

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХІВ ТІЛ ПІД ДІЄЮ СИЛИ ВСЕСВІТНЬОГО ТЯЖІННЯ

І.О. Теплицький, С.О. Семеріков

Криворізький державний педагогічний університет

Постановка проблеми. Ознайомлення учнів з технологією комп'ютерного моделювання при вивченні фізики сьогодні є актуальною задачею шкільної, а відповідно, і вищої педагогічної освіти, про що вже йшлося в попередніх публікаціях авторів [4; 6; 8; 9]. Поданий нижче матеріал із дослідження рухів тіл під дією сили всесвітнього тяжіння містить ряд порівняно самостійних фрагментів, а саме: 1) рух штучного супутника навколо планети (або планети навколо Сонця); 2) рух тіл в системах типу “подвійна зірка”; 3) експериментальна перевірка законів руху планет (законів Кеплера); 4) узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного показника степеня k для відстані r між тілами: $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}$; 5) моделювання абсолютних і відносних рухів планет Сонячної системи (рухи планет у геліоцентричній та геоцентричній системах відліку).

Пропонуючи школярам подібні дослідження, ми нагадуємо, що в тих випадках, коли експериментування з реальними об'єктами виявляється принципово неможливим чи неефективним, експерименти проводять з математичними моделями цих об'єктів. Якщо в такій діяльності застосовують комп'ютер, то говорять про комп'ютерне моделювання. При вивченні зазначених рухів чи не найбільший інтерес становить питання про вигляд їхніх траєкторій. Побудова таких траєкторій та їх дослідження і стануть основною метою кожного з перелічених вище фрагментів. Середовищем для моделювання обираємо відомі учням з курсу інформатики *електронні таблиці*.

Основна частина. У пропонованому матеріалі йдеться про закон всесвітнього тяжіння $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Якщо до цього додати другий закон Нью-

тона $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$, то, як зауважує Р. Фейнман, досвідченому математику цих відомостей цілком вистачить для виводу всіх подальших наслідків [10, 122]. Не претендуючи на таке високе звання, ми усе ж наважимося на спробу отримати хоч і не всі, але досить важливі наслідки.

1. Рух штучного супутника планети

В основу побудови моделі покладемо наступні припущення:

1. Будемо вважати (і не без підстав) масу штучного супутника набагато меншою за масу планети: $m_{\text{супут}} \ll m_{\text{пл}}$, це дозволить не розглядати рух планети.

2. Будемо нехтувати опором середовища і впливом інших тіл Сонячної системи на дані два тіла. В такому разі на супутник діятиме єдина сила – сила всесвітнього тяжіння [2, 81].

3. Враховуючи, що відстань між центрами планети й супутника значно перевищує розміри супутника, і розглядаючи планету як однорідну кулю, можемо вважати, що забезпечено умови застосовності закону тяжіння.

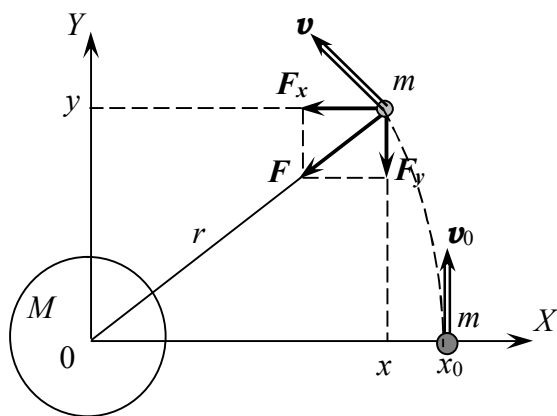


Рис. 1.

натами x, y .

Нехай початковий момент “спостереження” відповідає перетину орбіти супутника з віссю абсцис, як це показано на рис. 1.

З подібності трикутників маємо $\frac{F_x}{|F|} = -\frac{x}{r}$, $\frac{F_y}{|F|} = -\frac{y}{r}$, що разом із законом тяжіння дає $F_x = -GMmx / r^3$; $F_y = -GMmy / r^3$. Проекції прискорення ви-

Опишемо рух у прямокутній системі координат з початком у центрі планети (рис. 1). Тут \mathbf{F} – вектор сили тяжіння; F_x і F_y – його складові; M, m – маси центрального тіла і тіла-супутника; \mathbf{v} – вектор орбітальної швидкості супутника. Положення супутника визначається двома коорди-

значимо за другим законом Ньютона: $a_x = -GMx / r^3$; $a_y = -GM y / r^3$. Відстань r між тілами визначимо за теоремою Піфагора: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Система рівнянь для a_x , a_y і r є математичною моделлю руху тіла-супутника навколо центрального тіла.

