Жалдак М.І., Михалін Г.О., Деканов С.Я.

Навчання майбутніх учителів математики інтегрального числення функцій однієї змінної з використанням комп'ютерних засобів математики

Навчання інтегрального числення функцій однієї змінної відіграє важливу роль у формуванні професійної культури вчителя математики не тільки тому, що однією з основних змістових ліній шкільного курсу математики є «Початки диференціального та інтегрального числення». Значно важливішим є тісний зв'язок інтегрального числення із сучасними математичними теоріями: теорією інтеграла, теорією міри, функціональним аналізом, теорією ймовірностей, математичною інформатикою та багатьма іншими. Завдяки цьому у процесі навчання можна не тільки розкрити майбутнім учителям потужність методів інтегрального числення, запропонованих засновниками цього числення понад три століття тому, а й продемонструвати постійний розвиток та удосконалення математичних теорій. Результатом такого розвитку є суттєве розширення меж застосування математичних теорій, а результатом удосконалення математичних теорій є значне розширення кола людей, які можуть застосовувати математичні теорії на практиці: те, що раніше було доступне лише геніям, перетворюється у звичайну навчальну задачу шкільного курсу математики.

В цій статті розглядається нетрадиційний підхід до навчання інтегрального числення функцій однієї змінної майбутніх учителів математики. Нетрадиційність полягає у доборі навчального матеріалу та методів його подання.

Взаємно обернені операції диференціювання (знаходження похідної даної функції) та інтегрування (знаходження первісної, тобто невідомої функції за її відомою похідною) були введені у 70-х роках XVII століття засновниками диференціального та інтегрального числення Г. Лейбніцом та І. Ньютоном. Тому, згідно з принципом генетичного подання навчального матеріалу, навчання інтегрального числення доцільно розпочинати з вивчення поняття первісної та *інтеграла Ньютона – Лейбніца* (або NL-*інтеграла*), як приросту первісної підінтегральної функції: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F'(x) = f(x),\ \ x \in [a;b]$.

Зауважимо, що поняття невизначеного інтеграла не відіграє в сучасній математиці якоїсь суттєвої ролі, а досить значна увага, яку часто приділяють вивченню теми «Невизначений інтеграл», обумовлена швидше традиційністю, а не суттю справи. На практиці зручно користуватися лише позначенням невизначеного інтеграла:

$$\int f(x)dx = \left\{ \int_a^x f(t)dt + C : C \in \boldsymbol{R} \right\},$$

де a – фіксована точка даного проміжка $\langle \alpha; \beta \rangle$, а x – біжуча точка цього проміжка. Отже, *невизначений інтеграл* – це множина усіх первісних підінтегральної функції на даному проміжку. Тому, перш ніж говорити про суму та різницю невизначених інтегралів, добуток сталої на невизначений інтеграл, похідну від невизначеного інтеграла, треба спочатку ввести відповідні операції над множинами. Цього нажаль, як правило, не роблять, створюючи цим самим логічні прогалини, які не виникають, коли основний наголос робити на вивчення NL-інтеграла, а потрібні властивості невизначеного інтеграла діставати, як прості наслідки відповідних властивостей NL-інтеграла.

Для майбутніх вчителів математики важливість NL-інтегралів полягає також у тому, що вони є доступнішими для вивчення у загальноосвітній школі, ніж визначені інтеграли (тобто інтеграли Коші – Рімана), а межі застосування NL-інтегралів є досить широкими. Недарма професійні математики використовували лише NL-інтеграли протягом двох століть аж до XIX століття, коли О. Коші запропонував розглядати визначений інтеграл як границю інтегральної суми, а Б. Ріман розвинув теорію визначеного інтеграла, суттєво узагальнену А. Лебегом на початку XX століття.

Враховуючи доступність для вивчення і потужність для застосування NL-інтеграла, А. М. Колмогоров запропонував вивчати у шкільному курсі математики найпростіший з усіх інтегралів – NL-інтеграл [1].

Оскільки застосування інтегрального числення пов'язані, зокрема, з відшуканням невідомого закону руху матеріальної точки за відомою швидкістю цієї точки, причому рух точки не обов'язково прямолінійний, то згідно з принципами, покладеними в основу методичної системи навчання математичного аналізу майбутніх учителів математики [2, с. 12], поняття первісної та NL-інтеграла можна ввести одночасно для комплекснозначних функцій як дійсної, так і комплексної змінної. Умова лінійної зв'язності області визначення функції гарантує, що різні первісні цієї функції відрізняються лише сталим доданком, а тому NL-інтеграл, що визначається рівністю $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, не залежить від того, яку саме первісну F обрано для підінтегральної функції f. Звідси випливає *формула Ньютона – Лейбніца* для NL-інтеграла: $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, де Φ – довільна первісна підінтегральної функції.

Безпосередньо з означення NL-інтеграла випливають його *найпростіші властивості* (правило перестановки меж інтегрування, про інтеграл з однаковими нижньою та верхньою межами інтегрування, адитивна властивість, про похідну і диференціал NL-інтеграла з верхньою змінною межею інтегрування, а також властивості, пов'язані з оцінкою модуля NL-інтеграла, з лінійністю, заміною змінної та інтегруванням частинами NL-інтеграла.

Оскільки невизначений інтеграл пов'язаний з NL-інтегралом рівністю $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$, точніше $\int f(x)\,dx = \left\{ \int_a^x f(t)\,dt + C : C \in \boldsymbol{R} \right\}$, де a – фіксована, а x – біжуча точки з лінійно зв'язної множини E, на якій функція f має первісну, то з властивостей NL-інтеграла зразу випливають відповідні *властивості невизначеного інтеграла*, а також *таблиця основних невизначених інтегралів* у загальному випадку, коли підінтегральна функція є функцією комплексної змінної.

Підкреслимо, що не кожна елементарна функція комплексної змінної має первісну у своїй області визначення навіть тоді, коли вона є аналітичною, тобто має неперервну похідну. Наприклад, функція $f(z)=\frac{1}{z}$ є аналітичною в області $D=\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$, проте не має первісної у цій області. Разом з тим ця функція (і будь-яка інша аналітична функція f) має первісну у будь-якій однозв'язній області, де функція f є аналітичною. Так, первісною функції $f(z)=\frac{1}{z}$ в однозв'язній області $D_1=\boldsymbol{C}\setminus\{z=x:x\le 0\}$ є функція $F(z)=\ln z$, а в однозв'язній області $D_2=\boldsymbol{C}\setminus\{z=x:x\ge 0\}$ первісною функції $f(z)=\frac{1}{z}$ є функція $F(z)=\ln(-z)$. У зв'язку з цим важливо вказувати у таблиці основних інтегралів не тільки первісні підінтегральних функцій, а відповідні однозв'язні області, які перетворюються у проміжки для випадку функцій дійсної змінної.

Формальне використання формул або комп'ютерних засобів для обчислення інтегралів може призвести до грубих помилок.

Наприклад, $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$, $0\le\int\limits_{-2}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-2}^{1}=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$, тобто $0\le-\frac{3}{2}$, що неможливо.

Якщо для обчислення останнього інтеграла скористатися програмою Gran1, то дістанемо: I=1.048E05.

При спробі обчислити цей самий інтеграл за допомогою програми Maxima:

(%i1) integrate(1/x^2,x,-2,1);

дістанемо таке повідомлення: "defint: integral is divergent."

За означенням інтеграл Ньютона – Лейбніца існує тоді й тільки тоді, коли підінтегральна функція має первісну у заданій області E, до якої належать межі інтегрування. Загальна теорія функцій комплексної змінної дає відповідь на питання, *коли функція f має первісну в області E*: необхідною умовою цього є аналітичність (тобто існування неперервної похідної) функції в області E і ця умова є достатньою у випадку однозв'язної області E. Разом з тим для функцій дійсної змінної (навіть комплекснозначних) умови існування первісної не такі жорсткі: достатньо вимагати, щоб функція була неперервною на заданому проміжку, а наведені вище приклади доводять, що в загальному випадку умову неперервності послабити не можна.

Для доведення NL-інтегровності неперервної функції зручно використати так звані *ламані функції* f, що набувають значень $f(x_k)$ у заданих точках $x_k \in [a;b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_k < x_{k+1} < ... < x_n = b$, а на кожному відрізку $[x_k; x_{k+1}]$ $f(x)$ лінійно змінюється від $f(x_k)$ до $f(x_{k+1})$, тобто у випадку дійсних значень $f(x_k)$ графіком функції f є ламана з вершинами $(x_k,\ f(x_k))$, $k = 0,1,..., n$ (Рис. 1).

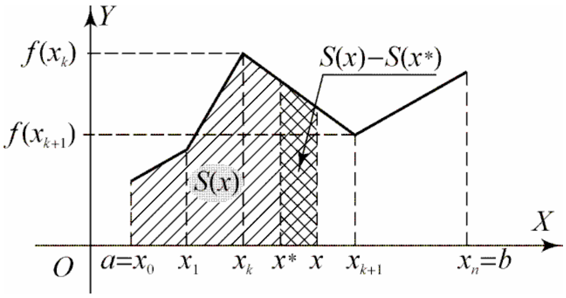


Рис. 1.

За допомогою геометричних міркувань легко переконатися, що роль первісної для ламаної функції f відіграє функція

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(f(x) + f(x_k)(x - x_k),\ x \in [x_k; x_{k+1}],\ k = 0,1,..., n-1.$$

Геометрично $S(x)$ є площею заштрихованого на Рис. 1 многокутника у випадку $f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$.

NL-інтегровність довільної неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;b]$, випливає з того, що для кожної такої функції існує послідовність $f_n(x)$ ламаних функцій, яка рівномірно збігається до $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, що гарантує збіжність послідовності $F_n(x)$ – первісних функцій $f_n(x)$ до функції $F(x)$, яка є первісною функції $f(x)$. При цьому у випадку $f(x) \geq 0$ різницю $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$ природно назвати площею криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції f, віссю OX і прямими $x = a$ та $x = b$.

У цьому полягає *геометричний зміст* NL*-інтеграла* і на цьому ґрунтується застосування програмного засобу Gran1 для обчислення NL-інтегралів.

Наприклад, результат обчислення інтеграла $\int_{-\pi/2}^{\pi} x \sin x\,dx$ за допомогою Gran1 та ілюстрація його геометричного змісту (рис. 2) виглядають так.

