.189) - 687.29 \cdot e^{-5 \cdot t} \cdot \cos(8.66 \cdot t + 4.189)$$

Графики приведенных функций приведены на рис 2 и 3.



**Рис.2.** Графики функций 1 и 2.



**Рис.3.** Графики функций 3 и 4.

Сравнительную аппроксимацию проведем на двух интервалах:

от 0 до 0.1 с;

от 0 до 0.002.

Число узлов интерполяции выбираем не менее чем количество определяемых коэффициентов.

В качестве основных показателей используются сумма квадратов отклонений для функции и производной функции и время вычислений.

Методы аппроксимации Лагранжа и полиномами Ньютона рассматриваться не будут из-за сложности символических преобразований полиномов, которые влекут за собой существенное увеличение времени аппроксимации.

Результаты аппроксимации сведены в таблицы.

## 1. Аппроксимация классическим полиномом.

Функция	Число точек	Степень полинома	Конечное время	Сумма квадратов отклонений функции	Сумма квадратов отклонений производной	Время вычислений
1	5	5	0.1	1.44923e-13	3.87215e-10	0.002
1	10	10	0.1	2.08856e-13	5.47339e-10	0.003
1	15	15	0.1	1.65726e-13	6.69845e-10	0.004
1	20	20	0.1	66.6243	0.0225231	0.006
1	5	5	0.002	1.06344e-13	3.83802e-10	0.002
1	10	10	0.002	0.00171702	5.34112e-10	0.003
1	15	15	0.002	1476.14	0.102679	0.004
1	20	20	0.002	1703.08	0.0360628	0.006
2	5	5	0.1	9.03765	1430.95	0.002
2	10	10	0.1	2.56707e-05	0.00965179	0.003
2	15	15	0.1	3.77994e-05	1.86281e-05	0.004
2	20	20	0.1	28897.8	458458	0.006
2	5	5	0.002	6.20478e-08	0.000494799	0.002
2	10	10	0.002	2069.88	4.59471e+06	0.003
2	15	15	0.002	2555.81	844874	0.004
2	20	20	0.002	20521.8	977842	0.006
3	5	5	0.1	0.0415559	6.57925	0.002
3	10	10	0.1	1.19711e-07	4.50098e-05	0.003
3	15	15	0.1	9.0079e-12	4.75605e-09	0.004
3	20	20	0.1	89.7818	2099.19	0.006
3	5	5	0.002	2.86936e-10	2.28866e-06	0.002
3	10	10	0.002	0.0521657	0.000193294	0.003
3	15	15	0.002	2620.57	82.6042	0.004
3	20	20	0.002	0.0617197	89.6593	0.006
4	5	5	0.1	0.0875255	13.9252	0.002
4	10	10	0.1	1.25244e-08	0.0342821	0.003
4	15	15	0.1	2.16695e-10	0.041704	0.004
4	20	20	0.1	1315.72	31872.8	0.006
4	5	5	0.002	3.12211e-10	0.0378449	0.002
4	10	10	0.002	302.141	24064.8	0.003
4	15	15	0.002	595.702	45649.7	0.004
4	20	20	0.002	767.156	55622.2	0.006

Число точек измерений соответствует числу неизвестных коэффициентов. При использовании этого метода удовлетворительные показатели погрешности оказываются при степени полинома не выше



15-20 и не ниже чем 5. При степени полинома 10-15 производная воспроизводится с достаточной точностью.