Дослідимо форми можливих орбіт супутника в залежності від початкових умов руху. Конкретизуємо задачу. Нехай штучний супутник рухається навколо Землі на висоті $h = 300$ км. Тоді відстань між Землею і супутником $r = R_3 + h = 0,3 \cdot 10^6$ м + $6,4 \cdot 10^6$ м = $6,7 \cdot 10^6$ м. Учням відомо [2, 81], що тіло стане супутником планети, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості $v_{1к}$: $v_y(0) = v_{1к} = \sqrt{GM / r}$.

Обговорення алгоритму. Обчислювальний експеримент

1. У відповідності з [2: 57–58, 91–97] обчислення координат x , y точок орбіти слід вести за циклічною схемою *прискорення* \rightarrow *швидкість* \rightarrow *координата*.

2. Початкову швидкість $v_y(0)$ обчислювати за формулою $v_{1к} = \sqrt{GM / r}$.

3. Фіксувати значення кінематичних характеристик руху через інтервали часу $\Delta t = 1$ хв. = 60 с, а час моделювання оброти рівним ~ 100 хв.

Оскільки значенням початкової швидкості $v_y(0)$ є перша космічна, то траєкторією руху виявляється коло (рис. 2). Якщо в момент виходу на орбіту швидкість супутника $v_y(0)$ задовольнятиме нерівності $v_{1к} < v_y(0) < \sqrt{2} v_{1к}$, то можна побачити, що орбіта стає еліптичною (тут $\sqrt{2} v_{1к} = v_{2к}$ – друга космічна швидкість). Для цього в обчислювальному експерименті можна збільшити попереднє значення $v_y(0)$, наприклад, в 1,2 рази (рис. 3). Надаючи, нарешті, початковій швидкості значення $v_y(0) = \sqrt{2} v_{1к}$, одержуємо параболічну траєкторію (рис. 4).

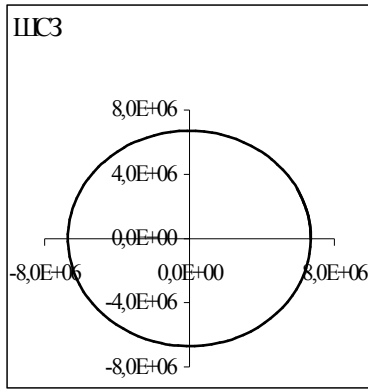


Рис. 2.

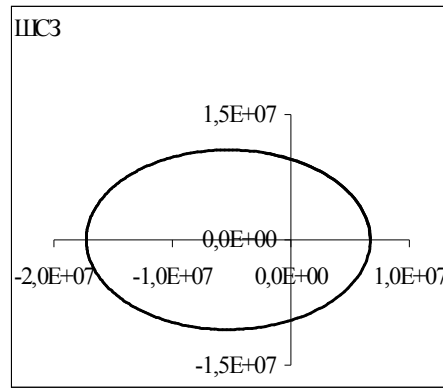


Рис. 3.

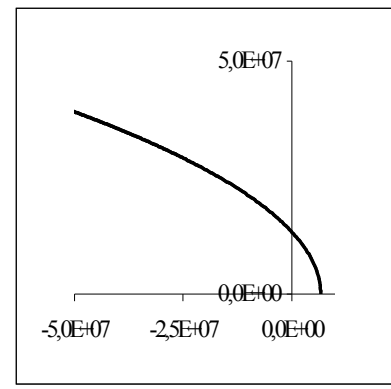


Рис. 4.

Пропонуємо такі завдання: 1. За якої умови траєкторія супутника стає гіперболічною? Перевірте відповідь на моделі. 2. Закон тяжіння не відрізняє штучний супутник від природного. Змоделюйте рух Землі навколо Сонця.

2. Рух природного супутника планети та компонентів системи “подвійна зірка”

Природні супутники планет мають маси, порівнянні з масами самих планет. Отже не можна нехтувати рухом жодного з тіл. Моделювання руху компонентів таких систем є більш складною задачею, розв’язання якої потребує переходу до системи відліку, пов’язаної зі спільним центром мас.

Багато плідних ідей стосовно розв’язування подібних задач можна знайти у [11] на с. 20 та на с. 137–140.