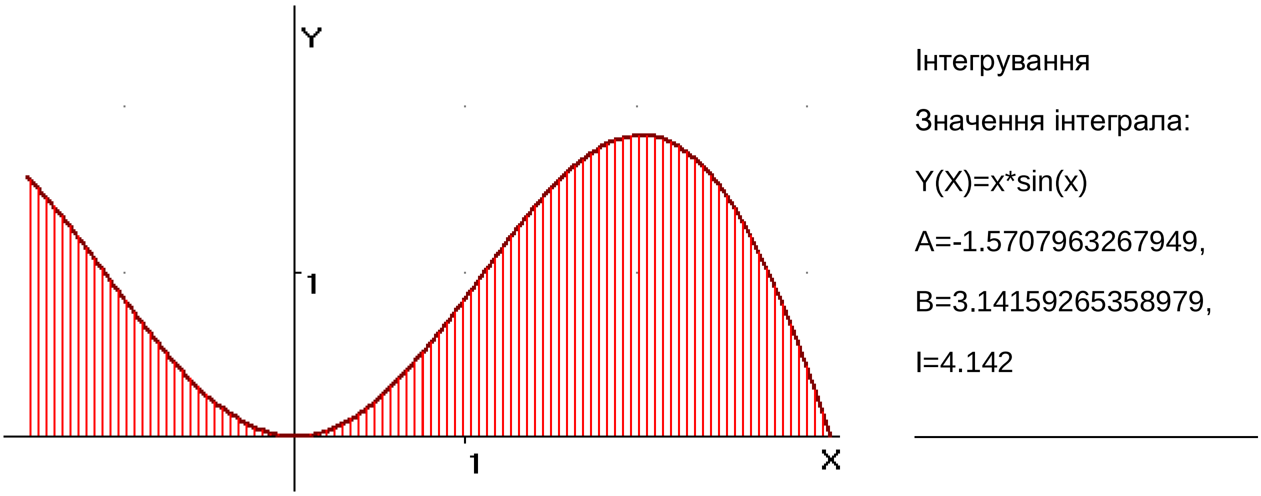


Рис. 2.

Задача обчислення невизначеного інтеграла фактично зводиться до знаходження однієї первісної підінтегральної функції f. Роль цієї первісної може відігравати інтеграл Ньютона – Лейбніца $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ з верхньою змінною межею інтегрування. Саме тому за допомогою існуючих комп'ютерних засобів математики отримується відповідь на завдання обчислення невизначеного інтеграла у вигляді однієї функції без сталого доданка.

Наприклад, результат обчислення невизначеного інтеграла $\int x \sin x\,dx$ за програмою MathCAD виводиться в такому вигляді.

$$\int x\cdot\sin(x)\,\mathrm{dx} \to \sin(x) - x\cdot\cos(x)$$

Традиційно обчисленню невизначених інтегралів функцій різних класів (раціональних і деяких ірраціональних алгебраїчних та трансцендентних) приділяють досить значну увагу. Оскільки такі обчислення у багатьох випадках є досить громіздкими, то розв'язування навіть ілюстративних прикладів вимагає багато часу. Тому основну увагу слід звернути на загальні правила обчислення невизначених інтегралів.

Так, після введення поняття елементарного дробу і знаходження методів обчислення первісної довільного елементарного дробу можна сформулювати *правило обчислення невизначеного інтеграла довільної раціональної функції* $f(z)=P(z)/Q(z)$:

1. Якщо дріб $P(z)/Q(z)$ неправильний, то шляхом ділення $P(z)$ на $Q(z)$ виділити цілу частину $R(z)$ – деякий многочлен і дробову частину $P_1(z)/Q_1(z)$ – правильний дріб.
2. Розкласти многочлен $Q_1(z)$ на множники вигляду $(z-c_k)^{\nu_k}$, де c_k – попарно різні корені кратності ν_k многочлена $Q_1(z)$.
3. Кожному множнику $(z-c_k)^{\nu_k}$ поставити у відповідність суму $\sum_{i=1}^{\nu_k} \frac{A_i^{(k)}}{(z-c_k)^i}$, $k \in \overline{1,n}$.
4. Записати рівність $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\nu_k} \frac{A_i^{(k)}}{(z-c_k)^i}$.
5. Звести праву частину останньої рівності до спільного знаменника і прирівняти чисельник знайденого дробу до $P_1(z)$.
6. Використовуючи умови рівності многочленів, обчислити невизначені коефіцієнти $A_i^{(k)}$.
7. Підставити знайдені коефіцієнти $A_i^{(k)}$ у рівність 4 та проінтегрувати рівність $f(z) = R(z) + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$: $\int f(z)\,dz = \int R(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\nu_k} A_i^{(k)} \int \frac{dz}{(z-c_k)^i}$.
8. Якщо для функції $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ усі коефіцієнти $P(z)$ та $Q(z)$ дійсні, то можна позбутися уявних виразів шляхом здійснення перетворень кожної пари інтегралів $\int \frac{dt}{(z-c_k)^i}$ і $\int \frac{dt}{(z-\overline{c_k})^i}$, що відповідають парі взаємно спряжених коренів c_k і $\overline{c_k}$.

Для реалізації цього правила можна задіяти комп’ютерні засоби математики, наприклад Maxima.

Обчислимо за допомогою Maxima інтеграл $\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz$ згідно з наведеним вище алгоритмом.

1. Виділяємо цілу частину:

(%i1) divide(z^4-z-1,z^4+z^2);

(%o1) $[1, -z^2 - z - 1]$

Таким чином, $\frac{z^4-z-1}{z^4+z^2}=1-\frac{z^2+z+1}{z^4+z^2}$.

2. Розкладаємо на комплексні множники многочлен z^4+z^2:

(%i2) gfactor(z^4+z^2);

(%o2) $z^2(z-\%i)(z+\%i)$

3, 4. Запишемо формальний розклад:

(%i3) A1/z^2+A2/z+A3/(z-%i)+A4/(z+%i)=(z^2+z+1)/z^2/(z-%i)/(z+%i);

(%o3) $\frac{A1}{z^2}+\frac{A2}{z}+\frac{A3}{z-\%i}+\frac{A4}{z+\%i}=\frac{z^2+z+1}{z^2(z-\%i)(z+\%i)}$

5. Зведемо праву частину останньої рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

(%i4) multthru(z^2*(z-%i)*(z+%i),%o3);

(%o5) $z^2(z-\%i)A4+z^2(z+\%i)A3+z(z-\%i)(z+\%i)A2+(z-\%i)(z+\%i)A1=z^2+z+1$

6. Обчислимо невизначені коефіцієнти, покладаючи в останній рівності $z=0$, $z=i$, $z=-i$ та $z=1$ і розв'язуючи відповідну систему рівнянь:

(%i6) solve([ev(%o5,z=0),ev(%o5,z=%i),ev(%o5,z=-%i),ev(%o5,z=1)]);

(%o7) $[[A2=1,A4=-\frac{1}{2},A3=-\frac{1}{2},A1=1]]$

7. Подамо задану підінтегральну функцію $f(z)=\frac{z^4-z-1}{z^4+z^2}$ у вигляді суми цілої частини та елементарних дробів і проінтегруємо її:

(%i8) f:1-lhs(%o3),%o7;

(%o8) $\frac{1}{2(z+\%i)}+\frac{1}{2(z-\%i)}-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+1$

(%i9) integrate(%,z);

(%o9) $\frac{\log(z+\%i)}{2}+\frac{\log(z-\%i)}{2}-\log(z)+z+\frac{1}{z}$

Враховуючи, що в Maxima через $\log$ позначається натуральний логарифм, запишемо відповідь:

$$\int\frac{z^4-z-1}{z^4+z^2}dz=\frac{\ln(z+i)}{2}+\frac{\ln(z-i)}{2}-\ln z+z+\frac{1}{z}+C,\ C\in\boldsymbol{C},$$

причому $z\in\boldsymbol{C}\setminus(\{z:z=x\le 0\}\cup\{z:z+i=x\le 0\}\cup\{z:z-i=x\le 0\})$ (рис. 3), проте встановити останнє можна лише за допомогою теоретичних міркувань, а не СКМ [4].

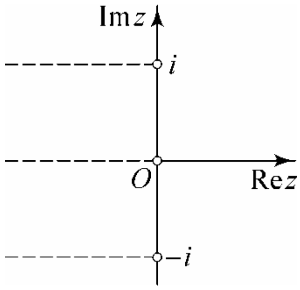


Рис. 3.

8. Оскільки коефіцієнти чисельника і знаменника підінтегральної функції дійсні, то в її невизначеному інтегралі можна позбутися уявних виразів. У даному випадку знайдемо суму двох логарифмів, які містять уявні вирази. Формально це можна зробити за допомогою Maxima:

(%i10) logcontract(log(z+%i)+log(z-%i)),expand;

(%o10) $\log(z^2+1)$

При цьому відповідь набуде вигляду: $\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz = \frac{1}{2}\ln(z^2+1) - \ln z + z + \frac{1}{z} + C$ і ця рівність буде правильною для $z \in \boldsymbol{C} \setminus (\{z : z = x \le 0\} \cup \{z : z = iy, \text{ де } |y| \ge 1\})$ (рис. 4).

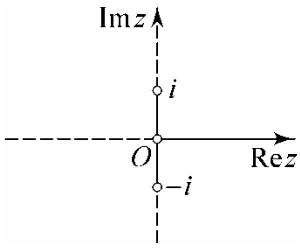


Рис. 4.

Методи інтегрування деяких класів ірраціональних алгебраїчних та трансцендентних функцій доцільно подати у вигляді таблиць 1 та 2.

Таблиця 1

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$f(x) = R(u_1, u_2, ..., u_r)$, $u_k = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}$, $k = 1,2,..., r$	$ad - bc \ne 0$, $m_k \in \boldsymbol{Z}$, $n_k \in \boldsymbol{N}$ $\forall k = 1,2,..., r$	Підстановка: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, де $p = \text{НСК}(n_1, n_2, ..., n_r)$
$f(x) = x^m (a + bx^n)^p$	$ab \ne 0$, m, n і $p \in \boldsymbol{Q}$. Функція f інтегрується в скінченному вигляді тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов: 1) $p \in \boldsymbol{Z}$, 2)	Підстановки Чебишова: 1) $x = t^k$, де k – спільний знаменник m і n; 2) $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник p; 3) $a + bx^n = t^s x^n$, де s – знаменник p;

	$\frac{m+1}{n} \in \mathbf{Z}$ або 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbf{Z}$	
$f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$	$a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$ та існує інтервал $(\alpha; \beta)$, для якого $ax^2 + bx + c > 0$, коли $x \in (\alpha; \beta)$	Підстановки Ейлера: 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$, коли $a > 0$; 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$, коли $a < 0$ і $c > 0$; 3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$, коли x_0 – один з дійсних коренів тричлена $ax^2 + bx + c$;

Таблиця 2

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$f(x) = P(x)\varphi(x)$	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це e^{ax} або $\cos ax$, або $\sin ax$	Інтегрування частинами: $u = P(x)$, $dv = \varphi(x)dx$
	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це $\ln x$ або $\arcsin ax$, або $\arccos ax$, або $\mathrm{arctg}\, ax$, або $\mathrm{arcctg}\, ax$	Інтегрування частинами: $u = P(x)$, $dv = \varphi(x)dx$
$f(x) = R(e^{ax})$	$a \neq 0$	Підстановка: $e^{ax} = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax) = R_1(\mathrm{tg}\frac{ax}{2})$	$a \neq 0$	Універсальна підстановка: $\mathrm{tg}\frac{ax}{2} = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, v) = -R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановка: $\cos ax = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(u, -v) = -R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановка: $\sin ax = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, -v) = R(u, v)$, $a \neq 0$	Підстановки: $\mathrm{tg}\, ax = t$ або $\mathrm{ctg}\, ax = t$
$f(x) = \sin^{\nu} x, \cos^{\mu} x)$	ν і μ раціональні, але не є одночасно цілими	Підстановка: $\sin^2 x = t$
$f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це $\cos ax$ або $\sin ax$ $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	Перетворити добуток $\alpha(x)\beta(x)$ на суму, наприклад: $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \ +\sin(a-b)x)$ і т. ін.
$f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це e^{ax}, $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	Двічі застосувати інтегрування частинами, кожного разу позначаючи $u = e^{ax}$

Звертаючи увагу на проблему інтегрування у скінченному вигляді, доцільно підкреслити, що у сучасній математиці неелементарні функції (а їх значно більше, ніж елементарних) відіграють надзвичайно важливу роль, а використання сучасних комп'ютерних засобів математики взагалі нівелює відмінності між елементарними та неелементарними функціями, оскільки за їх допомогою можна швидко і легко оперувати як із звичайним синусом, так і з інтегральним, як з факторіалами, так і з гама-функцією, як з експонентою, так і з функцією Лапласа тощо.