## 2. Метод МНК.

Функция	Число точек	Степень полинома	Конечное время	Сумма квадратов отклонений функции	Сумма квадратов отклонений производной	Время вычислений
1	2	3	4	5	6	7
1	20	5	0.1	3.00651e-07	1.54412e-05	0.0030
1	20	10	0.1	0.0735199	9.48193	0.0030
1	20	15	0.1	1709.94	6.9121	0.0030
1	20	20	0.1	1703.83	0.0137436	0.0031
1	50	5	0.1	9.25795e-06	0.000438128	0.0456
1	50	10	0.1	245265	2.58651e+07	0.0456
1	50	15	0.1	2682.93	18.0312	0.0456
1	50	20	0.1	2692.95	0.502831	0.0457
1	100	5	0.1	0.0026204	0.12154	0.3622
1	100	10	0.1	1.23783e+07	1.23722e+09	0.3622
1	100	15	0.1	3811.72	2.20579	0.3623
1	100	20	0.1	3811.07	0.00119425	0.3623
1	20	5	0.002	1.3247e-06	0.00340361	0.0030
1	20	10	0.002	1704.1	0.00218586	0.0030
1	20	15	0.002	1741.6	15234.5	0.0030
1	20	20	0.002	1703.21	6.72091	0.0031
1	50	5	0.002	2.51861e-05	0.059778	0.0456
1	50	10	0.002	2691.13	2.84988e-05	0.0456
1	50	15	0.002	3363.82	270841	0.0456
1	50	20	0.002	2713.69	0.0816383	0.0457
1	100	5	0.002	0.000292138	0.677892	0.3622
1	100	10	0.002	3805.6	0.000158678	0.3622
1	100	15	0.002	3847.94	3276.77	0.3623
1	100	20	0.002	5041.28	5.37983	0.3623
2	20	5	0.1	972.161	58664.1	0.0030
2	20	10	0.1	191.458	26607.6	0.0030
2	20	15	0.1	28898.3	458458	0.0030
2	20	20	0.1	28897.8	458462	0.0031
2	50	5	0.1	2505.24	139668	0.0456
2	50	10	0.1	192002	9.42778e+07	0.0456
2	50	15	0.1	45878.1	716129	0.0456
2	50	20	0.1	45878.1	716128	0.0457

1	2	3	4	5	6	7
2	100	5	0.1	4130.69	224845	0.3622
2	100	10	0.1	1.98527e+06	7.88951e+07	0.3622
2	100	15	0.1	64968.8	1.00863e+06	0.3623
2	100	20	0.1	64972.7	1.00863e+06	0.3623
2	20	5	0.002	3.75582e-06	0.0146068	0.0030
2	20	10	0.002	2956.38	975454	0.0030
2	20	15	0.002	3039.5	975456	0.0030
2	20	20	0.002	2956.44	975461	0.0031
2	50	5	0.002	4.99967e-06	0.00545762	0.0456
2	50	10	0.002	4689.81	1.54199e+06	0.0456
2	50	15	0.002	4707.63	1.50455e+06	0.0456
2	50	20	0.002	4685.25	1.54199e+06	0.0457
2	100	5	0.002	1.44285e-05	2.79636	0.3622
2	100	10	0.002	6639.6	2.18055e+06	0.3622
2	100	15	0.002	6638.9	2.17963e+06	0.3623
2	100	20	0.002	4912.35	2.18067e+06	0.3623
3	20	5	0.1	4.48524	270.593	0.0030
3	20	10	0.1	0.246949	16.0974	0.0030
3	20	15	0.1	77.6376	1686.46	0.0030
3	20	20	0.1	84.1676	2069.88	0.0031
3	50	5	0.1	11.5653	644.613	0.0456
3	50	10	0.1	943.316	42903.6	0.0456
3	50	15	0.1	162.535	3286.36	0.0456
3	50	20	0.1	145.17	3286.32	0.0457
3	100	5	0.1	19.0727	1037.93	0.3622
3	100	10	0.1	354499	2.36731e+07	0.3622
3	100	15	0.1	255.925	4653.79	0.3623
3	100	20	0.1	239.691	4662	0.3623
3	20	5	0.002	2.07492e-08	6.61553e-05	0.0030
3	20	10	0.002	862.636	86.1083	0.0030
3	20	15	0.002	0.0639504	86.332	0.0030
3	20	20	0.002	2.23727	87.6597	0.0031
3	50	5	0.002	4.6816e-08	0.000197466	0.0456
3	50	10	0.002	9879.34	129.084	0.0456
3	50	15	0.002	0.0944915	100.527	0.0456
3	50	20	0.002	2648.76	68.2461	0.0457
3	100	5	0.002	6.05178e-07	0.00036108	0.3622
3	100	10	0.002	16534.8	193.32	0.3622
3	100	15	0.002	0.0974515	148.337	0.3623
3	100	20	0.002	20.0938	216.12	0.3623

