М.І.Жалдак, Г.О.Михалін

Елементарні факти теорії множин у шкільному курсі математики

1. Вступ. У більшості країн світу передбачається побудова змісту шкільного курсу математики на теоретико-множинній основі. Але, на думку багатьох педагогів, при цьому часто впадають у крайність зайвої формалізації, а тому, намагаючись уникнути цього, впадають в іншу крайність, цілком відмовляючись від теоретико-множинного підходу, намагаючись навіть не згадувати поняття «множина» та «елемент множини», замінюючи їх іншими, часто менш зрозумілими поняттями типу «сукупність», «зібрання», «кількість», «змінна» тощо.

Разом з тим, поняття «множина» і «елемент множини» є корисними не тільки для математики як науки, а й для шкільного курсу математики. Це зумовлене не лише їх важливістю для дотримання дидактичного принципу науковості навчання, а й принципу доступності навчання, оскільки ці поняття на інтуїтивному рівні легко сприймаються переважною більшістю учнів. Проведені у другій половині минулого століття різноманітні психолого-педагогічні дослідження підтвердили, що поняття множини та її елемента і відношення належності доступні навіть учням молодших класів.

Тому слід відмовитися від ілюзій типу «вивчати у шкільному курсі математики елементи теорії множин» та «у шкільному курсі математики можна навіть не згадувати про множини та їх елементи».

Справа у тому, що «Елементи теорії множин» складають вельми змістовні університетські математичні курси (див., наприклад [1] - [3]), а те, що складає шкільну змістову лінію «Елементи теорії множин», насправді охоплює лише деякі елементарні факти теорії множин, які доцільно вивчати вводячи відповідні поняття поступово, починаючи вже з середніх класів, ілюструючи їх великою кількістю зрозумілих для учнів прикладів, багатократно повертаючись до цих фактів (кожного разу на вищому рівні), розкриваючи їх практичну значущість.

Дана стаття присвячена розкриттю за’язків деяких елементарних і водночас важливих фактів теорії множин з багатьма фактами шкільного курсу математики.

2. Множина, елемент множини і відношення належності елемента до множини. Поняття *множини* є одним з найзагальніших математичних понять, яке не означається, а розтлумачується на конкретних прикладах. Такі поняття є найзагальнішими математичними моделями реального світу, а також є важливими елементами математичної мови. Ілюструючи це поняття, можна навести приклади множин: 1) множина класів даної школи; 2) множина шкіл даного міста; 3) множина міст даної країни; 4) множина планет Сонячної системи; і такі приклади можна продовжувати як завгодно довго.

Кожна множина, за винятком однієї (так званої *порожньої множини*), складається з елементів. Поняття «*елемент множини*» також є неозначуваним основним математичним поняттям, яке задовольняє основному *відношенню належності* до даної множини.

Часто множини позначають великими латинськими літерами, а елементи множин – малими літерами латинського алфавіту. Висловлення типу «елемент x належить до множини A» коротко записують так: «$x \in A$» або «$A \ni x$», а висловлення типу «елемент y не належить до множини B» – так: «$y \notin B$» або «$B \not\ni y$» чи «$y \overline{\in} B$» або «$B \overline{\ni} y$».

Порожню множину позначають символом $\varnothing$ і для цієї множини висловлення «$x \notin \varnothing$» є правильним для будь-якого елемента x.

Для позначення множин часто використовують фігурні дужки {та}, між якими записують усі елементи даної множини або умови, що визначають ці елементи. Так, вираз $A = \{x \in R : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ означає множину розв’язків рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$, а вирази $B = \{2,3\}$ та $C = \{3, 5, 2\}$ означають відповідно множину B з елементами 2 і 3 та множину C – з елементами 3, 5, 2.

Широко використовуване у шкільному курсі математики поняття «*змінна*» доцільно розуміти як «довільний елемент даної множини», а конкретний елемент цієї множини є *значенням даної змінної*. Таким чином, значеннями змінної можуть бути об'єкти різної природи, а не тільки числа. Так, змінна x, $x \in \{2,3\}$ може набувати значень 2 або 3; значенням змінної $y \in B$, де B – множина назв міст України, може бути назва деякого конкретного міста України; значенням змінної $z \in \{\Phi : \Phi - \textit{плоска геометрична фігура}\}$ є деяка конкретна геометрична фігура на площині.

Серед множин, що вивчаються у шкільному курсі математики, виділимо такі:

- $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множина натуральних чисел;
- $N_{-} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ – множина цілих від'ємних чисел;
- $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – множина невід'ємних цілих чисел;
- $Z = \{m : m \in N$ або $m \in N_{-}$, або $m = 0\}$ – множина цілих чисел;
- $\overline{m,n} = \{m, m+1, \ldots, n\}$ – цілочисельний відрізок з кінцями $m \in Z$ та $n \in Z$;
- $Q = \{\frac{m}{n} : m \in Z$, а $n \in N\}$, – множина раціональних чисел;
- R – множина дійсних чисел;
- R^1 – координатна або числова пряма;
- R^2 – координатна площина;
- R^3 – координатний простір;
- Ω – множина усіх можливих наслідків стохастичного експерименту;
- S – множина (простір) подій;

- випадкова подія, як певний елемент простору S (деяка підмножина множини Ω);
- геометрична фігура, як множина точок даної прямої, площини або простору.
- числові проміжки: відрізок $[a;b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$, піввідрізок $[a;b) = \{x \in R : a \le x < b\}$, інтервал $(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$ та півінтервал $(a;b] = \{x \in R : a < x \le b\}$;
- невизначений інтеграл, як множина усіх первісних функцій на даному проміжку.

3. Підмножина і відношення включення та рівності множин. Для двох заданих множин A і B можливі такі випадки:

- будь-який елемент множини A є також елементом множини B. Тоді множину A називають *підмножиною* множини B і записують $A \subset B$ або $B \supset A$ та кажуть, що A *включається* у B, або B *включає* A, або A *міститься в* B, або B *містить у собі* A, або A є частиною B;
- $B \subset A$, тобто B є підмножиною A;
- $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини A і B складаються з одних і тих самих елементів. Тоді *множини* A і B називають *рівними* і записують $A = B$;
- кожна з множин A і B містить елементи, що не належать до іншої з цих множин. Тоді *множини* A і B називають *не порівнюваними щодо включення.*

Так, для розглянутих у пункті 2 множин маємо включення: $N_0 \subset N \subset Z \subset Q \subset R$, $Z \supset N_-$, $N = \{n \in Z : n > 0\}$, а відрізки [1;2] і [2;3] не порівнювані щодо включення.