Проілюструємо можливості застосування СКМ Maxima при інтегруванні ірраціональних функцій. Досить широкий підклас інтегралів можна обчислити безпосередньо за командою integrate. Наприклад,

(%i1) 'integrate(sqrt(x)/(2+sqrt(x)),x);

(%o1) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx$

(%i2) %,nouns;

(%o2) $-8(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}+2)^2+8\log(\sqrt{x}+2)$

Разом з тим часто подібні інтеграли безпосередньо обчислити не вдається:

(%i3) integrate(((x+1)^2/(x-1)^5)^(1/3),x);

(%o3) $\int \frac{(x+1)^{2/3}}{(x-1)^{5/3}}dx$

У такому випадку доцільно зробити заміну змінної:

(%i4) changevar(%,(x+1)/(x-1)=t^3,t,x);

(%o4) $-3\int \frac{t^4}{t^3-1}dt$

(%i5) %,nouns,expand;

(%o5) $\frac{\log(t^2+t+1)}{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\log(t-1)-\frac{3t^2}{2}$

Повернемось до попередньої змінної:

(%i6) %,t=((x+1)/(x-1))^(1/3);

(%o6) $\frac{\log\left(\frac{(x+1)^{2/3}}{(x-1)^{2/3}}+\frac{(x+1)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}}+1\right)}{2}-\sqrt{3}\,\mathrm{atan}\left(\frac{2(x+1)^{1/3}}{\sqrt{3}(x-1)^{1/3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\log\left(\frac{(x+1)^{1/3}}{(x-1)^{1/3}}-1\right)-\frac{3(x+1)^{2/3}}{2(x-1)^{2/3}}$

Метод інтегрування частинами можна реалізувати у системі Maxima за допомогою команди

byparts1(x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-’integrate(dv*rat(diff(u,x)),x)),

яку доцільно зберегти у файлі bypart1.mac для подальшого використання.

Наприклад, спробуємо обчислити інтеграл

(%i7) 'integrate(log(x+sqrt(1+x^2)),x);

(%o7) $\int \log(\sqrt{x^2+1}+x)\,dx$

(%i8) %,nouns;

(%o8) $-\int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}+x^3+x}dx + x\log(\sqrt{x^2+1}+x)+\operatorname{atan}(x)-x$

Зрозуміло, що така відповідь некоректна. Застосуємо тепер метод інтегрування частинами:

(%i9) load(bypart1)$

(%i10) byparts1(x,log(x+sqrt(1+x^2)),1);

(%o10) $x\log(\sqrt{x^2+1}+x)-\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(%i11) %,nouns;

(%o11) $x\log(\sqrt{x^2+1}+x)-\sqrt{x^2+1}$

Використання СКМ MathCAD надає дещо скромніші можливості обчислення невизначених інтегралів, ніж системи Maxima. Тому для обчислення складніших інтегралів доводиться частіше застосовувати метод заміни змінної. Розглянемо, як реалізувати цей метод на прикладі обчислення інтеграла $\int \sqrt{x}\,\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$.

1. Задаємо функцію, яку потрібно проінтегрувати:

$f(x) := \sqrt{x}\,\operatorname{atan}\sqrt{x}$.

2. Задаємо функцію $x = g(t)$, вводячи нову змінну, та обернену до неї функцію $t = h(x)$. При відшуканні цих функцій можна на окремому робочому аркуші скористатися командою solve.

$g(t) := t^2 \qquad h(x) := \sqrt{x}$.

3. Окремо обчислюємо нову підінтегральну функцію $f1(t)$. Це робиться для того, щоб побачити її, а основне – щоб спростити перед інтегруванням. Без спрощування інтеграл зазвичай не обчислюється. Крім команди simplify для більшого спрощення доцільно задавати певні обмеження на змінну за допомогою команди assume. Щоб одночасно задати дві команди, їх вводять

одну за одною, вибираючи з символьної панелі, або комбінацією клавіш $\boxed{\text{Ctrl}}$ + $\boxed{\text{Shift}}$ + $\boxed{.}$ і вписуючи в порожні квадратики потрібні слова.

$$f1(t) := f(g(t)) \cdot \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume}, t>0} \to 2 \cdot t^2 \cdot \text{atan}(t) .$$

4. Знаходимо первісну $G(t)$ відносно нової змінної t і спрощуємо її:

$$G(t) := \int f1(t)\, dt \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume}, t>0} \to \frac{\ln(t^2+1)}{3} - \frac{t^2}{3} + \frac{2 \cdot t^3 \cdot \text{atan}(t)}{3} .$$

5. Повертаємось до попередньої змінної x і знаходимо шукану первісну $F(x)$:

$$F(x) := G(h(x))\, \text{simplify} \to \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \text{atan}(\sqrt{x})}{3} .$$

Аналогічно можна створити робочий аркуш для реалізації методу інтегрування частинами.

До XIX столітті основною формулою обчислення інтеграла була формула Ньютона – Лейбніца, тобто під інтегралом $\int_a^b f(x)\,dx$ математики по суті розуміли інтеграл Ньютона – Лейбніца. У 1823 році О. Коші виявив, що для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;b]$, інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ можна як завгодно добре наблизити інтегральними сумами вигляду $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k)$, тобто $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k)$ і останню рівність можна вважати означенням інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ для неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;b]$.

У 1853 році Б. Ріман узагальнив ідею О. Коші і запропонував означення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ як границі загальнішої інтегральної суми вигляду $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k$, де $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ і $\max\limits_{0 \le k \le n-1} \Delta x_k \to 0$. Б. Ріман та інші математики дослідили питання існування інтеграла (який на честь Б. Рімана зараз називають *інтегралом Рімана* або R-*інтегралом*) і виявилось, що умова неперервності зовсім не є обов’язковою для існування R-інтеграла. Важливо лише, щоб функція f була обмеженою на відрізку $[a;b]$, а точки розриву цієї функції можна було покрити скінченною або зчисленною кількістю інтервалів, сума довжин яких є як завгодно малою. А. Лебег довів, що ці умови є необхідними і достатніми для існування R-інтеграла.

Також виявляється, що загальна теорія R-інтеграла не є набагато складнішою за теорію інтеграла від неперервної функції. Тому курс інтегрального числення для майбутніх вчителів математики повинен бути близьким до сучасної теорії інтеграла, творцями якої були О. Коші, Б. Ріман, А. Лебег та багато інших математиків XIX-XX століття.

Поняття інтегральної суми Рімана та її границі (яку називають R-інтегралом), коли дрібність поділу прямує до нуля, зручно ілюструвати за допомогою сучасних комп'ютерних засобів математики, наприклад MathCAD.

Створимо робочий аркуш, щоб проілюструвати сутність поняття R-інтеграла і геометричний зміст інтегральних сум та R-інтеграла. Для прикладу розглянемо функцію $f(x) = x(1+\sin x)$ на відрізку $[a;b]=[0;3\pi]$. Цей відрізок поділимо на n рівних частин точками x_k, а проміжними точками c_k вважатимемо серединні точки відрізків поділу.

$$f(x) := x\cdot(1+\sin(x)) \qquad a := 0 \qquad b := 3\cdot\pi \qquad n := 6 \qquad k := 0..n$$

$$x(k) := a + k\cdot\frac{b-a}{n} \qquad c(k) := \frac{x(k)+x(k+1)}{2} \qquad \Delta x(k) := x(k+1) - x(k)$$

$$S(n) := \sum_{k=0}^{n-1}\left(f(c(k))\cdot\Delta x(k)\right) \qquad I := \int_a^b f(x)\,dx \qquad \delta := \frac{|S(n)-I|}{I}\cdot 100$$

Побудувавши інтегральну суму $S(n)$, обчислимо її значення і порівняємо з точним (у межах заданої точності) значенням інтеграла I та обчислимо відносну похибку δ (%) наближеної рівності $S(n)\approx I$.

$$S(n) = 54.882 \qquad I = 53.838 \qquad \delta = 1.938$$

Побудуємо рисунок (рис. 5), ввівши на осі ординат $f(c(k))$, $f(t)$, а на осі абсцис $c(k)$, t і задавши у чорних квадратиках межі a та b для змінної t.

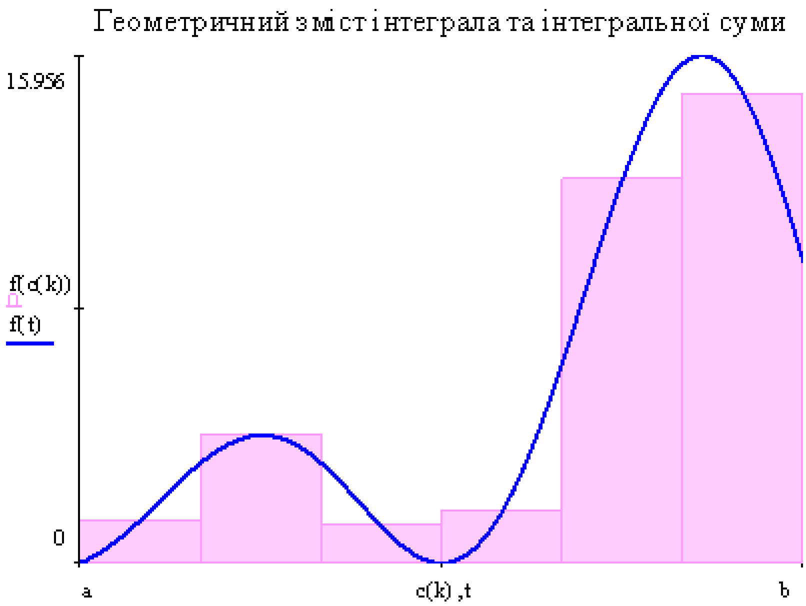


Рис. 5.

Щоб графік став таким, як на даному рисунку, потрібно: 1) увійти до його контекстного меню, 2) вибрати "Форматування...", 3) на вкладці "Осі *X*-*Y*" познімати всі галочки й вибрати стиль осей "що перетинаються", 4) на вкладці "Графіки" задати тип першої лінії "панель заповнень", а також вибрати бажані колір і товщину ліній; 5) на вкладці "Підписи" задати заголовок малюнка.