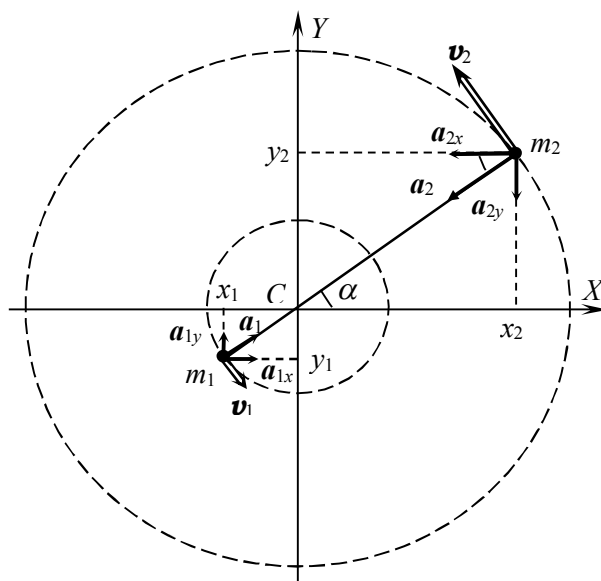


Рис. 5.

Почнемо аналіз із простого випадку. Нехай тіла масами m_1 і m_2 рухаються *коловими* орбітами з радіусами r_1 і r_2 , і відстань R між ними під час руху не змінюється (рис. 5).

Пропонуємо задачу: Якби на місці Місяця знаходилась планета з масою утричі меншою за масу Землі, то який вигляд мали б орбіти обох тіл?

Результат моделювання показаний на рис. 6. При побудові цього рисунку доцільно час моделювання був обмежений так, щоб тіла не виконали й одного повного оберту. Довжина штрихового відрізка прямої, що сполучає точки траєкторій у останній момент, дорівнює сталій відстані R між тілами, як про це йшлося вище. Крім того, стають зрозумілими напрями руху кожного з тіл.

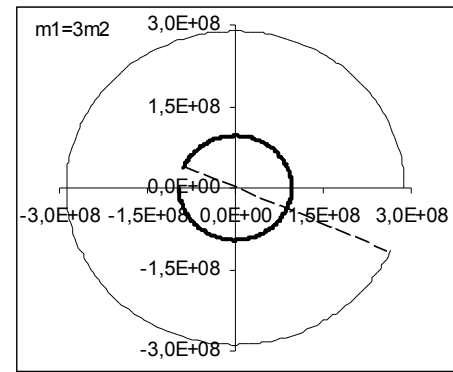


Рис. 6

Таким самим має бути підхід до моделювання руху компонентів у системах, що зветься фізично подвійними зірками. Вони складаються з двох зірок, об'єднаних силами тяжіння. Зірки обертаються по еліптичних орбітах навколо спільного центра мас. Виявляється, остання модель передбачає такі об'єкти. Проте ми вважаємо корисним перехід від одиниць СІ до інших, які є широко вживаними в астрофізиці:

- 1) одиницею маси є маса Сонця, $1 M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг;
- 2) час вимірюють у земних роках, $1 \text{ рік} = 3,15 \cdot 10^7$ с;
- 3) одиницю довжини обирають в залежності від задачі:
 - астрономічна одиниця (середній радіус земної орбіти),
 $1 \text{ А.О.} = 1,5 \cdot 10^{11}$ м;
 - світловий рік (відстань, що її долає світло протягом 1 року),
 $1 \text{ св.рік} = 9,5 \cdot 10^{15}$ м;
 - парсек (відстань, з якої радіус земної орбіти видно під кутом $1''$),
 $1 \text{ пк} = 3,1 \cdot 10^{16}$ м.

Відстані до зірок найчастіше подають у світлових роках або в парсеках, а відстані між компонентами систем подвійних зірок – у астрономічних одиницях.

Згаданий перехід фактично стосується визначення числового значення розмірного коефіцієнта G у законі всесвітнього тяжіння. Така вправа є корисною, оскільки розкриває зміст часто вживаної фрази: “Числове значення цього коефіцієнта залежить від вибору системи одиниць”.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,5 \cdot 10^{11}}\right)^3 A.O.^3}{\left(\frac{1}{1,99 \cdot 10^{30}}\right) M_C \cdot \left(\frac{1}{3,15 \cdot 10^7}\right)^2 \text{рік}^2}.$$

$$\text{Остаточню отримуємо } G = 39 \frac{A.O.^3}{M_C \cdot \text{рік}^2}.$$

Задача. Побудувати орбіти компонентів системи подвійної зірки, до складу якої входять зірки з масами $1 M_C$ та $4 M_C$, відстань між якими становить $20 A.O.$

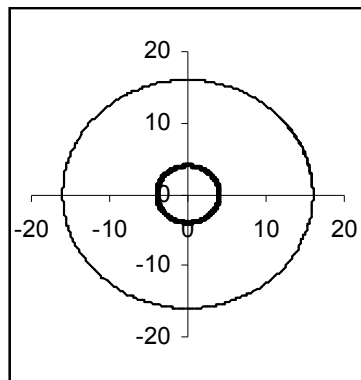


Рис. 7.