Доцільно вважати, що $\varnothing \subset A$ і $A \subset A$ для будь-якої множини A. Порожню множину і саму множину A часто називають *невласними* *підмножинами* множини A, а всі інші підмножини множини A називають *власними*.

З наведеного означення рівних множин випливає, що коли у деяких різних позначеннях однієї і тієї самої множини деякі елементи повторюються неодноразово, то такі різні позначення не свідчать про те, що множини різні. Так множини $\{1,2,3\}$ і $\{1,1,2,2,2,3,3\}$ є рівними, бо складаються з одних і тих самих елементів. Разом з тим доцільно вважати, що кожен елемент множини входить до неї тільки один раз.

Часто плутають відношення належності ($\in$) і включення ($\subset$), стверджуючи, наприклад, що «пряма l належить до площини α, тобто $l \in \alpha$» замість «пряма l міститься (лежить) у площині α, тобто $l \subset \alpha$». Це, швидше за все, зумовлено тим, що часто ототожнюють елемент x множини A, $(x \in A)$, з одноелементною множиною $\{x\}$, що є підмножиною множини A, $(\{x\} \subset A)$.

У випадку, коли множина сама є елементом деякої іншої множини, можливе одночасне виконання відношень $A \in B$ і $A \subset B$. Наприклад, якщо A_0 – деяка множина,

$$A_1 = \{e : e \in A_0;\, A_0\} = A_0 + \{A_0\},\; A_2 = \{e : e \in A_1;\, A_1\} = A_1 + \{A_1\},\; \ldots,$$

$$A_n = \{e : e \in A_{n-1};\, A_{n-1}\} = A_{n-1} + \{A_{n-1}\},\; \ldots,\; A = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

тоді кожна множина $A_k \in A$ і водночас $A_k \subset A_n$. Особливо цікавим є випадок, коли у ланцюжку множин A_n A_0 – порожня множина $\varnothing$. Наведена множина A_n відіграє важливу роль у аксіоматичній побудові теорії натуральних чисел [4, с. 95]. Приклади множин A_n і A також переконують, що недоцільно ототожнювати елемент a і множину $\{a\}$. Доцільно якщо:

- $a = \varnothing$, то це порожня множина, а $\{a\} = \{\varnothing\}$ – одноелементна множина;
- $a = N = \{1,2,\ldots\}$, то це нескінченна множина, а $\{a\} = \{N\}$ – одноелементна множина.

На практиці часто використовують так звану *універсальну множину*, роль якої відіграє деяка фіксована множина Ω. Ця множина визначається своїми основними властивостями (певними аксіомами) або задається переліком своїх елементів. Така універсальна множина є певною математичною моделлю певного реального об'єкту (або явища), і ця модель побудована в результаті спостережень за цим об'єктом (або явищем) та певних умовиводів (аналіз і синтез, узагальнення, абстрагування і конкретизація). Так, створення будь-якої ймовірнісної моделі починається з побудови простору (множини) Ω, елементами якого є наслідки (результати) певного стохастичного експерименту. У цьому випадку мають справу лише з множинами, кожна з яких є підмножиною універсальної множини Ω. Сукупність усіх підмножин даної множини Ω часто позначають символом 2^{Ω}, а вираз $A \in 2^{\Omega}$ означає, що $A \subset \Omega$, тобто A є підмножиною множини Ω.

Зокрема, універсальна множина Ω може бути множиною R дійсних чисел, або числовою (координатною) прямою R^1, або координатною площиною R^2, або координатним простором R^3 тощо.

4. Операції над множинами. З двома даними множинами можна виконувати такі операції:

- об'єднувати їх та утворювати множину $A \cup B := \{x : x \in A$ або $x \in B\}$ – *об'єднання множин* A *і* B;
- шукати спільні елементи множин A і B та утворювати множину $A \cap B := \{x : x \in A$ і $x \in B\}$ – *перетин (або переріз) множин* A *і* B;
- шукати елементи множини A, що не належить множині B, та утворювати множину $A \setminus B := \{x : x \in A$ і $x \notin B\}$ – *різницю множин* A *і* B. Якщо $A = \Omega$ – універсальна множина і тому $B \subset \Omega$, то *різницю* $\Omega - B$ *позначають* $C_{\Omega}B$ і називають *доповненням множини* B *до множини* Ω;

- Утворювати впорядковані пари (a, b), де $a \in A \neq \varnothing$, $b \in B \neq \varnothing$, та множину усіляких таких пар $(a, b) \in A \times B$, де $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$ – *декартів добуток множин* A *і* B.

Операції об'єднання і перетину легко узагальнюються на випадок довільної сукупності множин A_i, де $i \in I$, а I – деяка задана множина (множина індексів):

об'єднанням множин A_i, $i \in I$, називають множину усіх тих елементів, кожен з яких належить принаймні до однієї із заданих множин A_i. Таку множину позначають $\bigcup_{i \in I} A_i$;

перетином множин A_i, $i \in I$, називають множину усіх тих елементів, кожен з яких належить до всіх даних множин A_i. Цю множину позначають $\bigcap_{i \in I} A_i$. Зокрема, якщо $I = \{1,2,\ldots n\}$, то для об'єднання множин A_i використовують позначення $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, а для перетину множин A_i – позначення $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, а коли $I = N = \{1,2,\ldots\}$ – позначення $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ та $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Якщо множина індексів відома (частіше за все $I = \overline{1, n}$ або $I = N$), то використовують також скорочені позначення: $\bigcup_{i} A_i$ та $\bigcap_{i} A_i$.

Одним з важливих математичних понять є поняття *впорядкованої пари множин В елементів,* яке широко використовується і у шкільному курсі математики, проте досить часто це поняття не тільки не означається, а й навіть не розтлумачується на конкретних прикладах. Разом з тим означення впорядкованої пари (a, b). Необхідне для побудови будь-якої строгої математичної теорії і це означення досить просте: так називають множину вигляду $\{\{a\}, \{a,b\}\}$, яка перетворюється у множину $\{\{a\}\}$, коли $a = b$. При цьому a називають *першим*, а b – *другим елементом впорядкованої пари* (a,b).

Наприклад, впорядкована пара $(1,2)=\{\{1\},\{1,2\}\}$, $(2,1)=\{\{2\},\{2,1\}\}\neq(1,2)$, а впорядкована пара $(1,1)=\{\{1\}\}$, тобто це множина, єдиним елементом якої є одноелементна множина $\{1\}$.

З наведеного означення впорядкованої пари випливає, що (a,b) і (c,d) *є рівними тоді і тільки тоді, коли* $a=c$ *і* $b=d$, тобто пари мають однакові перші елементи і однакові другі елементи.