За допомогою створеного вище робочого аркуша можна проілюструвати, як зростає точність наближення $S(n)$ до I при збільшенні n. Так, поклавши $n := 25$, дістанемо (рис. 6):

$S(n) = 53.926 \qquad I = 53.838 \qquad \delta = 0.163$

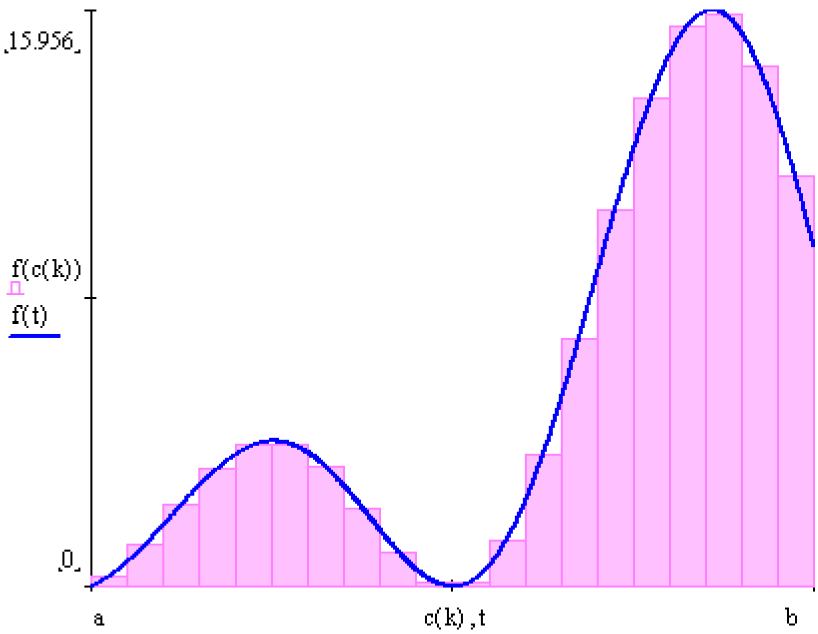


Рис. 6.

Очевидно, наскільки точнішим стало наближення при дрібнішому поділі. Так само легко можна змінити відрізок $[a;b]$ чи навіть функцію $f(x)$ і миттєво побачити результати.

Наведемо ще одну ілюстрацію, яку можна виконати в MathCAD, – це обчислення інтеграла Рімана як границі інтегральної суми та порівняння з точним значенням.

Щоб номер n можна було спрямовувати до нескінченності, треба його зробити вільною змінною. Тому внесемо потрібні зміни у попередні формули і створимо новий аркуш.

$$f(x) := x \cdot (1+\sin(x)) \qquad a := 0 \qquad b := 3 \cdot \pi$$

$$x(k,n) := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \qquad c(k,n) := \frac{x(k,n) + x(k+1,n)}{2}$$

$$\Delta x(k,n) := x(k+1,n) - x(k,n) \qquad S(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(c(k,n)) \cdot \Delta x(k,n) \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S(n) \,\text{simplify} \to \frac{3\cdot\pi\cdot(3\cdot\pi+2)}{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \to \frac{3\cdot\pi\cdot(3\cdot\pi+2)}{2}$$

Наведені ілюстрації розкривають *сутність R-інтеграла як границі інтегральної суми:* R-інтеграл – це число I, для якого правильна наближена рівність $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta x_k \approx I$, причому абсолютну похибку наближення можна зробити як завгодно малою, якщо дрібність поділу T (якою є число $\lambda(T) = \max_{0\le k\le n-1} \Delta x_k$)

вибрати досить малою. При цьому вибір проміжних точок $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ не повинен впливати на точність наближення. Підкреслимо, що у математиці насамперед слід звертати увагу на сутність математичних понять, і лише після того, як вона стає зрозумілою, можна опановувати формальні означення і пов'язані з ним твердження.

Так, наприклад, виходячи із сутності поняття R-інтеграла, можна легко довести, що необмежена функція не може бути R-інтегровною, а також критерії R-інтегровності.

Дійсно, якщо функція f необмежена на відрізку $[a; b]$, то для будь-якого поділу (T) цього відрізка точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ модуль інтегральної суми $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta x_k$ можна зробити як завгодно великим за рахунок спеціального вибору однієї проміжної точки $x_{k_0}^* \in [x_{k_0}; x_{k_0+1}]$: цю точку вибирають так, щоб $\left| f(x_{k_0})\Delta x_{k_0} \right|$ був більшим за модуль всіх інших доданків на величину $1/\lambda(T) \to +\infty$, коли $\lambda(T) \to 0$. Тому інтегральні суми $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta x_k$ не можуть бути як завгодно добрими наближеннями будь-якого числа I, тобто функція f не є R-інтегровною.

Аналогічно, сутність кожного критерія R-інтегровності полягає у тому, що усі інтегральні суми даної обмеженості функції, а тому й "найменша" та "найбільша" інтегральні суми повинні як завгодно мало відрізнятися від певного числа, а тому й одна від одної, коли дрібність поділу T досить мала. Роль "найменшої" і "найбільшої" інтегральних сум відіграють суми Дарбу: нижня – $S_*(T)$ та верхня – $S^*(T)$. Отже, умова $S^*(T) - S_*(T) \to 0$ є необхідною й достатньою для R-інтегровності обмеженої функції.

Серед критеріїв R-інтегровності особливе місце посідають ті, які пов'язані з фіксованою послідовністю поділів відрізка $[a;b]$, для якої $\lambda(T_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Нагадаємо, що О. Коші розглядав лише поділ (T_n) відрізка $[a;b]$ на n рівних відрізків точками $x_k = a + \frac{b-a}{n} \cdot k$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Згадані критерії стверджують, що коли для однієї послідовності (T_n), для якої $\lambda(T_n)\to 0$, $(n\to\infty)$, інтегральні суми $S(T_n)$ прямують до числа I, коли $n\to 0$, то інтегральні суми $S(T_n^*)$ прямують до цього самого числа I для будь-якої іншої послідовності (T_n^*) поділів відрізка $[a;b]$, аби тільки $\lambda(T_n^*)\to 0$, $n\to\infty$.

Цей факт має велике практичне значення, оскільки дозволяє на практиці вибирати таку послідовність поділів, яка є зручною для обчислення інтегральних сум і знаходження границі інтегральних сум. Наприклад, можна ділити відрізок $[a;b]$ на n рівних відрізків, як це робив свого часу О. Коші.

Отже фіксувати спосіб поділу (T_n), можна навіть тоді, коли невідомо, R-інтегровна функція f, чи ні. На відміну від цього фіксувати спосіб вибору проміжних точок можна лише тоді, коли відомо, що функція f є R-інтегровною на відрізку $[a;b]$. Тому важливими для практики є достатні умови R-інтегровності обмеженої функції, серед яких виділимо умову, за якою *множина точок розриву є не більш ніж зчисленною*, яку задовольняють і неперервні функції, і монотонні, і переважна більшість інших функцій, що зустрічаються на практиці.

Досить часто властивості R-інтеграла формулюють і доводять лише для неперервних функцій, коли відповідні твердження майже очевидні, а їх доведення майже тривіальні. Випадок неперервних функцій доцільно використовувати для “відкриття” відповідної властивості, використовуючи геометричний та інші змісти R-інтеграла. А доведення “відкритих” властивостей бажано проводити для довільних R-інтегровних функцій. Ці доведення нетривіальні, проте цілком доступні майбутнім учителям і разом з тим суттєво сприяють формуванню їхньої математичної культури.

Усі властивості R-інтеграла можна поділити на три групи:

- найпростіші, які випливають безпосередньо з означення R-інтеграла. Це властивості про R-інтеграл від сталої функції, про лінійність R-інтеграла, про монотонність R-інтеграла і наслідки з них – теореми про середнє;

- властивості, що випливають з критеріїв R-інтегровності. Це властивість про R-інтегровність модуля і добутку функцій та нерівність Коші – Буняковського, про адитивність R-інтеграла і властивість про почленне R-інтегрування функціонального ряду, яка є суттєвим узагальненням властивості лінійності R-інтеграла;
- властивості інтеграла з верхньою змінною межею інтегрування і наслідки з них – узагальнена формула Ньютона–Лейбніца і формули заміни змінної та інтегрування частинами.

Усі властивості R-інтеграла зручно ілюструвати за допомогою сучасних комп'ютерних засобів математики, звертаючи особливу увагу на те, що формальне використання навіть найдосконалішого комп'ютерного засобу математики може призвести до грубих помилок. Тому лише знання теоретичного матеріалу і вміння використовувати ці знання можуть гарантувати знаходження шуканого розв'язку задачі за допомогою комп'ютерних засобів математики чи без цієї допомоги.

Наведемо деякі приклади застосувань комп'ютерних засобів математики при вивченні властивостей R-інтеграла.

Програму Gran1 можна використати для ілюстрування основних властивостей інтеграла Рімана. Так, лінійну властивість можна ілюструвати при розв'язуванні наступної задачі.

Задача. *Дано фігури* $\Phi_1 = \{(x, y) : x \in [-1;2], 0 \le y \le 2^{-|x|}\}$ *і* $\Phi_2 = \{(x, y) : x \in [-1;2], 0 \le y \le 3 \cdot 2^{-|x|}\}$. *Потрібно зобразити ці фігури на одному рисунку, знайти площі* S_1 *та* S_2 *цих фігур і відношення* $S_2 : S_1$.

Спочатку задаємо функції та будуємо їхні графіки. Далі у вікні "Список об'єктів" ставимо мітки проти першої, а потім проти другої функції та обчислюємо відповідні інтеграли із занесенням до відповідей (рис. 7). При цьому буде заштриховано фігури Φ_1 і Φ_2 та обчислено їх площі (рис. 8):

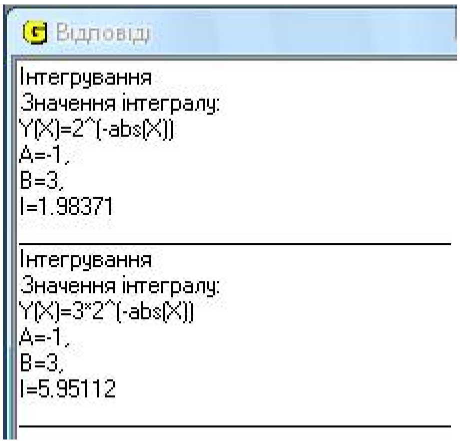


Рис. 7

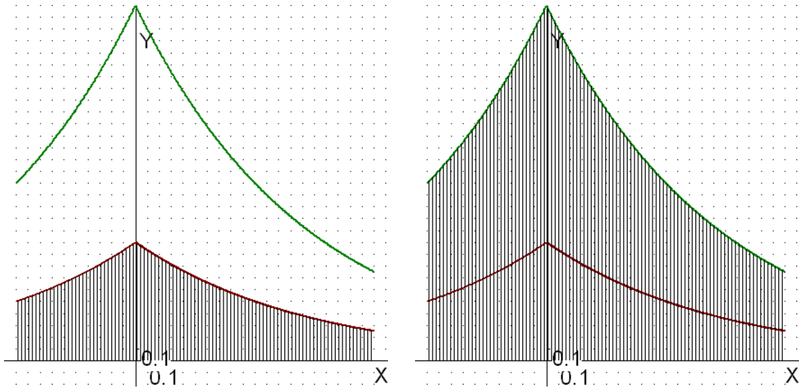


Рис. 8.

Після цього за допомогою калькулятора ділимо другий інтеграл на перший і знаходимо відношення площ $S_2 : S_1 = 5.95112 : 1.98373 = \; = 2.99999$. Робимо висновок, що при розтягненні фігури у 3 рази її площа теж збільшується утричі. Похибка в 10^{-6} пов'язана з тим, що при обчисленні за допомогою комп'ютера використовуються не точні дійсними числа, а їх десяткові наближення.