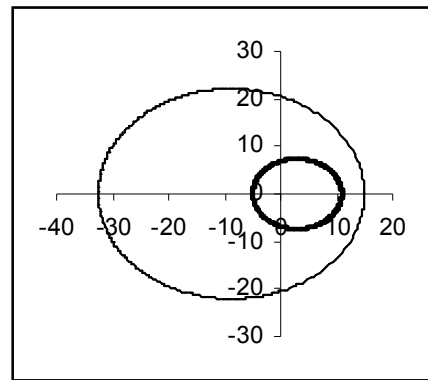


Рис. 8.

За умови, що початкова швидкість супутника дорівнює числовому значенню швидкості, яка для штучних супутників має назву “перша космічна”, матимемо вже знайомий результат з коловими орбітами (рис. 7), а у випадку її збільшення, наприклад, у 1,17 рази орбіти будуть еліптичними (рис. 8).

У наш час закон тяжіння кладуть в основу розрахунків траєкторій космічних апаратів, і він підтверджується усім досвідом практичної космонавтики. Принагідно зазначимо, що польоти американських космічних апаратів до Місяця з наступним поверненням на Землю здійснювалися за найекономічнішою схемою, що її в 1927 р. обґрунтував і розрахував невизнаний за радянських часів талановитий український вчений Юрій Кондратюк. Відповідну траєкторію американські дослідники називають “траєкторією Кондратюка”.

У сучасній астрофізиці закон тяжіння відіграє важливу роль при описі процесів, що відбуваються на різних стадіях еволюції зірок.

3. Закони Кеплера як наслідки закону всесвітнього тяжіння

Як відомо, закон всесвітнього тяжіння був відкритий Ньютоном помітно пізніше від законів Кеплера і виявився їх теоретичним узагальненням. Якщо закони Кеплера сформульовані лише для планет і передбачають лише еліптичні орбіти, то закон всесвітнього тяжіння описує гравітаційні взаємодії будь-яких тіл, орбіти яких, як ми бачили, можуть бути не лише еліпсами, а й параболою або гіперболою. Суть нашого підходу полягає у такому: якщо стверджується, що траєкторією руху є одна з кривих другого порядку, то всі її точки мають задовольняти означенню даної кривої. На наш погляд, це надійний спосіб відрізнити еліпс від овалу чи параболу від гіперболи.

Перший закон Кеплера: Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

Означення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є сталою.

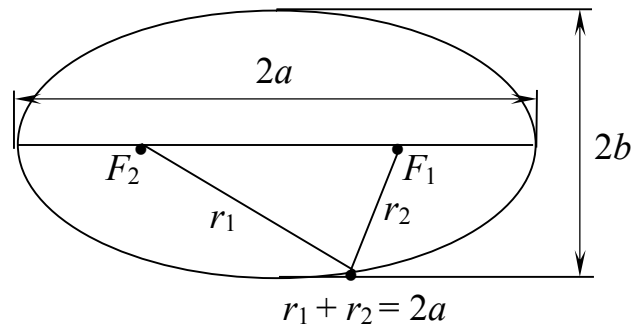


Рис. 9.

На рис. 9 показані: F_1, F_2 – фокуси еліпса; $2a$ – велика вісь; $2b$ – мала вісь.

Повернемося до таблиці, що відображує рух штучного супутника Землі, і до рис. 3. На основі закону тяжіння були розраховані координати точок орбіти, які відповідали послідовним однаковим проміжкам часу Δt , і за цими координатами побудували саму орбіту. Якщо траєкторія дійсно є еліпсом, а центральне тіло знаходиться у фокусі F_1 , то для всіх точок такої траєкторії повинна виконуватись рівність $r_1 + r_2 = 2a = const$.

	...	E	F	G	H	I	J	K
1	...	x	y	Дано:	ШСЗ	Перший закон Кеплера		
2	...	6,70E+06	0,00E+00	$G=$	6,672E-11	r_1	r_2	r_1+r_2
3	...	6,68E+06	5,55E+05	$\Delta t=$	60	6,70	17,27	23,97
4	...	6,64E+06	1,11E+06	$M=$	5,976E+24	6,71	17,26	23,97
5	...	6,56E+06	1,66E+06	$r=$	6,700E+06	6,73	17,24	23,97
6	...	6,45E+06	2,20E+06	$v_x(0)=$	0	6,76	17,20	23,97
7	...	6,31E+06	2,73E+06	$v_y(0)=$	9,26E+03	6,81	17,15	23,97
8	...	6,14E+06	3,24E+06	$x(0)=$	6,700E+06	6,87	17,09	23,97

	...	E	F	G	H	I	J	K
9	...	5,95E+06	3,75E+06	$y(0)=0$		6,95	17,02	23,97
...