Наприклад, якщо $A=\{2,5\}$, а $B=\{2,3\}$, то

$A\times B=\{(2,2),(2,3),(5,2),(5,3)\}$, а $B\times A=\{(2,2),(2,5),(3,2),(3,5)\}$.

Дані декартові добутки містять лише по одній однаковій парі: $(2,2)$. Тому, в загальному випадку $A\times B\neq B\times A$. За індукцією можна ввести поняття: *впорядкованої трійки* елементів $(a,b,c)=(a,(b,c))$, де $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, та *декартового добутку* $A\times B\times C$ трьох непорожніх множин; *впорядкованої четвірки елементів* $(a,b,c,d)=(a,(b,c,d))$, де $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\in D$, та декартового добутку $A\times B\times C\times D$ чотирьох непорожніх множин і взагалі, *впорядкованого набору з* n *елементів* $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де $x_i\in A_i$, $i\in\overline{1,n}$ та декартового добутку $A_1\times A_2\times\ldots A_n$, n – непорожніх множин.

У випадку, коли усі множини A_i рівні, тобто $A_i=A\neq\varnothing$, їх декартів добуток називають n*-им декартовим степенем* множини A і позначають A^n, а елементи цієї множини A^n називають *кортежами довжиною* n. Зокрема, $R^2=R\times R$, $R^3=R\times R\times R$ тощо, а елементами простору R^n є *числові кортежі* довжиною n.

На практиці найчастіше мають справу з досить простими множинами, оперування над якими не призводить до суперечностей за умов дотримання елементарних правил логіки і здорового глузду. Разом з тим, якщо з довільними елементами (певних множин) оперувати досить вільно, утворюючи з них нові множини, то можуть виникнути суперечливі множини, доцільність використання яких викликає великий сумнів.

Наприклад, введення поняття «*множина, елементами якої є всеможливі підмножини даної фіксованої множини*», є цілком виправданим і корисним, а введення поняття «*множина* X, *елементами якої є всеможливі множини, що не є власними елементами*», є суперечливим. Справді, якщо припустити, що $X \notin X$, то за останнім означенням $X \in X$ (тобто маємо суперечність), а якщо припустити, що $X \in X$, то за цим самим означенням $\mathrm{X} \notin \mathrm{X}$ (і знову маємо суперечність).

Саме наявність таких суперечливих понять призвело до створення аксіом теорії множин (див., наприклад, [4] та [5]), якими визначаються правила оперування з множинами, включаючи і створення з даних множин нових, причому несуперечливих, множин.

Оскільки поняття множини є певною математичною моделлю об’єктів навколишнього світу, то враховуючи, що не існує універсальної, достатньо змістовної математичної моделі, природно чекати, що не кожну сукупність доцільно називати множиною. Існуючі аксіоматичні теорії множин є досить громіздкими і на думку їх авторів ця громіздкість є неминучою платою за уникнення очевидних суперечностей. Разом з тим зовсім не виключено, що менш очевидні суперечності при цьому залишаються [5, с. 324]. Тільки практичне застосування математичних моделей (математичних теорій) дозволяє оцінити їх ефективність та межі застосувань. Розвиток математики протягом останніх 100 років підтверджує ефективність навіть «наївної» (неаксіоматичної) теорії множин, фундаментом якої є розвинутий (переважно шляхом вивчення математики) здоровий глузд.

5. Властивості операцій над множинами. Іноді у математичній літературі зустрічаються інші позначення та назви об’єднання, перетину і різниці множин: об’єднання $A \cup B$ називають *сумою множин* A *і* B та позначають $A + B$, перетин $A \cap B$ називають *добутком множин* A *і* B та позначають $A\times B$, а різницю $A\setminus B$ позначають $A-B$. Такі позначення зумовлені тим, що багато властивостей операцій над множинами нагадують властивості операцій над числами:

1) $A\cup B=B\cup A$ і $A\cap B=B\cap A$ – *комутативна* або *переставна властивість об'єднання та перетину*;

2) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ та $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ – *асоціативна* або *сполучна властивість об'єднання та перетину*;

3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ та $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ – *дистрибутивна* або *розподільна властивість об'єднання та перетину*;

4) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)=(A\cap C)\setminus B$ – *дистрибутивна* або *розподільна властивість перетину та різниці*;

5) $A\cup\varnothing=A$ – *існування нуля,* роль якого відіграє порожня множина;

6) $A\cap\Omega=A$, якщо $A\subset\Omega$ – *існування одиниці*, роль якої може відігравати «універсальна множина» Ω;

7) $\Omega\setminus(A\cap B)=(\Omega\setminus A)\cup(\Omega\setminus B)$, $\Omega\setminus(A\cup B)=(\Omega\setminus A)\cap(\Omega\setminus B)$, тобто $C_\Omega(A\cap B)=(C_\Omega A)\cup(C_\Omega B)$, $C_\Omega(A\cup B)=(C_\Omega A)\cap(C_\Omega B)$ – *закони де Моргана* або *принцип двоїстості*.

Доведення наведених та інших властивостей операцій над множинами ґрунтуються на відповідних означеннях і часто є нескладними. Проілюструємо ці доведення на прикладі законів де Моргана:

$$x\in A\setminus(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A\ \text{і}\ (x\notin B\cap C)\Leftrightarrow x\in A$$

і

$$(x\notin B\ \text{або}\ x\notin C)\Leftrightarrow(x\in A\ \text{і}\ x\notin B)\ \text{або}\ (x\in A\ \text{і}\ x\notin C)\Leftrightarrow(x\in A\setminus B)$$

або

$$(x\in A\setminus C)\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

6. Поняття відповідності (залежності) між множинами (змінними), відображення та функції. Поняття функції – одне з найважливіших математичних понять. У шкільному (і не тільки) курсі математики досить поширеним є таке означення: *функцією називають таку залежність між змінними величинами, коли кожному значенню однієї величини відповідає одне значення іншої величини*. При цьому часто нічого не кажуть про те, що таке «величина», «змінна величина», «значення величини», «залежність між величинами». Окрім, цього, так введене поняття функції аж ніяк не пов'язують з перетвореннями (зокрема, рухом) геометричних фігур, з відображенням однієї фігури на іншу, а також не наголошують на тому, що *задання будь-якої функції по суті пов'язано із заданням множини впорядкованих пар* $(x, f(x)) = \{\{x\}, \{x, f(x)\}\}$, де $x \in A$ – фіксоване значення «незалежної змінної» із множини A (області значення функції $f(x)$), а $f(x)$ – відповідне значення функції (або «залежної змінної» із множини значень B функції $f(x)$). Таким чином, вузький погляд на поняття функції, нехтування поняттям впорядкованої пари робить шкільний курс математики неповноцінним і аж ніяк не сприяє його доступності.