Потужнішу програму Maxima можна застосовувати для ілюстрування всіх властивостей R-інтеграла, зокрема для виконання заміни змінної у R-інтегралі.

З одного боку, у Maxima є команда changevar, за допомогою якої можна робити заміну змінної як у невизначеному інтегралі, так і в R-інтегралі. Наприклад,

(%i1) 'integrate(sqrt(%e^x-1),x,0,log(2));

(%o1) $\int_0^{\log(2)} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

(%i2) changevar(%,%e^x-1=t^2,t,x);

(%o2) $-2 \int_{-1}^{0} \frac{t\,|t|}{t^2+1}\, dt$

(%i3) assume(t<0)$

(%i4) %o2,simp;

(%o4) $-2 \int_{-1}^{0} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$

(%i5) %,nouns;

(%o5) $-\frac{\pi - 4}{2}$

Зауважимо, що така сама відповідь отримується і при безпосередньому обчисленні даного інтеграла за командою integrate.

Проте часто при застосуванні команди changevar виникають помилки, як у наступному прикладі:

(%i1) ’integrate(x^2,x,1,2)$

(%o1) $\int_1^2 x^2\,dx$

(%i2) changevar(%,x^2=t,t,x);

(%o2) $-\frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt$

Очевидно, ця відповідь неправильна, оскільки початковий інтеграл був невід’ємним, а отриманий інтеграл від’ємний. Такі помилки змушують проявляти обережність при застосуванні команди changevar.

Якщо робити заміну змінної в R-інтегралі за допомогою програми MathCAD, то доведеться виконати кілька кроків, але завдяки цьому з’являється і можливість краще розуміти хід розв’язування та контролювати його.

Для прикладу, обчислимо інтеграл $\int_1^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$ за допомогою тригонометричної підстановки. Створимо такий робочий аркуш.

$f(x) := \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}$ $\quad a := 1 \quad b := 3$

$g(t) := 3\cdot\sin(t)$

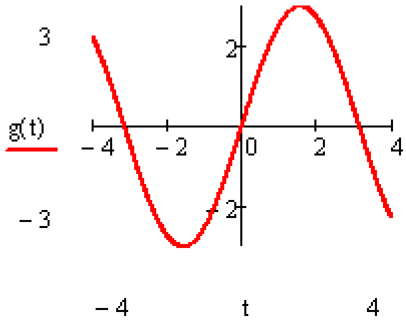


Рис. 9.

Знаходимо нові межі інтегрування $a1$ та $b1$, враховуючи графік функції $g(t)$ (рис. 9):

$g(t) = a \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix}$ $\qquad g(t) = b \text{ solve} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$a1 := \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \qquad b1 := \frac{\pi}{2}$

Утворюємо нову підінтегральну функцію $f2(t)$ у вигляді добутку $f1(t)\cdot dg(t)$, де

$dg(t) := \frac{d}{dt}g(t) \rightarrow 3\cdot\cos(t) \qquad f1(t) := f(g(t)) \rightarrow \frac{\sqrt{1-\sin(t)^2}}{27\cdot\sin(t)^4}$

Оскільки функцію $f1(t)$ можна спростити, але за командами MathCAD це зробити не вдається, то перевизначимо її вручну:

$$f1(t) := \frac{\cos(t)}{27 \cdot \sin(t)^4}$$

$$f2(t) := f1(t) \cdot dg(t) \to \frac{\cos(t)^2}{9 \cdot \sin(t)^4}$$

Нарешті, обчислюємо інтеграл за новою змінною:

$$I := \int_{a1}^{b1} f2(t)\,dt \qquad I \to -\frac{16 \cdot \sqrt{2}}{27}$$

Але отриманий за допомогою програми MathCAD містить помилку в знаці! Для з'ясування причини цієї помилки спробуємо знайти за допомогою MathCAD відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)^4}\,dt \to \frac{\cos(t)^3}{3 \cdot \sin(t)^3}$$

Неважко переконатися, що тут втрачено знак “мінус”.

Таким чином, за допомогою програми MathCAD можна обчислювати R-інтеграли за методом заміни змінної, але при цьому слід пам'ятати, що отримані за допомогою комп'ютера результати не завжди правильні і потребують додаткової перевірки.

У 1894 році Т. Стілтьєс запропонував новий підхід до введення поняття інтеграла, сутність якого полягає в узагальненні поняття довжини (міри) проміжка $[a;b)$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Звичайна міра (довжина) проміжка $[a;b)$ – це $b-a$, її називають *мірою Лебега*, який поширив поняття довжини проміжка на множини надзвичайно складної природи. Т. Стілтьєс по суті запропонував вважати довжиною (*мірою Стілтьєса*) проміжка $[a;b)$ різницю $g(b)-g(a)$, де $g(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, – задана неспадна функція. Зокрема, якщо $g(x) = x$, то $g(b)-g(a) = b-a$ – звичайна довжина проміжка $[a;b)$ – міра Лебега цього проміжка. Отже, Т. Стілтьєс запропонував лише загальніше тлумачення поняття довжини проміжка. В усьому іншому його підхід до введення поняття інтеграла (який називають інтегралом Стілтьєса) і дослідження властивостей цього інтеграла співпадає з відповідним підходом до введення інтеграла Рімана і дослідження його властивостей:

- *інтегральна сума Стілтьєса* має вигляд $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)\Delta g(x_k)$, де $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – (T)-поділ відрізка $[a;b]$, $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ – проміжні точки, а $\Delta g(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k)$ – узагальнена довжина проміжка $[x_k, x_{k+1}]$;
- *границя інтегральної суми Стілтьєса*, коли дрібність $\lambda(T)$ прямує до нуля, вводиться так саме як і для інтегральної суми Рімана; ця границя називається *інтегралом Стілтьєса* функції f за мірою g і позначається $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$, причому функція f називається S_g*-інтегровною* на відрізку $[a;b)$;
- критерії S_g-інтегровності аналогічні критеріям R-інтегровності;
- властивості інтеграла Стілтьєса аналогічні властивостям інтеграла Рімана;
- обчислення інтеграла Стілтьєса зводиться до обчислення R-інтеграла, коли функція f є R-інтегровною на $[a;b)$, а $g(x) = g(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt,\ x \in [a;b]$: $(S)\int_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx$.

Об’єднання ідей А. Лебега і Т. Стілтьєса дало можливість побудувати надзвичайно змістовну *теорію міри та інтеграла Лебега – Стілтьєса*, яка відіграє важливу роль у сучасній математиці та її застосуваннях. Тому, враховуючи природність і прозорість узагальнення, запропоноване Т. Стілтьєсом, доцільно ознайомити майбутніх учителів математики з цим узагальненням, як з прикладом важливості аналогій у математиці і водночас необхідності акуратно користуватися аналогіями.

Іншим напрямком узагальнення поняття визначеного інтеграла є поширення цього поняття на функції, що визначені на необмеженому проміжку або є необмеженими в околах окремих точок проміжка $\langle a;b\rangle$, що є або не є відрізком. Ідея такого узагальнення запропонована і в основному реалізована у 1823 році О.Коші. Сутність ідеї О.Коші наступна.

Спочатку вводиться поняття невласного інтеграла функції f: 1) на проміжку $[a;b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$; 2) на проміжку $(a;b]$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Так називають формальний вираз $\int_a^b f(x)\,dx$ за умови інтегровності функції f відповідно: 1) на кожному відрізку $[a;c]$, де $a<c<b$; 2) на кожному відрізку $[c;b]$, де $a<c<b$.

Наприклад, невласними R-інтегралами, є вирази $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$, $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ і $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x}$, а вираз $\int_0^1 \frac{dx}{\sin\frac{1}{x}}$ не є невласним інтегралом, оскільки функція $\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ не є інтегровною на кожному відрізку $[c;1]$, $0<c<\frac{1}{\pi}$.

Невласний інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ на проміжку $[a;b)$ (на проміжку $(a;b]$) називають *збіжним* до числа I, яке називають *значенням* цього *невласного* інтеграла, якщо $I=\lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)\,dx$ ($I=\lim_{c\to a+0}\int_c^b f(x)\,dx$). При цьому позначають $\int_a^b f(x)\,dx = I$. У випадку, коли вказана границя нескінченна або взагалі не існує, невласний інтеграл називають розбіжним і він відповідно має нескінченне значення (що позначають $\int_a^b f(x)\,dx=\infty$) або взагалі не має значення.

Умови збіжності невласних інтегралів співпадають з відповідними умовами існування границі функції у точці (скінченній чи нескінченно віддаленій). Цей факт доцільно використовувати, коли поняття невласного інтеграла та його значення ілюструється за допомогою комп’ютерних засобів математики.

Так, за допомогою СКМ Maxima можна обчислювати невласні інтеграли з нескінченними межами та невласні інтеграли від необмежених функцій. Наприклад:

(%i1) 'integrate(1/(x^3+1),x,0,inf)=integrate(1/(x^3+1),x,0,inf);

(%o1) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}dx=\frac{2\pi}{3^{3/2}}$

(%i2) 'integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,minf,inf)=integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,minf,inf);

(%o2) $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x-1}{x^4+1}dx=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(%i3) 'integrate(1/x^(1/3),x,-1,8)=integrate(1/x^(1/3),x,-1,8);

(%o3) $\int_{-1}^{8} \frac{1}{x^{1/3}}\, dx = \frac{9}{2}$

(%i4) 'integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,-3,3)=integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,-3,3);

(%o4) $\int_{-3}^{3} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \frac{9\pi}{2}$

Проте, крім готової відповіді, за допомогою Maxima можна обчислювати невласні інтеграли за означенням, тобто спочатку знаходити відповідні визначені інтеграли, а потім переходити до границі. Обчислимо цим способом інтеграли (%o1) – (%o4), подані вище:

(%i1) ’limit(integrate(1/(x^3+1),x,0,b),b,inf);

Is b positive, negative, or zero? p;

(%o1) $\lim_{b\to\infty} -\frac{\log\left(\left|b^2-b+1\right|\right)}{6} + \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2\sqrt{3}b-\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(b+1)}{3} + \frac{\pi}{2\, 3^{3/2}}$

(%i2) 'integrate(1/(x^3+1),x,0,inf)=ev(%o1,nouns,ratsimp);

(%o2) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx = \frac{2\pi}{3^{3/2}}$

(%i3) ’limit(integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,a,0),a,minf)+

’limit(integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,0,b),b,inf),logcontract;

Is a positive, negative, or zero? n;

Is b positive, negative, or zero? p;

(%o3)

$$\frac{\lim\limits_{a\to-\infty} \log\left(\frac{a^4+2^{3/2}a^3+4a^2+2^{3/2}a+1}{a^4-2^{3/2}a^3+4a^2-2^{3/2}a+1}\right)+(2^{7/2}+4)\operatorname{atan}(\sqrt{2}a+1)+(4-2^{7/2})\operatorname{atan}(\sqrt{2}a-1)-2^{5/2}\pi}{2^{7/2}} -$$

$$-\frac{\lim\limits_{b\to\infty} \log\left(\frac{b^4+2^{3/2}b^3+4b^2+2^{3/2}b+1}{b^4-2^{3/2}b^3+4b^2-2^{3/2}b+1}\right)+(2^{7/2}+4)\operatorname{atan}(\sqrt{2}b+1)+(4-2^{7/2})\operatorname{atan}(\sqrt{2}b-1)-2^{5/2}\pi}{2^{7/2}}$$