Рис. 10.

Таким чином, при русі тіла під дією сили тяжіння траєкторія, якщо вона замкнута, є еліпсом, у одному з фокусів якого знаходиться центральне тіло.

Другий закон Кеплера: Напрявлений відрізок, що сполучає Сонце й планету (радіус-вектор планети) за однакові проміжки часу описує (замітає) однакові площі (рис. 13).

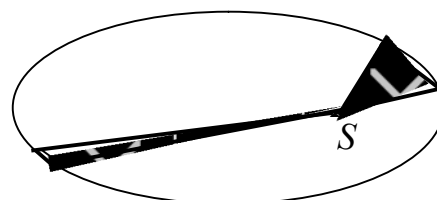


Рис. 11.

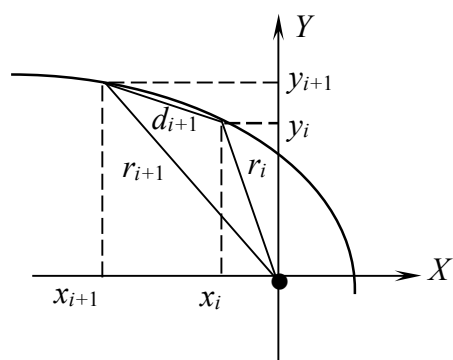


Рис. 12.

На рис. 12 показані два радіуси-вектори r_i і r_{i+1} , що відповідають початку і кінцю i -го проміжку часу Δt . Дуга, що стягує їхні кінці, з достатнім наближенням може бути замінена хордою d_{i+1} . Шукану площу S_i знайдемо за формулою Герона. На рис. 13 подано відповідний фрагмент доповненої таблиці:

	...	L	M	N	O	P
1	...	Другий закон Кеплерд				
2	...	r_i	r_{i+1}	l_{i+1}	p_i	S_i
3	...	6,70	6,71	0,56	6,98	1,86
4	...	6,71	6,73	0,55	7,00	1,86
5	...	6,73	6,76	0,55	7,02	1,86
6	...	6,76	6,81	0,55	7,06	1,86
...

Рис. 13.

4. Узагальнення закону всесвітнього тяжіння на випадок довільного показника степеня для відстані між тілами

Передбачається дослідження закону тяжіння, записаного у вигляді

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^k}, \text{ де } k - \text{довільне дійсне число.}$$

Така постановка проблеми виходить за межі шкільних курсів фізики й математики і фактично є об'єктом курсу теоретичної фізики (наприклад, [3,

48-49]). В означеній ситуації дослідження комп'ютерних моделей виявляється єдиним методом, що дозволяє усунути ускладнення, пов'язані з обмеженим математичним апаратом школярів.

Розглянемо простий випадок – рух супутника – і знову знехтуємо масою супутника в порівнянні з масою центрального тіла, а також опором середовища і впливом інших тіл на дані два тіла. Як і раніше, положення супутника визначається двома координатами x, y і тепер $F_x = -GMmx / r^{k+1}$; $F_y = -GMmy / r^{k+1}$. Відповідно $a_x = -GMx / r^{k+1}$; $a_y = -GMy / r^{k+1}$.

$$\text{Оскільки } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ то } a_x = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}}; a_y = -\frac{GMy}{(x^2 + y^2)^{\frac{k+1}{2}}}.$$

Останні три рівняння є новою математичною моделлю руху супутника.

Нагадаємо, що тіло стає супутником, якщо у початковий момент орбітального руху йому надати першої космічної швидкості $v_{1к}$, значення якої звичайно знаходять за умови, що сила тяжіння забезпечує необхідне доцентрове (нормальне) прискорення: $GM \cdot m / r^k = mv^2 / r$, звідки $v_{1к}(0) = v_{1к} = \sqrt{GM / r^{(k-1)}}$.

Нехай, як і раніше, початковий момент орбітального руху супутника відповідає точці перетину орбіти з віссю абсцис (рис. 1).

Обчислювальний експеримент з $k = 2$ повністю відтворює раніше отримані результати, тому має сенс перейти до експериментів з $k \neq 2$. Нехай $k = 1,8$, $v_y(0) = 1,25v_{1к}$.

Результати моделювання разом з відповідними Δt подані на рис. 14 (а – г).

Саме за такими траєкторіями мали б рухатись планети навколо Сонця або супутники навколо планет згідно модифікованого закону тяжіння.

Рис. 14а показує, що тіло-супутник, виконавши один оберт уздовж еліпса, не потрапляє у початкову точку, оскільки велика вісь еліпса за цей час повертається на деякий кут $\Delta\phi$ відносно центрального тіла (точки 0; 0).