У пункті **2** наведено сучасне тлумачення понять «змінна» та «значення змінної», значно ширше і не менш доступне ніж ті, що використовуються у шкільному курсі математики. У пункті **4** наведено сучасне тлумачення поняття впорядкованої пари та декартового добутку непорожніх множин A і B, що дозволяє легко ввести сучасне поняття *відповідності* або *залежності між непорожніми множинами* A і B: так називають будь-яку підмножину Γ множини впорядкованих пар $(a,b) \in A \times B$, де $a \in A$, $b \in B$ (тобто $\Gamma \subset A \times B$); при цьому, якщо пара $(x, y) \in \Gamma$, то кажуть, що *елементу* $x \in A$ *відповідає (*Γ *– відповідає) елемент* $y \in B$, а множину Γ називають *законом відповідності* або *залежністю між множинами* A *і* B *чи залежністю між змінними* $x \in A$ *і* $y \in B$.

Так, якщо $A = \{1, 2\}$, а $B = \{3, 4\}$, то $\Gamma = \{(1,3), (1,4), (2,3)\}$ – одна з можливих відповідностей (залежностей) між множинами A і B, $\Gamma = A \times B$ – інша залежність (відповідність) між цими множинами, і взагалі різних залежностей (відповідностей) між даними множинами A і B рівно стільки, скільки існує непорожніх підмножин декартового добутку $A \times B$.

Серед усіх відповідностей (залежностей) між множинами A і B виділяють так звані *функціональні відповідності* (*функціональні залежності*), тобто такі, коли кожному елементу $x \in A$ відповідає єдиний елемент $y \in B$, який називають *образом елемента* x.

Так, якщо $A = \{1,2\}$ і $B = \{3,4\}$, то відповідності $\varGamma_1 = \{(1,3),(2,3)\}$, $\varGamma_2 = \{(1,4),(2,4)\}$, $\varGamma_3 = \{(1,3),(2,4)\}$ та $\varGamma_4 = \{(1,4),(2,3)\}$ є функціональними, а усі інші відповідності між множинами A і B не є функціональними.

Якщо задано функціональну відповідність $\varGamma$ між множинами A і B, то *відображенням* f *множини* A *у множину* B або *функцією* f *з множини* A *у множину* B називають впорядковану трійку $(A, B, \varGamma)$, яку позначають $f : A \to B$, або $A \xrightarrow{f} B$, або записують $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$ (а іноді коротко $y = f(x)$, чи $f(x)$, чи навіть f). При цьому A називають *множиною (областю) визначення* функції (відображення) f і позначають $D(f)$; $\varGamma$ – називають також *графіком* f і позначають $\varGamma(f)$; елемент $y \in B$, який є *образом* елемента $x \in A$, називають також *значенням функції (відображення)* f в точці x і позначають $f(x)$, а множину усіх значень функції f, тобто $\{f(x) : x \in D(f)\}$ називають *множиною значень функції* f і часто позначають $E(f)$ або $f(A)$ ($f(A) = \bigcup\limits_{x \in A} f(x)$ називають образом множини A при відображенні f, і цей образ є об'єднанням образів всіх елементів множини A).

Зрозуміло, що кожне відображення $f : A \to B$ цілком визначається функціональною відповідністю (графіком) $\varGamma(f)$. Тому часто поняття функції та функціональної відповідності (графіка) ототожнюють і називають *функцією таку відповідність (залежність) між двома множинами* *(змінними), коли кожному елементу (значенню) першої множини (змінної) відповідає єдиний елемент (єдине значення) другої множини (змінної).*

На цьому ґрунтується *графічний спосіб задання функції* (відображення), при якому функцію f задають її графіком $\Gamma(f)$.

Ще раз підкреслюємо, що наведене означення функції за формою по суті таке саме, яке наводиться у шкільному курсі математики, проте є повністю обґрунтованим і має значно ширші застосування:

- будь-яке геометричне перетворення на площині (просторі) – це відображення цієї площини (простору) на себе, а рух – це відображення, що зберігає відстань між відповідними точками; будь-який приклад геометричного перетворення є водночас прикладом нечислової функції, область визначення (значення) і множина значень якої не є числовими множинами;
- довжина, площа та об'єм по суті є функціями, для яких областю визначення (значення) є певні множини вимірних фігур, кожній з яких ставиться у відповідність за певними правилами єдине число, яке називається довжиною, площею або об'ємом цієї фігури;
- ймовірність також є функцією, яка кожній випадковій події A (підмножині множини елементарних подій Ω) з простору подій S ставить у відповідність за певними правилами єдине число $P(A)$ – ймовірність цієї події;
- операція диференціювання (знаходження похідної) задає функцію, областю (значення) якої є деяка підмножина множини диференційовних функцій, а множиною значень є множина відповідних похідних;
- операція обчислення визначеного інтеграла задає функцію, областю значення якої є деяка підмножина множини функцій, інтегровних на даному відрізку, а множиною значень – відповідна підмножина множини R дійсних чисел;

- поняття відстані $\rho(x, y)$ між точками x і y даної множини A можна тлумачити як певну функцію, областю задання якої є декартів добуток $A \times A = A^2$, тобто $(x, y) \in A^2 = A \times A$, а множина значень є лежить у проміжку $[0;+\infty)$;
- поняття скалярного добутку $\vec{a} \cdot \vec{b}$ довільних векторів даного лінійного простору L можна також тлумачити як певну функцію з областю задання $L^2 = L \times L$ і множиною значень R;
- таблиця вартості авіаційного квитка для перельоту з одного міста в інше задає функцію, областю задання якої є множина пар міст, між якими є авіаційне сполучення, а множиною значень є певна скінченна множина додатніх чисел із R.

Приклади різноманітних функцій, які так чи інакше зустрічаються у шкільному курсі математики, можна продовжувати досить довго. Такі приклади розкриваються різноманітність застосувань математичних моделей, а отже підвищуються рівень вмотивованості опанування цими моделями.

7. Поняття кількості елементів множини, скінченої та нескінченної множини. У шкільному курсі математики широко використовують поняття «кількості» тих чи інших об’єктів (а по суті елементів певної множини), а також скінченої та нескінченної кількості. При цьому досить часто ці поняття ніяк не пояснюють, вважаючи їх цілком зрозумілими, що насправді не зовсім так. Поняття впорядкованої пари та відповідності між множинами дозволяє навести такі пояснення досить просто.