(%i4) 'integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,minf,inf)=ev(%o3,nouns,ratsimp);

(%o4) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3+1}\, dx = \frac{2\pi}{3^{3/2}}$

(%i5) ’limit(integrate(1/x^(1/3),x,-1,a),a,0,minus)+

’limit(integrate(1/x^(1/3),x,c,8),c,0,plus);

Is a+1 positive, negative, or zero? n;

Is c-8 positive, negative, or zero? n;

Is c positive, negative, or zero? p;

(%o5) $\lim\limits_{c\to 0+} 6-\frac{3c^{2/3}}{2}+\lim\limits_{a\to 0-}\frac{3a^{2/3}}{2}-\frac{3}{2}$

(%i6) 'integrate(1/x^(1/3),x,-1,8)=ev(%o5,nouns,ratsimp);

(%o6) $\int\limits_{-1}^{8}\frac{1}{x^{1/3}}dx=\frac{9}{2}$

(%i7) ’limit(integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,a,0),a,-3,plus)+

’limit(integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,0,c),c,3,minus);

Is a positive, negative, or zero? n;

Is a+3 positive, negative, or zero? p;

Is c positive, negative, or zero? p;

Is c-3 positive, negative, or zero? n;

(%o7) $\frac{\lim\limits_{a\to -3+} a\sqrt{9-a^2}-9\,\mathrm{asin}\left(\frac{a}{3}\right)}{2}-\frac{\lim\limits_{c\to 3-} c\sqrt{9-c^2}-9\,\mathrm{asin}\left(\frac{c}{3}\right)}{2}$

(%i8) 'integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,-3,3)=ev(%o7,nouns,ratsimp);

(%o8) $\int\limits_{-3}^{3}\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx=\frac{9\pi}{2}$

Подальше узагальнення поняття невласного інтеграла та його значення може бути таким.

Невласним інтегралом функції f на довільному проміжку $\langle a;b\rangle$ називають вираз $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ за умови існування скінченної кількості точок x_k, $k\in\overline{0,n}$, таких що $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, причому кожен вираз $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ є невласним інтегралом функції f на проміжку $[x_k;x_{k+1})$ або на проміжку $(x_k;x_{k+1}]$. Цей невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називають збіжним, коли збіжним є кожен невласний інтеграл $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$, $k\in\overline{0,n-1}$.

При цьому позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$, тобто значення невласного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ дорівнює за означенням сумі значень невласних інтегралів $\int\limits_{x_n}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$.

У випадку, коли принаймні один з невласних інтегралів $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx$ розбіжний, розбіжним вважають і невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ і для такого невласного інтеграла скінченного значення не існує.

Деякі розбіжні невласні інтеграли можуть мати так звані *головні значення* і вважатися збіжними у розумінні головних значень.

Так, головним значенням розбіжного невласного інтеграла $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ є число

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} (\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0 .$$

За допомогою деяких сучасних комп'ютерних засобів математики (зокрема, Maxima) можна обчислювати головні значення невласних інтегралів, проте формальне використання цих засобів може призвести до грубих помилок.

Обчислимо, наприклад, за допомогою Maxima кілька невласних інтегралів у сенсі головного значення безпосередньо за командою integrate, а також шляхом граничного переходу.

Почнемо з інтеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, $a < 0$, $b > 0$. Спочатку обчислимо його безпосередньо:

```
(%i1) [assume(a<0),assume(b>0)]$
(%i2) integrate(1/x,x,a,b);
Principal Value
```

(%o2) $\log(b) - \log(a) + i\pi$

```
(%i3) rectform(%);
```

(%o3) $\log(b) - \log(-a)$

Отже, за допомогою системи Maxima отримано готовий результат з попередженням про те, що це головне значення невласного інтеграла. Обчислимо тепер цей результат, спираючись на означення головного значення:

(%i4) 'integrate(1/x,x,a,-r)+'integrate(1/x,x,r,b)=

integrate(1/x,x,a,-r)+integrate(1/x,x,r,b);

Is r + a positive, negative, or zero? n;

Is r positive, negative, or zero? p;

Is a positive, negative, or zero? n;

Is r - b positive, negative, or zero? n;

(%o4) $\int_{r}^{b}\frac{1}{x}dx+\int_{a}^{-r}\frac{1}{x}dx=\log(b)-\log(-a)$

Спробуємо обчислити ще один інтеграл безпосередньо:

(%i5) 'integrate(tan(x),x,-%pi/2,%pi/2)=integrate(tan(x),x,-%pi/2,%pi/2);

(%o5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan(x)\,dx=0$

Цього разу не вказано, що це головне значення невласного інтеграла. Тому можна подумати, що обчислений інтеграл був збіжним невласним або звичайним рімановим. Спробуємо переобчислити заданий інтеграл ще раз, інакше записавши підінтегральну функцію:

(%i6) 'integrate(sin(x)/cos(x),x,-%pi/2,%pi/2)=

integrate(sin(x)/cos(x),x,-%pi/2,%pi/2);

Principal Value

(%o6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=\log(-1)$

Ця відповідь теж неправильна, хоча принаймні вказано, що мова йде про головне значення. Правильну відповідь можна дістати так:

(%i7) 'integrate(tan(x),x,-r,r)=integrate(tan(x),x,-r,r);

(%o7) $\int_{-r}^{r}\tan(x)\,dx=0$

Після цього на основі теорії можна зробити відповідний висновок.

До речі, аналогічний інтеграл, тільки з котангенсом, при зверненні до системи обчислюється правильно:

(%i8) 'integrate(cot(x),x,0,%pi)=integrate(cot(x),x,0,%pi);

Principal Value

(%o8) $\int_0^{\pi} \cot(x)\,dx = 0$

Традиційно застосування інтегрального числення включають матеріал, пов'язаний з обчисленням довжин кривих, площ плоских фігур, об'ємів тіл обертання, площ поверхонь обертання, маси і центра маси, розподіленої вздовж матеріальної дуги кривої чи на матеріальній пластині. При цьому досить часто роблять це так, як і три століття тому: на інтуїтивному рівні, не надаючи чітких означень відповідних математичних понять, що є математичними моделями певних реальних об'єктів, а тому не використовуючи сучасного рівня розвитку математики, який дозволяє зробити це чітко, зрозуміло і красиво.

Інтуїтивне уявлення про криву пов'язане із слідом, який залишає матеріальна точка (кінчик загостреного олівця), коли вона рухається на площині XOY (на комплексній площині $\mathbf{C}$). При цьому певному моменту часу t (параметру t) відповідає на кривій певна точка M_t з дійсними координатами $x(t),\ y(t)$ (або з комплексного координатного $z(t) = x(t) + i\,y(t)$. В фізичному тлумаченні точки на кривій треба розрізняти не тільки за їх координатами, а й за моментом часу (параметром) t, в який матеріальна точка займає це положення.

У зв'язку з такими уявленнями про криву вводять чітке означення кривої або параметричної кривої, її сліду на площині, рівняння кривої (параметричного, явного, в полярних координатах), простої кривої або кривої Жордана, дуги кривої, спрямлюваної дуги та її довжини тощо. При цьому виявляється, що усі ці поняття природно узагальнюються [3, с. 266] на випадок довільних, так званих, нормованих просторів, частинними випадками яких є координатна пряма OX, площина XOY, тривимірний простір $OXYZ$, комплексна площина $\mathbf{C}$ та багато інших просторів, що відіграють у сучасній математиці та її застосуваннях важливу роль.

Коректне і водночас доступне означення довжини дуги кривої можна навести лише для неперервної кривої, заданої параметрично рівнянням $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, де функція $z(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$ і набуває значень з певного нормованого простору. У випадку, коли цей простір:

- декартова площина XOY, $z(t) = (x(t),\ y(t))$, тоді параметричне рівняння дуги набуває вигляду $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta],$ який у випадку $x = t$ перетворюється на явне рівняння дуги: $y = y(x)$, $x \in [\alpha;\beta]$, а у випадку $y = t$ – на явне рівняння дуги $x = x(y)$, $y \in [\alpha;\beta]$;
- комплексна площина C, тоді параметричне рівняння дуги у комплексній формі має вигляд $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, де $z(t) = x(t) + i\,y(t)$.
- полярна площина, $z(t) = (t, \rho(t))$, тоді параметричне рівняння кривої у полярних координатах набуває вигляду $\rho = \rho(t)$, де $\rho(t)$ – відстань точки $z(t)$ від полярного центра, а t – кут, на який треба повернути полярний промінь, щоб він співпав з радіус-вектором точки $z(t)$.

До комплексної форми зводиться будь-яка інша форма параметричного рівняння дуги кривої. Тому усі міркування можна проводити для неперервної кривої (точніше дуги), параметричне рівняння якої має вигляд

$$z = z(t),\ t \in [\alpha;\ \beta]. \tag{1}$$

У випадку, коли ця дуга Γ є відрізком, що сполучає точки $z_1 = z(\alpha)$ і $z_2 = z(\beta)$, її довжиною є довжина напрямленого відрізка $[z_1; z_2]$, тобто число $L(\Gamma) = L([z_1; z_2]) = |z_2 - z_1|$.

Якщо дуга Γ є ламаною з вершинами у точках $z_k = z(t_k)$, $k = 0,1,...,n$, де $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$, то її довжиною за означенням є число, що дорівнює сумі довжин ланок цієї ламаної, тобто $L(\Gamma) = L\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}([z_k; z_{k+1}]) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}|z_{k+1} - z_k|$.

Завершальний крок введення поняття довжини довільної неперервної дуги пов’язаний з тим, що візуально неперервна дуга майже не відрізняється від ламаної, вписаної у цю дугу, коли ланки ламаної досить дрібні, тобто мають досить малу довжину. Останній факт зручно ілюструвати за допомогою сучасних комп’ютерних засобів математики.