1	2	3	4	5	6	7
4	20	5	0.1	6.76243	419.531	0.0030
4	20	10	0.1	0.392654	1234.57	0.0030
4	20	15	0.1	1304.66	262420	0.0030
4	20	20	0.1	1317.07	31844.2	0.0031
4	50	5	0.1	16.1627	928.932	0.0456
4	50	10	0.1	199185	1.43417e+07	0.0456
4	50	15	0.1	2111.32	50000.3	0.0456
4	50	20	0.1	2088.71	50000.1	0.0457
4	100	5	0.1	25.9702	1458.63	0.3622
4	100	10	0.1	3.68572e+07	2.7335e+09	0.3622
4	100	15	0.1	3119.91	70515.4	0.3623
4	100	20	0.1	2961.55	70546.3	0.3623
4	20	5	0.002	7.27775e-08	0.0754923	0.0030
4	20	10	0.002	720.858	52721	0.0030
4	20	15	0.002	770.298	52710.7	0.0030
4	20	20	0.002	718.536	53046.6	0.0031
4	50	5	0.002	1.68347e-05	0.148618	0.0456
4	50	10	0.002	1140.73	83327.9	0.0456
4	50	15	0.002	1136.89	83407.8	0.0456
4	50	20	0.002	1162.88	83317	0.0457
4	100	5	0.002	4.24723e-05	1.94674	0.3622
4	100	10	0.002	1612.94	117840	0.3622
4	100	15	0.002	1605.68	117113	0.3623
4	100	20	0.002	1587.62	117839	0.3623

Метод наименьших квадратов обеспечивает приемлемую точность при степени полинома 5 на интервалах соизмеримых с периодом дискретности. При этой же степени полинома также обеспечивается точность производной функции.

### 3. Метод интерполяции рядом Фурье.

Функция	Число точек	Число гармоник	Конечное время	Сумма квадратов отклонений функции	Сумма квадратов отклонений производной	Время вычислений
1	2	3	4	5	6	7
1	5	2	0.1	0	3.87247e-10	0.0012
1	7	3	0.1	5.68434e-14	4.58083e-10	0.0026
1	11	5	0.1	9.84557e-14	5.74302e-10	0.0079
1	21	10	0.1	3.85531e-13	7.83921e-10	0.0413

1	2	3	4	5	6	7
1	31	15	0.1	7.27346e-11	9.73191e-08	0.1176
1	41	20	0.1	9.59968e-10	1.7764e-06	0.2541
1	5	2	0.002	0	3.85045e-10	0.0012
1	7	3	0.002	5.68434e-14	4.52407e-10	0.0026
1	11	5	0.002	8.03887e-14	5.70297e-10	0.0079
1	21	10	0.002	4.29158e-13	6.71237e-09	0.0413
1	31	15	0.002	8.14098e-11	5.44492e-06	0.1176
1	41	20	0.002	5.41717e-10	4.94827e-05	0.2541
2	5	2	0.1	363.97	483006	0.0012
2	7	3	0.1	104.669	561673	0.0026
2	11	5	0.1	9.06721	691124	0.0079
2	21	10	0.1	0.0222249	938662	0.0413
2	31	15	0.1	4.69768e-05	1.13339e+06	0.1176
2	41	20	0.1	0.000192572	1.29928e+06	0.2541
2	5	2	0.002	13.1207	943234	0.0012
2	7	3	0.002	3.6951	1.14257e+06	0.0026
2	11	5	0.002	0.312425	1.44582e+06	0.0079
2	21	10	0.002	0.000747787	1.99905e+06	0.0413
2	31	15	0.002	2.68194e-06	2.42855e+06	0.1176
2	41	20	0.002	1.41356e-05	2.79275e+06	0.2541
3	5	2	0.1	0.799525	1970.59	0.0012
3	7	3	0.1	0.213718	2398.19	0.0026
3	11	5	0.1	0.0170384	3050.25	0.0079
3	21	10	0.1	3.84416e-05	4243.02	0.0413
3	31	15	0.1	1.06538e-07	5166.26	0.1176
3	41	20	0.1	3.18677e-07	5947.87	0.2541
3	5	2	0.002	0.000966139	77.9196	0.0012
3	7	3	0.002	0.000276261	97.0325	0.0026
3	11	5	0.002	2.35834e-05	125.041	0.0079
3	21	10	0.002	5.67492e-08	174.919	0.0413
3	31	15	0.002	1.00022e-09	213.344	0.1176
3	41	20	0.002	1.92387e-07	245.828	0.2541
4	5	2	0.1	20.7399	32570.9	0.0012
4	7	3	0.1	5.80052	38352.8	0.0026
4	11	5	0.1	0.488764	47665.1	0.0079
4	21	10	0.1	0.00116899	65225.2	0.0413
4	31	15	0.1	3.59172e-06	78965.7	0.1176
4	41	20	0.1	4.47585e-06	90647.2	0.2541
4	5	2	0.002	0.708755	50916.4	0.0012
4	7	3	0.002	0.199636	61706.8	0.0026

1	2	3	4	5	6	7
4	11	5	0.002	0.0168812	78108.2	0.0079
4	21	10	0.002	4.04101e-05	108015	0.0413
4	31	15	0.002	2.3463e-07	131230	0.1176
4	41	20	0.002	3.49202e-06	150916	0.2541

В большинстве случаев точность обеспечивается при 10-20 гармонических составляющих ряда Фурье на любом интервале накопления данных. Для неизменной функции точность обеспечивается при любом количестве гармоник и длине интервала накопления данных. Производная воспроизводится плохо.