У чому полягає підрахунок кількості елементів певної множини, наприклад, $A = \{a, b, c\}$? По суті в тому, що утворюються пари, наприклад, $(a,1)$, $(b,2)$, $(c,3)$, після чого кажуть, що у множині A три елементи. Вказані пари фактично задають відповідність f між множинами $A = \{a, b, c\}$ і $B = \{1, 2, 3\}$, причому кожному елементу множини A відповідає один елемент множини B і кожен елемент множини B є образом одного елемента множини A. Таку *відповідність* f називають *взаємно однозначною* і позначають $f: A \leftrightarrow B$. При цьому кажуть, що множини A і B *еквівалентні* або *мають однакову кількість елементів* і пишуть $A \sim B$ або $k(A) = k(B)$.

Множину A називають *скінченною*, якщо вона порожня (і тоді кажуть, що вона *містить нуль елементів*, тобто $k(A) = 0$), або еквівалентна множині $B = \overline{1, n} = \{1, 2, ..., n\}$ (і тоді кажуть, що вона *містить* n *елементів, тобто* $k(A) = n$) для деякого $n \in N$.

Отже, умова, що множина має n елементів, де $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, фактично розподіляє скінченні множини на класи:

- *нульовий клас* утворює єдина порожня множина ;
- *перший клас* утворюють усілякі одноелементні множини;
- *другий клас* утворюють усілякі двохелементні множини;
- взагалі, n*-ий клас* утворюють усілякі n-елементні множини.

Множину A називають *нескінченною*, якщо вона не є скінченною, тобто $A \neq \varnothing$ і A не є еквівалентною множині $B = \overline{1, n}$ для будь-якого $n \in N$. При цьому позначають $K(A) = \infty$ і кажуть, що *множина* A *містить нескінченну кількість елементів.*

Прикладами нескінченних множин є множини: N – множина натуральних чисел, Z – множина цілих чисел, Q – множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел, R^2 – множина точок координатної площини, R^3 – множина точок координатного простору та безліч інших множин.

Нескінченні множини, як і скінченні, можна розподілити на класи так, що в один клас входять усі множини, попарно еквівалентні між собою (а тому й еквівалентні до певної фіксованої множини A цього класу). При цьому кажуть, що кожна множина X з даного фіксованого класу має одну й ту саму кількість елементів, яку позначають певним символом, наприклад, $k(X) = k(A)$.

Так $k(N)=\infty$, $k(Z)=\infty$, $k(Q)=\infty$, $k(R)=\infty$, $k(R^2)=\infty$ і $k(R^3)=\infty$, проте нескінченні множини N, Z і Q попадають в один клас еквівалентних множин, а нескінченні множини R, R^2 і R^3 попадають в інший клас еквівалентних множин.

Нескінченну кількість елементів кожної множини $A \sim N$ часто позначають символом a і називають *зчисленною кількістю елементів*, а саму *множину* A називають *зчисленною*. Отже, $k(A)=a \Leftrightarrow A \sim N$.

Нескінченну кількість елементів кожної множини $A \sim R$ часто позначають символом c і називають *континуальною кількістю елементів*, а саму *множину* A називають *континуальною*. Отже, $k(A)=c \Leftrightarrow A \sim R$.

Зрозуміло, що скінченні кількості можна порівнювати за величиною: $0<1<2<\ldots$, причому $k(A)=n<m=k(B)$ тоді і тільки тоді, коли $A \nsim B$ (множини A і B не є еквівалентними), проте у множині B є підмножина $B_1 \sim A$. Наприклад, якщо $A=\{5,7\}$, а $B=\{2,3,4\}$, то $k(A)=2<3=k(B)$, причому $A \nsim B$, а $B_1=\{2,3\}\subset B$ і $B_1 \sim A$.

Використовуючи аналогію, легко поширити процедуру порівняння скінченних кількостей на будь-які: для довільних фіксованих множин A і B кажуть, що:

- вони *мають однакову кількість елементів* і записують $k(A)=k(B)$, якщо $A \sim B$;
- *кількість елементів* $k(A)$ *є меншою за кількість елементів* $k(B)$ і записують $k(A)<k(B)$, якщо $A \nsim B$ та існує підмножина $B_1 \subset B$, для якої $A \sim B_1$;
- *кількість елементів* $k(A)$ *є більшою за кількість елементів* $k(B)$ і записують $k(A)>k(B)$, якщо $k(B)<k(A)$;
- *кількість елементів* $k(A)$ *є не більшою за кількість елементів* $k(B)$ і записують $k(A)\le k(B)$, якщо $k(A)<k(B)$ або $k(A)=k(B)$;

- *кількість елементів $k(A)$ є не меншою за кількість елементів $k(B)$* і записують $k(A) \geq k(B)$, якщо $k(B) \leq k(A)$.

Наприклад, еквівалентність множин R^2 і R можна довести, якщо кожній точці $(x, y) \in R^2$ поставити у відповідність число $z \in R$, кожен десятковий знак якого з номером $2n+1$ співпадає з десятковим знаком з номером n числа x, а кожен десятковий знак з номером $2n+2$ числа z співпадає з десятковим знаком з номером n числа y, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Відомо, що для будь-яких скінченних кількостей елементів $k(A)$ і $k(B)$ завжди має місце одне й тільки одне із співвідношень: або $k(A) < k(B)$, або $k(A) > k(B)$, або $k(A) = k(B)$. Виявляється, що ця властивість зберігається для довільних кількостей елементів, причому будь-яка скінченна кількість елементів є меншою за будь-яку нескінченну кількість елементів, а нескінченні кількості елементів також розрізняються за величиною. Зокрема, $a = k(N) = k(Z) = k(Q) < c = k(R) = k(R^2) = k(R^3) = k(<\alpha;\beta>)$, де $<\alpha;\beta>$ – довільний числовий проміжок, причому $\alpha < \beta$.

Символом $2^{k(A)}$ позначають кількість елементів множини 2^A, елементами якої є усілякі підмножини множини A. Відома нерівність $n < 2^n$, що є правильною для будь-якої скінченої кількості $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, виявляється правильною і для будь-якої кількості $k(A)$, тобто $k(A) < 2^{k(A)}$ для будь-якої множини A. Цікаво, що зчисленна кількість a і континуальна кількість c пов'язані рівністю $c = 2^a$, тобто будь-яка континуальна множина є еквівалентною до множини усіляких підмножин зчисленної множини. Окрім цього зчисленна кількість є найменшою серед усіх нескінченних кількостей, а найбільшої нескінченної кількості не існує.

Виділимо ще одну *характеристичну властивість скінченних та зчисленних множин*.