Наведемо робочий аркуш СКМ MathCAD, на якому зображається крива, вписана в неї ламана і обчислюються їх довжини при заданій кількості ланок.

$$f(x) := x^2 \qquad a := -1 \qquad b := 2 \qquad L := \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx$$

$$x(n,k) := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \qquad p(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\left(x(n,k+1) - x(n,k)\right)^2 + \left(f(x(n,k+1)) - f(x(n,k))\right)^2}$$

$$N := 5 \qquad k := 0..N$$

Будуємо задану криву та вписану в неї ламану (рис. 10):

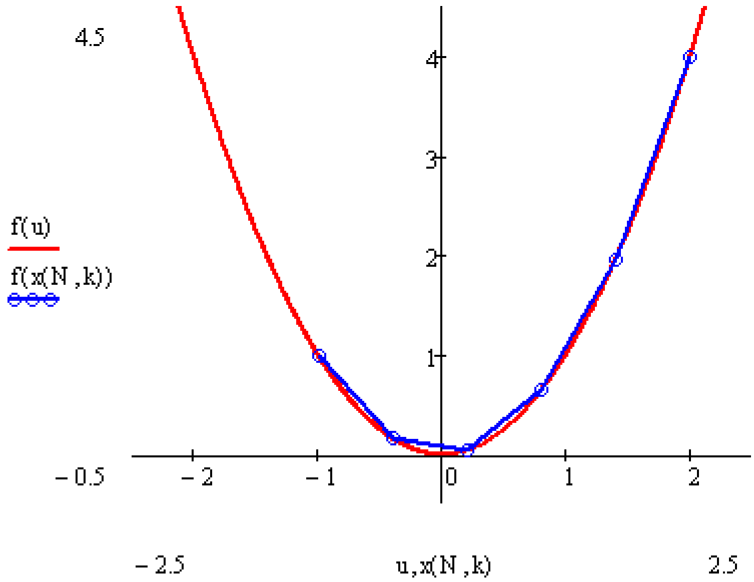


Рис. 10.

$$L \to \frac{\ln(\sqrt{17}+4)}{4} - \frac{\ln(\sqrt{5}-2)}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{17}} \qquad L = 6.126 \qquad p(N) = 6.069$$

Якщо задати кількість ланок $N := 10$, то довжина ламаної автоматично переобчислиться: $p(N) = 6.112$, а рисунок стане таким (рис. 11):

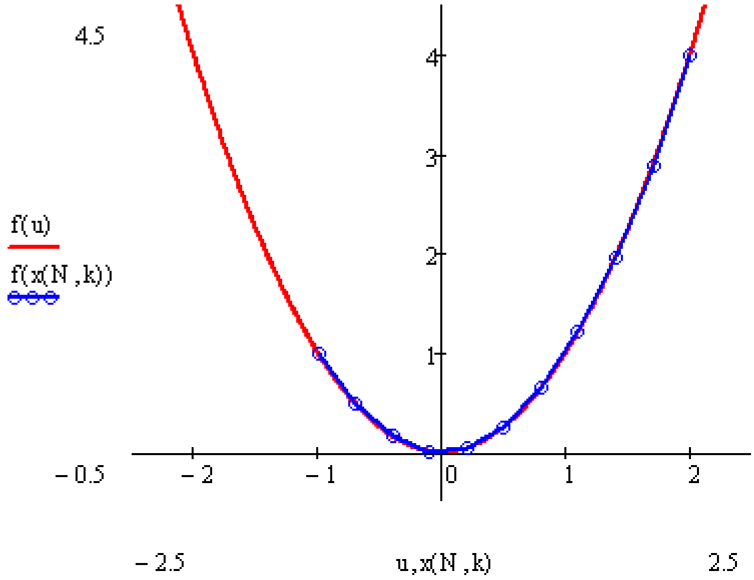


Рис. 11.

Таким чином, природно означити *довжину* $L(\Gamma)$ *дуги* Γ з рівнянням (1) за допомогою рівностей $L(\Gamma)=\sup\limits_{(T)} L(T)$ або $L(\Gamma)=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} L(T)$, де T – поділ відрізка $[\alpha;\beta]$ точками $\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta$, $\lambda(T)$ – дрібність цього поділу, а $L(T)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|z(t_{k+1})-z(t_k)|$ – довжина ламаної з вершинами у точках $z(t_n)$, $k=0,1,\ldots,n$, вписаної в дугу Γ. Ця довжина $L(\Gamma)$ завжди існує, причому завжди $0\le L(\Gamma)\le+\infty$. У випадку $L(\Gamma)<+\infty$ *дуга* (1) називається *спрямлюваною*, а коли $L(\Gamma)=+\infty$ (і таких випадків безліч) – *дуга* (1) називається *неспрямлюваною*.

Наведене означення коректне як для незамкнених дуг, так і для замкнених, як до простих дуг, так і до дуг з точками самоперетину.

Після введення понять спрямлюваної дуги та її довжини доцільно розглянути основні властивості спрямлюваних дуг та їх довжин, які тісно пов'язані з основними (характеристичними) властивостями одного з найважливіших математичних понять – міри множини.

Після цього можна довести формулу для обчислення довжини дуги (1), для якої похідна $z'(t)$ є R-інтегровною функцією на відрізку $[\alpha;\beta]$:

$$L(\Gamma)=\int_{\alpha}^{\beta}|z'(t)|\,dt \tag{2}$$

та розглянути частинні випадки цієї формули.

Обчислення довжин дуг за допомогою сучасних комп'ютерних засобів математики зводиться:

- до обчислення довжини ламаних (програма Gran1), і тоді питання щодо спрямлюваності дуг може лишитися відкритим , а довіра до обчисленого результату може бути не дуже високою;
- до обчислення інтегралів (2), і тоді може бути вирішене питання щодо спрямлюваності і підвищена довіра до обчисленого результату за умови, що користувач відповідного програмного засобу не тільки може його застосувати, а й мати глибокі теоретичні знання для аналізу одержаних результатів.

Наприклад, обчислимо за допомогою програми Gran1 (у якій є вбудована функція обчислення довжин дуг) довжину *ланцюгової лінії* $y = 2(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}})$ від точки $x = 0$ до точки $x = 4$.

Для того щоб краще уявити форму ланцюгової лінії, зобразимо спочатку її дугу, яка відповідає відрізку $[-5;5]$ (тоншою лінією), а потім задану дугу, яка відповідає відрізку $[0;4]$ (товщою лінією) (рис. 12).

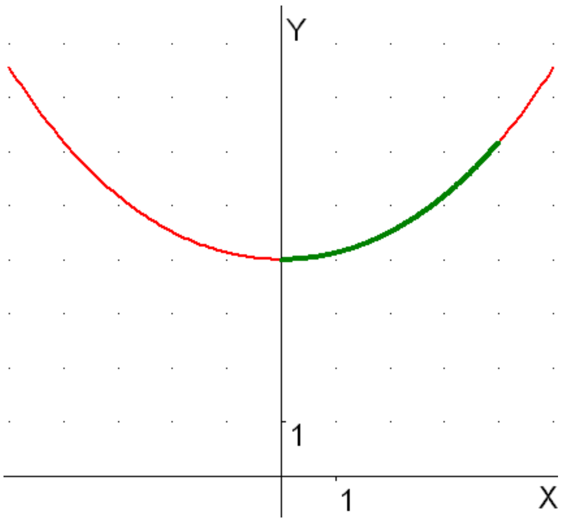
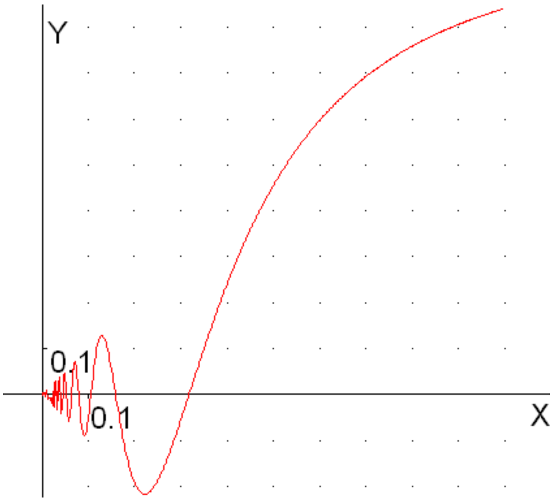


Рис. 12.

Після цього знайдемо шукану довжину дуги: $L = 4.701$.

Перевіримо цей результат за допомогою MathCAD, використовуючи створений вище робочий аркуш для обчислення довжин дуг і вписаних ламаних. Змінимо у ньому тільки функцію: $f(x) := 2(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}})$ і відрізок $[a;b]$: $a := 0$, $b := 4$. Дістанемо: $L = 4.701$.

Тепер спробуємо обчислити за допомогою програми Gran1 довжину неспрямлюваної неперервної кривої $y = x\sin\frac{1}{x}$, $x \in (0;1]$, $f(0) = 0$ (рис. 13).



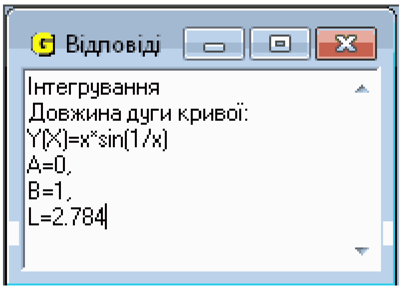


Рис. 13.

Як бачимо, результат, одержаний за допомогою програми Gran1, помилковий, оскільки правильна відповідь $L = +\infty$. Отже, при застосуванні програми Gran1 до обчислення довжини кривої користувач повинен самостійно вирішувати питання, чи є задана крива спрямлюваною.

До речі, при зверненні до програми MathCAD у даному випадку отримується повідомлення, що інтеграл неможливо обчислити.

Для майбутнього вчителя математики важливим є не тільки і навіть не стільки те, як можна обчислити значення тієї чи іншої геометричної або фізичної величини, скільки те, що розуміти під цією величиною та які її основні (характеристичні) властивості. Це стосується і площі плоскої фігури, вивченню якої у шкільному курсі математики приділено значну увагу, проте акцент при цьому робиться на обчисленні, а не на сутності поняття площі фігури. В результаті часто обчислюють щось, не знаючи, що саме обчислюють, доводять теорему про площу якоїсь фігури (наприклад, прямокутника), не знаючи, що таке площа цієї фігури. Це обумовлено тим, що часто у процесі навчання ніяк не враховують рівня розвитку сучасної математики, помилково вважаючи, що цей рівень не такий доступний учням, як рівень математичної науки кількасотлітньої давнини. Насправді все навпаки: розвиток математики (як і будь-якої іншої науки) супроводжується не тільки узагальненням математичних фактів (отже, і розширенням їх застосувань), а й тим, що ці факти позбуваються суб'єктивності, стають прозорішими, зрозумілішими, а отже й доступнішими ширшому колу людей, включаючи і учнів загальноосвітніх шкіл.

Так, сучасне *означення площі плоскої фігури* цілком природне і конструктивне:

- спочатку виділяють, так звані, прості фігури; такими вважають прямокутники або трикутники; площею прямокутника (коли він є простою фігурою) за означенням називають добуток його вимірів; площею трикутника (коли він є простою фігурою) за означенням вважають півдобуток основи на висоту;
- об'єднання скінченної кількості простих фігур без спільних внутрішніх точок називають простою фігурою; її площею за означенням вважають суму площ простих фігур, що утворюють цю просту фігуру;
- для довільної плоскої фігури Φ намагаються «немовби виміряти її площу з недостачею та з надлишком»; для чого знаходять прості фігури Φ_n і $\Phi^{(n)}$, для яких $\Phi_n \subset \Phi \subset \Phi^{(n)}$. Якщо числа $S(\Phi_n)$ і $S(\Phi^{(n)})$ можна зробити як завгодно близькими між собою, а отже, і до деякого числа $S(\Phi)$, то *фігуру* Φ називають *квадровною,* а число $S(\Phi)$ називають *площею фігури* Φ.

Після введення цього означення доцільно розглянути основні властивості квадровних фігур та їх площ, які тісно пов'язані з основними (характеристичними) властивостями загального поняття міри множини, і лише після цього доводити формули для обчислення площ криволінійної трапеції, криволінійного сектора та деяких інших плоских фігур. Усі ці обчислення можна проводити з використанням сучасних комп'ютерних засобів математики.

Нижче наведено робочий аркуш програми MathCAD, на якому обчислюється площа половини однієї з пелюсток двопелюсткової троянди (рис. 14).