#### 4. Аппроксимация рядом Фурье по методу МНК.

Функция	Число точек	Число гармоник	Конечное время	Сумма квадратов отклонений функции	Сумма квадратов отклонений производной	Время вычислений
1	2	3	4	5	6	7
1	20	5	0.1	1.64445e-09	8.91222e-07	0.004
1	50	5	0.1	1.55238e-09	9.81551e-07	0.046
1	50	10	0.1	8.72237e-05	0.140232	0.049
1	50	15	0.1	0.000386031	0.73004	0.053
1	50	20	0.1	0.00312335	5.94568	0.058
1	100	5	0.1	1.98304e-09	1.24589e-06	0.363
1	100	10	0.1	1.7779e-05	0.0358797	0.365
1	100	15	0.1	6.54339e-05	0.189127	0.369
1	100	20	0.1	0.000519683	1.72656	0.375
1	20	5	0.002	2.69908e-09	7.3789e-05	0.004
1	50	5	0.002	2.83165e-10	8.91793e-06	0.046
1	50	10	0.002	1.40013e-06	0.118086	0.049
1	50	15	0.002	0.00251599	231.734	0.053
1	50	20	0.002	0.0675944	6623.72	0.058
1	100	5	0.002	3.16767e-10	9.23889e-06	0.363
1	100	10	0.002	6.26265e-06	0.643303	0.365
1	100	15	0.002	9.8607e-05	14.7615	0.369
1	100	20	0.002	0.000449198	74.0895	0.375
2	20	5	0.1	2.74276	916858	0.004
2	50	5	0.1	1.75404	1.43216e+06	0.046
2	50	10	0.1	0.00116686	1.43226e+06	0.049
2	50	15	0.1	0.0642724	1.43226e+06	0.053
2	50	20	0.1	0.163718	1.43224e+06	0.058

1	2	3	4	5	6	7
2	100	5	0.1	2.2242	2.01709e+06	0.363
2	100	10	0.1	0.000476548	2.01727e+06	0.365
2	100	15	0.1	0.00559826	2.01727e+06	0.369
2	100	20	0.1	0.0216393	2.01727e+06	0.375
2	20	5	0.002	0.0958477	1.95036e+06	0.004
2	50	5	0.002	0.0606006	3.08363e+06	0.046
2	50	10	0.002	3.76573e-05	3.08398e+06	0.049
2	50	15	0.002	0.00935132	3.08413e+06	0.053
2	50	20	0.002	0.0105756	3.08374e+06	0.058
2	100	5	0.002	0.0766813	4.36069e+06	0.363
2	100	10	0.002	3.61665e-05	4.36109e+06	0.365
2	100	15	0.002	0.000435643	4.36109e+06	0.369
2	100	20	0.002	0.000858385	4.3611e+06	0.375
3	20	5	0.1	0.0053473	4138.64	0.004
3	50	5	0.1	0.00332647	6571.91	0.046
3	50	10	0.1	5.65257e-06	6572.32	0.049
3	50	15	0.1	0.004359	6572.51	0.053
3	50	20	0.1	0.00132905	6572.04	0.058
3	100	5	0.1	0.00419598	9307.12	0.363
3	100	10	0.1	2.08858e-06	9307.52	0.365
3	100	15	0.1	6.47413e-06	9307.53	0.369
3	100	20	0.1	7.17449e-06	9307.52	0.375
3	20	5	0.002	7.35078e-06	170.534	0.004
3	50	5	0.002	4.60988e-06	271.739	0.046
3	50	10	0.002	1.88604e-09	271.776	0.049
3	50	15	0.002	6.39175e-07	271.781	0.053
3	50	20	0.002	3.50293e-08	271.793	0.058
3	100	5	0.002	5.82214e-06	385.27	0.363
3	100	10	0.002	1.46861e-09	385.306	0.365
3	100	15	0.002	1.80925e-08	385.306	0.369
3	100	20	0.002	2.22165e-08	385.306	0.375
4	20	5	0.1	0.148419	63682.5	0.004
4	50	5	0.1	0.0944238	99994.8	0.046
4	50	10	0.1	6.20103e-05	100001	0.049
4	50	15	0.1	8.74532e-05	100001	0.053
4	50	20	0.1	0.00524459	99994.4	0.058
4	100	5	0.1	0.119638	141083	0.363
4	100	10	0.1	3.40233e-05	141092	0.365
4	100	15	0.1	0.000564276	141092	0.369
4	100	20	0.1	3.01027e-05	141092	0.375