Якщо A – непорожня скінченна множина, то існує натуральне число n і взаємно-однозначна відповідність (відображення) $f : \overline{1,n} \leftrightarrow A$ така, що $f(k) = a_k \in A$, $k \in \overline{1,n}$, і навпаки кожний елемент $a \in A$ є образом єдиного числа $k \in \overline{1,n}$, тобто $f(k) = a_k$. Таким чином, $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, тобто усі *попарно різні елементи скінченної непорожньої множини* $A \neq \varnothing$ *можна занумерувати натуральними числами від 1 до* n.

Аналогічно можна довести, що *характеристичною властивістю зчисленної множини* A *є те, що її елементи можна занумерувати усіма натуральними числами, тобто записати* A *у вигляді* $A = \{a_1, a_2, ..., a_n ...\} = \{a_k : k \in N\}$, *де елементи* a_k, $k \in N$, *попарно різні.*

Непорожню *множину* називають *дискретною,* якщо вона є скінченною або зчисленною, тобто елементи цієї множини можна занумерувати або натуральними числами від 1до n, або усіма натуральними числами. Так, множини парних чисел, раціональних чисел, розв’язків рівняння $x^2 = 2$ є дискретними, а множини ірраціональних чисел, дійсних чисел, комплексних чисел не є дискретними.

8. Поняття відстані між точками та між множинами (фігурами). Для вирішення багатьох важливих практичних проблем часто використовують математичні методи, у яких вирішальну роль відіграє поняття відстані, що характеризує близькість об’єктів. У шкільному курсі математики явно вивчають відстань:

- між точками A і B даної прямої, як довжину відрізка AB; при цьому по суті вважають дану пряму координатною, координатами точок A і B на цій прямій є відповідно числа a_1 і b_1, а відстань

$$\rho(A,B) = \rho(a_1,b_1) = | a_1 - b_1 | = \sqrt{(a_1 - b_1)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{1} (a_i - b_i)^2};$$

- між точками A і B даної площини, як довжину відрізка AB; при цьому часто вважають дану площину координатною, точка A має координати (a_1, a_2), точка B – координати (b_1, b_2), а відстань
$$\rho(A,B) = \rho((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2} = \sqrt{\sum_{i-1}^{2}(a_i-b_i)^2};$$
- між точками A і B даного тривимірного простору, як довжину відрізка AB; при цьому часто вважають даний простір координатним, точка A має координати (a_1, a_2, a_3), точка B – координати (b_1, b_2, b_3), а відстань
$$\rho(A,B) = \rho((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \sqrt{\sum_{i-1}^{3}(a_i-b_i)^2};$$
- від точки A до фігури, як довжину відрізка AB, де B – межова точка цієї фігури, причому відрізок AB – найменший з можливих; зокрема, це може бути відстань від точки A до прямої (l) чи до площини (α).
- між фігурами G_1 і G_2, як невід'ємне число $\rho = \alpha(G_1, G_2)$, яке не перевищує довжини будь-якого відрізка AB, де $A \in G_1$, $B \in G_2$ причому згаданий відрізок AB можна вибрати так, що його довжина буде відрізнятися від числа ρ як завгодно мало. Ця відстань існує завжди. Іноді (проте не завжди) $\rho = \min\limits_{A \in G_1,\ B \in G_2} \rho(A,B)$; зокрема так буде, коли G_1 і G_2 – прямі або площини. Спроба означити відстань між фігурами G_1 і G_2 за останньою рівністю [6, с. 48] призводить до випадків, коли ця відстань не існує, що не є зручним для побудови коректної математичної теорії.

Таким чином, поняття відстані між довільними фігурами (множинами) цілком визначається поняттям відстані між двома точками даного простору, у ролі якого може бути пряма, площина, тривимірний простір чи якась інша непорожня множина.

Серед усіх властивостей відстані (між довільними точками a і b) особливе місце посідають так звані *характеристичні властивості:*

1) $\rho(a,b) \geq 0$ – *невід'ємність відстані;*

2) $\rho(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ – *рівність відстані нулеві;*

3) $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ – *симетричність відстані;*

4) $\rho(a,b) \leq \rho(a,c) + \rho(c,b)$ – *нерівність трикутника.*

За допомогою цих характеристичних властивостей вводиться *загальне поняття відстані* між точками (елементами) довільної непорожньої множини M: так називають довільну функцію $\rho : M \times M \to [0;+\infty)$, що задовольняє властивості 1) – 4). При цьому, якщо точки a і b множини M фіксовані, то значення $\rho(a,b)$ називають *відстанню між точками a і b*. Множину M разом з заданою на ній відстанню ρ позначають (M,ρ) і називають *метричним простором*.

Одним з великої кількості метричних просторів є так званий *n-вимірний евклідів простір R^n*. У цьому просторі кожна точка x визначається числовим кортежем довжиною n, тобто $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, а відстань між точками $a = (a_1,..., a_n)$ і $b = (b_1,...., b_n)$ визначається рівністю $\rho(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_k - b_k)^2}$.

Зауважимо, що в n-вимірному просторі відстань між точками $a = (a_1,..., a_n)$ і $b = (b_1,...., b_n)$ можна задати багатьма іншими способами, зокрема, так: $\rho(a, b) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} | a_i - b_i |$.

Наведемо ще один важливий приклад відстані, пов'язаний з поняттями математичного сподівання і дисперсії випадкової величини..

Нехай задано імовірнісний простір (імовірнісна модель) (Ω, S, P), пов'язаний з певним стохастичним експериментом. Числову функцію $X(E)$,

$E \in \Omega$, називають *простою випадковою величиною*, якщо множина її значень $\Omega_X = X(\Omega)$ скінченна: $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, причому $X^{-1}(x_i) \in S$, $i \in \overline{1, k}$, $\bigcup_{i=1}^{k} X^{-1}(x_i) = \Omega$, $X^{-1}(x_i) \cap X^{-1}(x_j) = \varnothing$, коли $i \neq j$. Очевидно, $X^{-1}(\Omega_X) = X^{-1}(X(\Omega)) = \Omega$, $X(\Omega) = X(X^{-1}(\Omega_X)) = \Omega_X$.

Для такої простої випадкової величини X існує її *математичне сподівання* $M[X]$, яке визначається рівністю

$$M[X] = \sum_{i=1}^{k} x_i P_X(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X^{-1}(\{x_i\})). \tag{1}$$

Математичне сподівання задовольняє наступні властивості, що є простими наслідками відомих властивостей суми:

Властивість 1 (про математичне сподівання). Якщо $X(E) = c = const$, $E \in \Omega$, то $M[X] = c$.