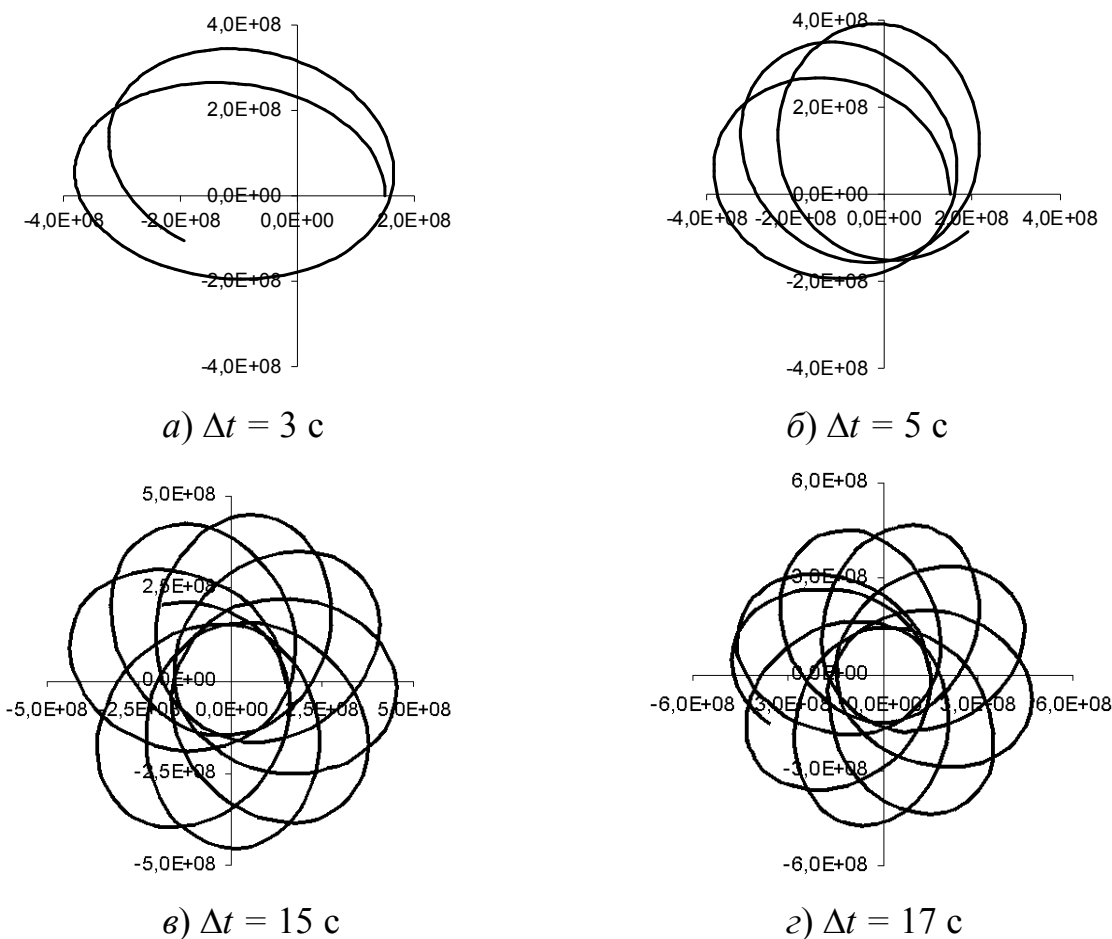


Рис. 14.

Для порівняння: рис. 15 запозичений з курсу теоретичної фізики [3, 49].

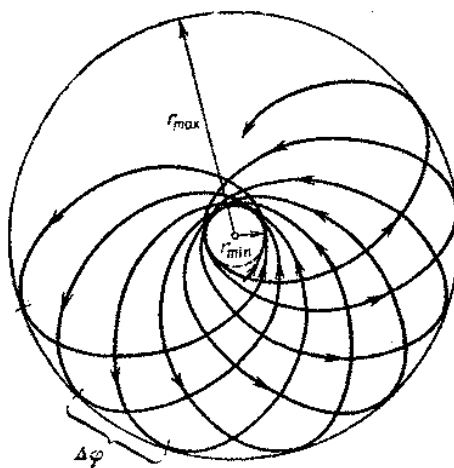


Рис. 15.

5. Комп'ютерне моделювання абсолютних та відносних рухів планет Сонячної системи

Основною метою чергового дослідження поставимо задачу побудови траєкторій рухів планет у двох системах відліку: в системі, пов'язаній із Со-

нцем (геліоцентричній), та в системі, пов'язаній із Землею (геоцентричній). Така постановка проблеми дослідження лежить в межах шкільних курсів фізики й математики. Зокрема учням 9 класу відомі правила переходу від однієї системи координат до іншої (на прикладі паралельного перенесення).