1	2	3	4	5	6	7
4	20	5	0.002	0.00517987	105383	0.004
4	50	5	0.002	0.00327469	166637	0.046
4	50	10	0.002	5.45399e-05	166657	0.049
4	50	15	0.002	0.0143231	166724	0.053
4	50	20	0.002	0.0292	166756	0.058
4	100	5	0.002	0.00414355	235658	0.363
4	100	10	0.002	1.05034e-05	235679	0.365
4	100	15	0.002	0.000227198	235681	0.369
4	100	20	0.002	0.000425289	235695	0.375

Аппроксимация рядом Фурье по методу МНК также обеспечивает точность при 10-20 гармонических составляющих ряда Фурье на любом интервале накопления данных. Для неизменной функции точность обеспечивается при любом количестве гармоник и длине интервала накопления данных. При аппроксимации рядом Фурье по методу МНК не обеспечивается точность воспроизведения производной.

### 5. Аппроксимация экспоненциальными функциями.

Функция	Число точек	Конечное время	Сумма квадратов отклонений функции	Сумма квадратов отклонений производной	Время вычислений
1	2	3	4	5	6
1	20	0.1	4.42394e-12	6.23366e-10	4.49e-4
1	50	0.1	2.35848e-11	5.59933e-10	0.0011
1	100	0.1	3.65935e-11	2.77167e-09	0.0022
1	20	0.002	1.29841e-12	2.22455e-09	4.49e-4
1	50	0.002	2.01195e-11	2.59894e-08	0.0011
1	100	0.002	3.02073e-11	4.1298e-08	0.0022
2	20	0.1	8762.23	594618	4.49e-4
2	50	0.1	11643.3	820727	0.0011
2	100	0.1	15584.3	1.11386e+06	0.0022
2	20	0.002	57.8128	218547	4.49e-4
2	50	0.002	88.1022	337592	0.0011
2	100	0.002	123.198	473843	0.0022
3	20	0.1	139.311	12634.5	4.49e-4
3	50	0.1	152.166	13513.8	0.0011
3	100	0.1	191.677	16975.2	0.0022

1	2	3	4	5	6
3	20	0.002	0.0108179	53.1759	4.49e-4
3	50	0.002	0.0167994	83.371	0.0011
3	100	0.002	0.0235901	117.468	0.0022
4	20	0.1	1323.04	31844.2	4.49e-4
4	50	0.1	2102.86	50000.3	0.0011
4	100	0.1	2979.06	70546.1	0.0022
4	20	0.002	0.494925	1911.4	4.49e-4
4	50	0.002	0.782567	3031.82	0.0011
4	100	0.002	1.10809	4293.25	0.0022

Аппроксимация экспоненциальными функциями дает плохие результаты вследствие того, что график экспоненты плохо ложится на исходные кривые. Увеличение количества экспонент приводит к существенному усложнению вычислений. Однако время вычислений у данного метода существенно меньше, чем у всех предыдущих.

Из рассмотренных примеров видно, что наибольшей точностью приближения обладают методы, основанные на аппроксимации рядом Фурье, а наименьшим временем вычислений – методы, основанные на экспоненциальных функциях, однако точность последних применительно к аппроксимации переходных процессов в электроприводе постоянного тока оставляет желать лучшего. Методы аппроксимации степенными полиномами наиболее приемлемы на малых интервалах, при этом степень полинома нежелательно делать выше 5. Однако если необходимо аналитическое определение производной, то следует обращать внимание и на точность воспроизведения производной. Наилучшее воспроизведение производных при данных исходных функциях наблюдается у полиномов со степенью до 10.





Грищенко Наталя Володимирівна  
Семеріков Сергій Олексійович  
Хараджян Олександр Агасійович  
Чернов Євген Вадимович

## **Порівняльний аналіз методів апроксимації**

**Рекомендовано до друку на засіданні кафедри інформатики КДПІ, протокол №4 від 19.11.98 р.**

Підписано до друку 27.11.98 р. Формат 60×84 1/16. Папір друк. №2. Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 0,97. Тираж 300 прим. Зам. № 726

*Друкарня СП Міра, 324086 Кривий Ріг, пр. Гагаріна 57*