Властивість 2 (про монотонність математичного сподівання). Якщо $X(E) \le Y(E)$, $E \in \Omega$, то $M[X] \le M[Y]$, а якщо $a \le X(E) \le b$, $E \in \Omega$, то $a \le M[X] \le b$, зокрема, $|M[X]| \le M[|X|]$;

Властивість 3 (про лінійність математичного сподівання). Якщо X_i – прості випадкові величини, а числа a_i – довільні, $i \in \overline{1, m}$, то $M[\sum_{i=1}^{m} a_i X_i] = \sum_{i=1}^{m} a_i M[X_i]$.

Властивість 4 (нерівність Коші-Буняковського). Для довільних простих випадкових величин X та Y правильна нерівність $|M[X \cdot Y]| \le \sqrt{M[X^2]} \cdot \sqrt{M[Y^2]}$.

Властивість 5 (про нульове математичне сподівання). $M[|X|] = 0$ тоді й тільки тоді, коли X майже напевно дорівнює нулеві, тобто $P(\{E \in \Omega : X(E) \neq 0\}) = 0$. Таку випадкову величину часто позначають символом θ, пишуть $X = \theta$ і називають *нульовою випадковою величиною*.

Прості випадкові величини X і Y називають *рівними* (або однаковими) і позначають $X = Y$, якщо їх відповідні значення майже напевно рівні, тобто $P(\{E \in \Omega : X(E) \neq Y(E)\}) = 0$. Це рівносильно тому, що випадкова величина $X - Y$ майже напевно дорівнює нулеві, тобто $X - Y = \theta$. Отже, за означенням $X = Y$ тоді і тільки тоді, коли $X - Y = \theta$.

Відстанню між простими випадковими величинами X і Y називають число

$$\rho(X,Y) = \sqrt{M[(X-Y)^2]}. \quad (2)$$

Зауважимо, що перші три характеристичні властивості відстані: невід'ємності, рівності нулеві та симетричності є майже очевидними.

Доведемо нерівність трикутника: для будь-яких простих величин X, Y і Z – правильна нерівність: $\rho(X,Y) \le \rho(x,Z) + \rho(Z,Y)$. Справді

$$\rho(X,Y) = \sqrt{M[(X-Y)^2]} = \sqrt{M[((X-Z)+(Z-Y))]} =$$
$$= \sqrt{M[(X-Z)^2 + 2(X-Z)(Z-Y) + (Z-Y)^2]} =$$
$$= \sqrt{M[(X-Z)^2] + 2M[(X-Z)(Z-Y)] + M[(Z-Y)^2]} =$$
$$= \sqrt{M[(X-Z)^2] + 2\sqrt{M[(X-Z)^2]}\sqrt{M[(Z-Y)^2]} + M[(Z-Y)^2]} =$$
$$= \sqrt{M[(X-Z)^2]} + \sqrt{M[(Z-Y)^2]} = \rho(X,Z) + \rho(Z,Y).$$

Отже, множина усіляких простих випадкових величин (стосовно простору (Ω, S, P)) з відстанню $\rho(X,Y)$, визначеною формулою (2), є метричним простором, а тому багато властивостей простих випадкових величин є простими наслідками властивостей метричних просторів.

Важливою характеристикою випадкової величини X є *середнє квадратичне відхилення* $\sigma X] = \sqrt{M[(X - M[X])^2]}$, яке згідно з формулою (2) є відстанню $\rho(X, M[X])$ між випадковою величиною X і сталою випадковою величиною $Y(E) = M[X]$, $E \in \Omega$.

Виникає питання, *чому вимірюється відстань від* X *до* $M[X]$, *а не до якоїсь іншої сталої*? Щоб відповісти на це питання, візьмемо довільну сталу c і знайдемо

$$\rho(X,c) = \sqrt{M[(X-c)^2]} = \sqrt{M[(X-M[X]) + (M[X]-c)^2]} =$$
$$= \sqrt{M[(X-M[X])^2 + 2(X-M[X])(M[X]-c)] + (M[X]-c)^2} =$$
$$= \sqrt{M[(X-M[X])^2] + 2(M[X]-c)M[(X-M[X])] + (M[X]-c)^2} =$$
$$= \sqrt{M[(X-M[X])^2] + 2(M[X]-c)(M[X]-M[X]) + (M[X]-c)^2} =$$
$$= \sqrt{M[(X-M[X])^2] + (M[X]-c)^2} \geq \sqrt{M[(X-M[X])^2]} = \rho(X,M[X]).$$

Отже, $\rho(X,c) \geq \rho(X,M[X])$, причому рівність має місце тоді й тільки тоді, коли $c = M[X]$.

Таким чином, *стала* $M[X]$ *серед усіх сталих є найближчою до випадкової величини* X (якщо відстань вимірюється за формулою (2)). Саме тому математичне сподівання $M[X]$, середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$ і дисперсія $D[X] = \sigma^2[X] = M[(X-M[X]\}^2]$ є важливими характеристиками розподілу ймовірностей на множині значень випадкової величини X: *якщо дисперсія мала, то спостережені значення випадкової величини* X *мало відхиляються від її математичного сподівання* $M[X]$. Це відхилення вимірюється рівністю (2). З рівностей (1) і (2) легко дістати *нерівність Чебишова:* $P(\{E \in \Omega : |X(E) - M[X]| \geq \varepsilon\}) \leq \dfrac{D[X]}{\varepsilon^2}$, з якої випливає, що *коли дисперсія* $D[X]$ *досить мала, то малоймовірно, що спостережені значення випадкової величини* X *значно відхиляються від її математичного сподівання*, причому тут відхилення вимірюється звичайною евклідовою відстанню між числами $X(E)$ і $M[X]$, тобто модулем різниці цих чисел.

Зауважимо, що множина L всеможливих простих випадкових величин (стосовно (Ω, S, P)) є не тільки метричним простором з відстанню (2), а й водночас:

- *лінійним (*або *векторним) простором*, тобто таким, що для будь-яких елементів (векторів) $x \in L$ і $y \in L$ та чисел α існують суми $x + y \in L$ і добутки $\alpha x \in L$, причому виконуються наступні властивості:

1) $x + y = y + x$ *(комутативність суми);*

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(асоціативність суми);*

3) $x + \theta = x$ для деякого елемента (вектора) $\theta \in L$, який називається *нулем* простору L (*існування нуля);*

4) для кожного $x \in L$ існує *елемент (вектор)* $(-x) \in L$ *– протилежний до* x, для якого $(x + (-x)) = 0$ *(існування протилежного елемента);*

5) $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$ *(асоціативність добутку);*

6) $1 \cdot x = x$ *(множення на одиницю);*

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ і $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(дистрибутивність);*