I. Геліоцентрична система відліку

Побудуємо в одній координатній площині траєкторії руху Землі і Марсу навколо Сонця. Відповідні дані про планети будемо брати з [7, 120–133].

Вибір у якості початкових швидкостей $v_{1y}(0)$, $v_{2y}(0)$ відповідно розрахованих за формулою $v_{1K} = GM / r$ забезпечує колові траєкторії руху планет, що є спрощенням їх реального руху (особливо це стосується Марсу), оскільки в дійсності планетні орбіти є еліпсами. При моделюванні для перетворення колових орбіт на еліптичні, як ми вже бачили, треба вираз для v_{1K} помножити на число q , що задовольняє умові $1 > q > \sqrt{2}$. З курсу астрономії [5] відомо, що для Землі потрібний коефіцієнт становить 1,020204, а для Марсу – 1,094442. Розраховані значення початкових швидкостей відповідають найближчій до Сонця (фокуса) точці траєкторії – афелію. Побудовані орбіти Землі та Марсу наведені на рис. 16.

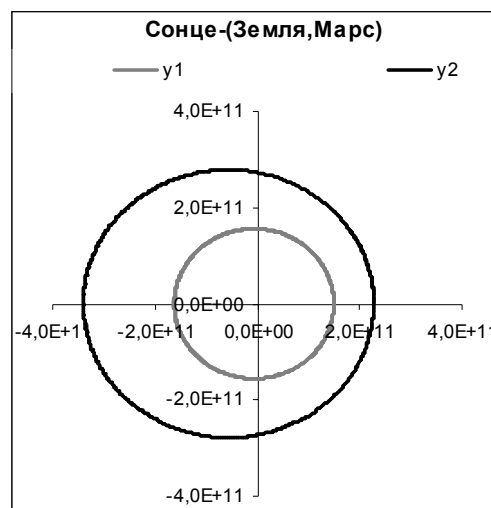


Рис. 16.

II. Геоцентрична система відліку

Відповідний перехід виконаємо паралельним перенесенням початку координат у центр Землі, отримавши таким чином вигляд траєкторії руху Марсу з позиції земного спостерігача (рис. 17). Рис. 17 відображує видиму з Землі траєкторію руху Марсу на небесній сфері. Слід звернути увагу школярів на той факт, що поява петлеподібних траєкторій є суто кінематичним, а не динамічним ефектом, обумовленим переходом до іншої системи відліку. Саме такі петлеподібні рухи планет спостерігали ще прадавні астрономи Шумеру, Єгипту, Китаю, Давньої Греції.

Систематизацію таких рухів дав Клавдій Птолемей (100–165 рр. н.е.), який створив теорію видимого руху Сонця, Місяця і планет [5, 55–56]. На основі каталогу Гіппарха, власних спостережень та фізики Аристотеля він розробив найбільш докладну й популярну геоцентричну систему світу, яка визначала космологічні уявлення вчених на протязі наступних 1500 років. Праця Птолемея “Велика математична побудова астрономії” (в арабському перекладі “Альмагест”) у тринадцяти книгах стала науковою астрономічною енциклопедією давнини та Середньовіччя.