$r(t) := \cos(2t) \qquad a := 0 \qquad b := \frac{\pi}{4} \qquad t := a, a + 0.0001..b \qquad u := a, a + 0.0001..2 \cdot \pi$

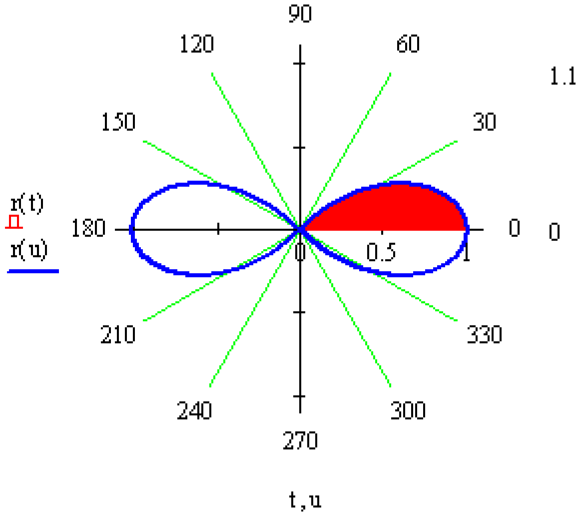


Рис. 14.

$$S := \frac{1}{2}\int_a^b r(t)^2\,dt \qquad S \to \frac{\pi}{16}$$

Основні твердження, пов'язані з поняттям кубовної фігури та її об'єму, цілком аналогічні до відповідних тверджень, пов'язаних з поняттям квадровних фігур та їх площ. Цю аналогію доцільно використати для залучення майбутніх вчителів математики до самостійного відкриття нових для них математичних фактів. Серед фігур, об'єми яких можна обчислювати за допомогою R-інтеграла, виділяють так звані тіла обертання.

Для обчислення об'ємів деяких кубовних фігур доцільно застосовувати сучасні комп'ютерні засоби математики.

У програмі Gran1 передбачена вбудована команда для обчислення об'єму тіла обертання. Зауважимо, що краще тіло обертання утворювати шляхом обертання криволінійної трапеції, а не кривої. Скористаємося програмою Gran1 для обчислення об'ємів тіл обертання на двох прикладах і проаналізуємо отримані результати.

Γ_1: $y = \sin x$, $x \in [0; \pi/2]$ $\Rightarrow$ $V_{1x} = 2.4674$,

Γ_2: $y = \arcsin x$, $x \in [0;1]$ $\Rightarrow$ $V_{2y} = 2.373$.

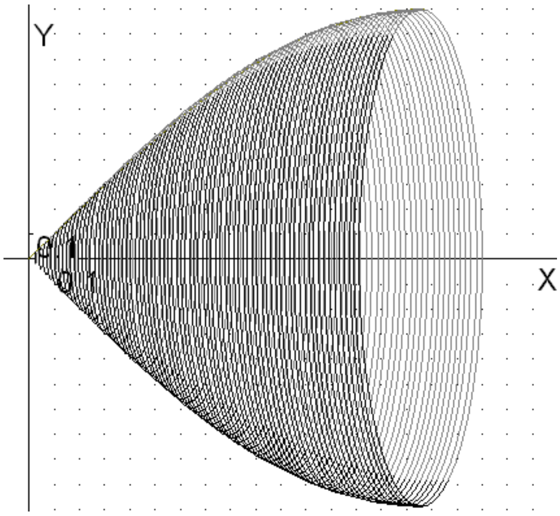


Рис. 15.

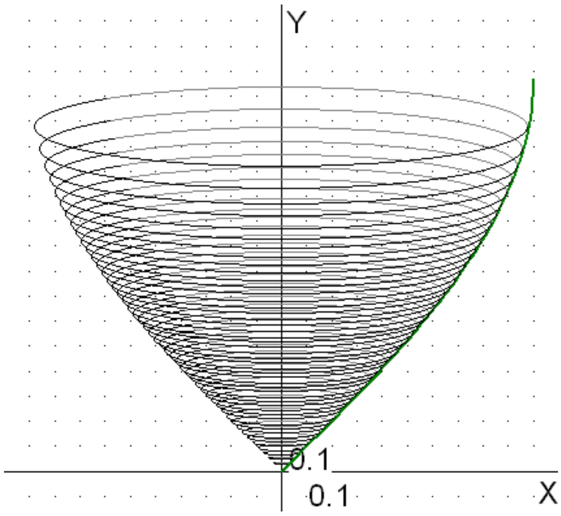


Рис. 16.

Знайдені два об'єми повинні бути рівними між собою (див. рис. 15, 16), але результати, отримані за програмою Gran1, відчутно відрізняються один від одного. Неважко переконатися, що перший об'єм обчислений точніше, а другий результат дещо занижений.

При застосуванні більш потужних програм, наприклад, MathCAD, з'являється можливість будувати якісні тривимірні ілюстрації.

Наведемо робочий аркуш MathCAD, на якому зображено тіло обертання (рис. 17) та обчислено його об'єм.

$f(x) := (1.1 + \sin(x))^{\cos(x)}$ $\quad a := 0 \quad b := 2\pi \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx \quad V = 27.233$

$g(x,y) := if\left(f(x)^2 - y^2 \ge 0, \sqrt{f(x)^2 - y^2}, 0\right) \qquad g1(x,y) := -g(x,y)$

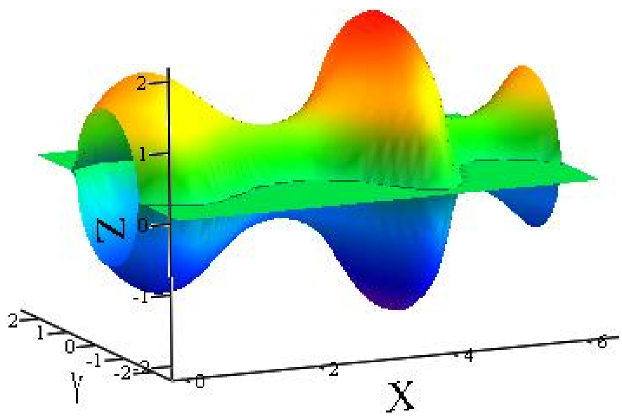


Рис. 17.

На основі застосувань інтегрального числення до обчислення довжин, площ та об'ємів доцільно разом із майбутніми вчителями математики знайти *загальну схему застосувань інтегрального числення* до розв'язування деяких практичних задач, пов'язаних з означенням геометричних і фізичних величин та обчисленням значень цих величин:

1) переконатися, що потрібну геометричну або фізичну величину W доцільно пов'язати з певним відрізком $[a;b]$, тобто $W = W([a;b])$, причому кожній частині відрізка $[a;b]$ відповідає певна частина величини W і цю величину доцільно вважати адитивною, тобто $W[a;b] = \sum_{k=0}^{n-1} W([x_k;x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta W_k$ для будь-якого поділу (T) відрізка $[a;b]$ точками $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$;
2) знайти придатне наближення $\Delta W_k \approx \omega(x_k^*) \cdot \Delta x_k$, де $\omega(x_k^*)$ – значення деякої відомої функції $\omega = \omega(x)$, $x \in [a;b]$;
3) дістати природне наближення величини W у вигляді $W([a;b]) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \omega(x_k^*)\Delta x_k$;
4) покласти за означенням, що $W([a;b]) = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(x_k^*)\Delta x_k$, і дістати формулу для обчислення значень величини W, тобто $W([a;b]) = \int_a^b \omega(x)\,dx$;
5) переконатися в ефективності одержаної формули.

Наведену схему можна застосувати, щоб ввести поняття площі поверхні обертання, маси матеріальної дуги і матеріальної пластини, статичних моментів і координат центрів цих мас, а також щоб знайти відповідні інтеграли для обчислення значень вказаних величин.

За допомогою сучасних комп'ютерних засобів математики можна ілюструвати введені поняття і обчислювати значення відповідних інтегралів.

За допомогою програми Maxima можна досить ефективно розв'язувати задачі на відшукання різних геометричних і фізичних величин, яке зводиться до обчислення певних інтегралів. Так, для відшукання площі поверхні еліпсоїда обертання, утвореного обертанням еліпса $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $t \in [0;\pi]$, навколо осі OX, досить використати формулу $S = 2\pi \int_\alpha^\beta |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ і ввести команди:

```
(%i1) apply(assume,[a>0,b>0,a>b])$

(%i2) integrate(2*%pi*b*sin(t)*sqrt(a^2*sin(t)^2+b^2*cos(t)^2),t,0,%pi);
```

(%o2) $2\pi b\,(b-\dfrac{2a^2\sqrt{a^2-b^2}\,\operatorname{asin}\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)}{2b^2-2a^2})$

Застосування програми MathCAD у даній темі проілюструємо на такому прикладі. Знайдемо центри мас однорідної кривої Γ: $y=4-x^2$, $x\in[-2;2]$, і відповідної їй однорідної криволінійної трапеції Φ: $0\le y\le 4-x^2$, $x\in[-2;2]$.

Робочий аркуш з розв'язанням даної задачі.

$f(x) := 4-x^2 \qquad a := -2 \qquad b := 2$

$L := \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx \qquad S := \int_a^b f(x)\,dx$

$yL := \frac{1}{L}\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}\,dx \qquad yS := \frac{1}{2S}\cdot\int_a^b f(x)^2\,dx$

$L = 9.294 \qquad S = 10.667 \qquad yL = 2.177 \qquad yS = 1.6$

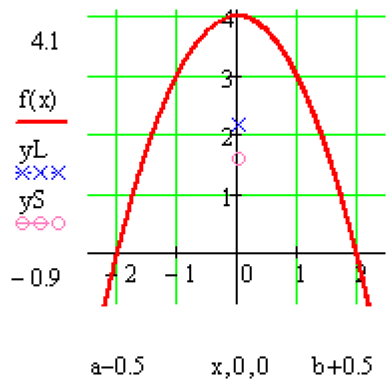


Рис. 17.

При розв'язуванні цієї задачі було враховано симетричність кривої Γ і трапеції Φ відносно осі OY, внаслідок чого очевидно, що центри їх мас лежать на цій осі, тобто $xL = xS = 0$. На рис. 17 центр мас кривої позначено хрестиком: ×, а центр мас трапеції – кружечком: °.

Сучасні комп'ютерні засоби математики можуть бути зручними, потужними і ефективними засобами навчання будь-якої математичної дисципліни, включаючи і математичний аналіз. Ефективне педагогічно виважене і доцільневикористання цих засобів неможливе без врахування рівня розвитку сучасної математичної науки. Тому намагання використовувати сучасні комп'ютерні засоби математики з одного боку змушують користувача опанувати деякими досягненнями сучасної математики, а з іншого боку таке використання надає можливості здійснити таке опанування, оскільки не тільки підвищує рівень мотивованості навчання, а й робить це навчання доступним завдяки такому унаоченню навчального матеріалу, яке раніше було важкодоступним.

Література

1. Алгебра і початки аналізу: 10-11 клас. Пер. з рос. / *А. М. Колмогоров*, *О. М. Абрамов*, *Ю. П. Дудніцин* та ін. / За ред. *А. М. Колмогорова*. – К.: Освіта, 1992. – 350 с.
2. *Михалін Г. О.* Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. – К: ДІНІТ, 2003. – 320 с.
3. *Жалдак М. І.*, *Михалін Г. О.*, *Деканов С. Я.* Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. –К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
4. *Михалін Г. О.*, *Деканов С. Я.* Вивчення основних елементарних функцій дійсної і комплексної змінної з використанням комп'ютерних засобів математики // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. – № 9 (16). – С. 49-72.