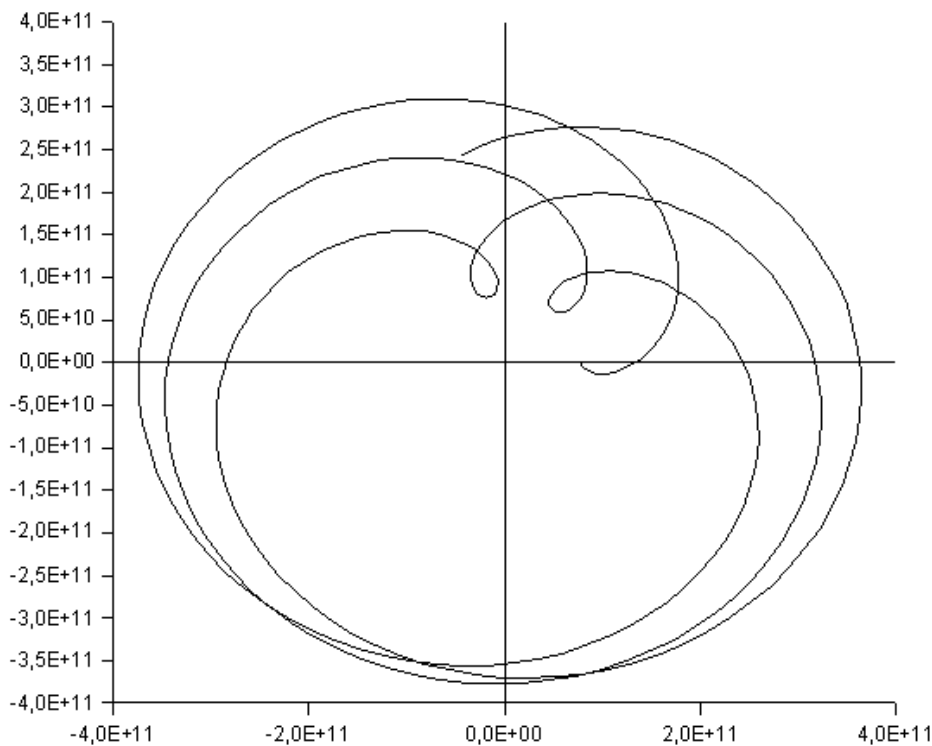


Рис. 17.

Одним із творців нової астрономії і нового наукового світогляду став Микола Копернік (1473–1543). У своїй праці “Про обертання небесних сфер” він виклав геліоцентричну теорію, яка висунула найважливіший принцип будови Всесвіту – його рухомість. Планетарність Землі усувала давні уявлення про унікальність її як центра обертання Всесвіту. Учням буде цікаво дізнатись, що розрахунки руху планет “за теорією М. Коперніка” давали меншу точність у передбаченні положень планет, ніж розрахунки “за теорією Птолемея”. Справа в тому, що в теорії М. Коперніка планети мали рухатись рівномірно по ідеально круглим орбітам. Насправді ж, як пізніше встановив Й.

Кеплер, орбіти планет мають форму еліпса, а швидкості їхнього руху періодично змінюються [5, 67].

Висновки

1. Однією з умов успішного вивчення основ комп'ютерного моделювання є залучення школярів до процесу розробки математичних моделей і до експериментування з ними.

2. Багато задач про рухи тіл під дією *змінних* сил можуть бути розв'язані наближено з достатньо високою точністю за допомогою чисельного аналізу, коли застосування аналітичних методів виявляється з різних причин неможливим. Саме тому автори факультативних курсів фізики (наприклад, [1, с. 81–90]) вважають доцільним ознайомлення школярів з основами чисельного аналізу. Завдяки здатності опрацювати великі обсяги інформації з високою швидкістю комп'ютер виявляється ідеальним засобом для реалізації чисельних методів.

Література:

1. Кабардин О.Ф. и др. Факультативный курс физики, 8 кл.: Пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1973. – 206 с.
2. Коршак Є.В., Ляшенко О.І., Савченко В.Ф. Фізика, 9 кл.: Підруч. для серед. шк. – Київ–Ірпінь: Перун, 2002. – 232 с.: іл.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10-ти т.: Т. 1. Механика. – 4-е изд., испр. – М.: Наука, 1988. – 216 с.
4. Ліннік О.П., Моїсеєнко Н.В., Євтеєв В.М., Теплицький І.О., Семеріков С.О. Об'єктно-орієнтоване моделювання у підготовці майбутніх учителів фізики // Зб. наук. пр. К-ПДУ: Серія педагогічна. Вип. 12: Проблеми дидактики фізики та шкільного підручника фізики в світлі сучасної освітньої парадигми. – Кам.-Под.: Кам.-Под. держ. ун-т, інф.-вид. відділ, 2006. – С. 127-130.
5. Румянцев А.Ю., Серветник Т.А. Астрономия: Учебно-методическое пособие для преподавателей астрономии, студентов педагогических вузов и учи-

- телей средних учебных заведений. – Магнитогорск: МаГУ, 2003. – 309 с.
6. Соловйов В.М., Семеріков С.О., Теплицький І.О. Інструментальне забезпечення курсу комп'ютерного моделювання // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2000. – №2. – С. 28–32.
 7. Струве О., Линдс Б., Пилланс Э. Элементарная астрономия. – М.: Наука, 1964. – 468 с.
 8. Теплицький І.О. Елементи комп'ютерного моделювання: Навч. посібник. – Кривий Ріг: КДПУ, 2005. – 208 с.
 9. Теплицький І.О., Семеріков С.О. Комп'ютерне моделювання механічних рухів у середовищі електронних таблиць // Фізика та астрономія в школі. – 2002. – №5. – С. 40–46.
 10. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 267 с.
 11. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1969. – 624 с.

Аннотация

Статья посвящена опыту внедрения технологии компьютерного моделирования в факультативном курсе “Основы компьютерного моделирования в физике” для учащихся 9-11 классов технического и физико-математического профилей и в курсе “Информатика: моделирование” для студентов физико-математических факультетов педагогических университетов.