- *нормованим простором*, тобто для будь-якого вектора (елемента) $x \in L$ існує його *норма* $\| x \|$ (узагальнення поняття модуля числа), що задовольняє властивості:

1) $\| x \| \geq 0$ *(невід'ємність норми);*

2) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(рівність нулеві норми);*

3) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$ *(винесення сталого множника за знак норми);*

4) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(нерівність трикутника для норми);*

- *евклідовим простором* (дійсним), тобто для будь-яких векторів $x \in L$ і $y \in L$ існує їх скалярний добуток $(x \cdot y)$, що задовольняє властивості:

1) $(x \cdot x) \geq 0$ *(невід'ємність скалярного добутку* $(x \cdot x)$*);*

2) $(x \cdot x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ *(рівність нулеві скалярного добутку* $(x \cdot x)$*);*

3) $(y \cdot x) = (x \cdot y)$ *(симетричність скалярного добутку);*

4) $(\alpha x \cdot y) = \alpha(x \cdot y)$ *(винесення сталого множника за знак скалярного добутку);*

5) $((x+y)\cdot z)=(x\cdot z)+(y\cdot z)$ *(дистрибутивність).*

При цьому сума випадкових величин $X+Y$ і добуток αX, де α – дійсне число, визначаються природним чином: $Z=X+Y$ означає $Z(E)=X(E)+Y(E)$, а $Z=\alpha X$ означає $Z(E)=\alpha\cdot X(E)$, $E\in\Omega$. *Норма випадкової величини* X визначається рівністю $\|X\|=\sqrt{M[X^2]}$, а *скалярний добуток величин* X і Y – рівністю $(X\cdot Y)=M[X\cdot Y]$. *Нульовим елементом простору* L вище названо випадкову величину X, значення якої майже напевно дорівнює нулеві.

З нерівності Коші-Буняковського випливає, що $(X\cdot Y)\le\|X\|\cdot\|Y\|$, тому для ненульових векторів X і Y відношення $\dfrac{(X\cdot Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|}$ набуває значень лише з відрізка $[-1;1]$. Це відношення називають *косинусом кута між векторами* X і Y та позначають $\cos(\overset{\wedge}{XY})$. Отже, правильна рівність $(X\cdot Y)=\|X\|\cdot\|Y\|\cdot\cos(\overset{\wedge}{XY})$ (частинним випадком якої є рівність $\vec{x}\cdot\vec{y}=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\overset{\wedge}{\vec{x}\vec{y}})$, що має місце для векторів на площині і у просторі, які вивчаються у шкільному курсі математики).

9. Класифікація точок метричного простору стосовно даної множини. У шкільному курсі математики широко використовуються поняття внутрішньої, зовнішньої і межової точок фігури, межі фігури, замкненої і відкритої кулі, околу точки, обмеженої фігури, області, зв’язаної фігури, тіла тощо. При цьому ці поняття у кращому випадку розтлумачують на прикладах і часто таке тлумачення виявляється значно складнішим, ніж введення строгих означень.

Після опанування поняття відстані між точками даної множини (метричного простору) цілком природно вводяться поняття кулі, сфери та замкненої і відкритої кулі.

Кулею (або відкритою кулею) з центром у точці $a \in M$ і радіусом $r \in (0; +\infty)$ у даному метричному просторі (M, ρ) називають множину $K(a,r)$ усіх точок x множини M, відстань яких від точки a є меншою за r, тобто $K(a,r) = \{x \in M : \rho(a,x) < r\}$.

Аналогічно, *сферою* з центром у точці a і радіусом r називають множину $S(a,r) = \{x \in M : \rho(a,x) = r\}$, а *замкненою кулею* називають множину $\overline{K}(a,r) = K(a,r) \cup S(a,r)$ – об'єднання кулі і сфери з однаковими центрами і радіусами.

У просторі R^1: куля $K(a,r) = (a-r; a+r)$ – інтервал довжиною $2r$ і з центром у точці a, сфера $S(a,r) = \{a-r, a+r\}$ складається з двох точок, замкнена куля $\overline{K}(a,r) = [a-r; a+r]$ – відрізок.

У просторі R^2: куля $K(a,r) = \{(x,y) \in R^2 : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 < r^2\}$ – відкритий круг з центром у точці $a = (a_x, a_y)$ і радіусом $r > 0$, замкнена куля $\overline{K}(a,r) = \{(x,y) \in R^2 : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 \le r^2\}$ – звичайний замкнений круг; сфера $S(a,r) = \{(x,y) \in R^2 : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 = r^2\}$ – звичайне коло.

У просторі R^3: куля

$K(a,r) = \{(x,y,z) \in R^3 : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2 < r^2\}$ – звичайна відкрита куля, сфера

$S(a,r) = \{(x,y,z) \in R^3 : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2 = r^2\}$ – звичайна сфера; замкнена куля

$\overline{K}(a,r) = \{(x,y,z) : (x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2 \le r^2\}$ – звичайна замкнена куля.

Оскільки точками метричних просторів можуть бути найрізноманітніші об'єкти, то й кулі і сфери у таких просторах за своїм виглядом суттєво відрізняються від виглядів, звичних для більшості людей (для деяких метричних просторів може бути, що якась куля більшого радіуса є частиною кулі меншого радіуса: наприклад, якщо $M=[0;+\infty)\subset R^1$, а $\rho(x,y)=|x-y|$, то $\overline{K}(0,3)=[0,3]\subset\overline{K}(2,2)=[0,4]$). Не зважаючи на це, характеристичні властивості (та й багато інших властивостей) кулі і сфери такі самі, як і властивості звичайних куль і сфер. Це свідчить про те, що математичні моделі, пов'язані з поняттям кулі та сфери, мають значно ширші застосування, ніж це здається на перший погляд.

Кулю з центром у точці a і радіусом r називають ще й *околом* або r*-околом* точки a і позначають $O(a,r)$.

Нехай A – довільна фіксована множина з метричного простору (M,ρ). Тоді фіксовану точку x_0 цього простору називають:

- *внутрішньою точкою множини* A, якщо деякий окіл точки x_0 лежить цілком в A, тобто $\exists r>0: O(x_0,r)\subset A$; множину усіх таких точок називають *внутрішністю множини* A;
- *зовнішньою точкою множини* A, якщо деякий окіл точки x_0 не містить жодної точки з A тобто $\exists r>0: O(x_0,r)\cap A=\varnothing$; множину усіх таких точок називають *зовнішністю множини* A;
- *межовою точкою множини* A, якщо будь-який окіл точки x_0 містить як точки із A, так і точки, що не належать A, тобто $\forall r>0\;\; O(x_0,r)\cap A\neq\varnothing$ і $\mathrm{O}(x_0,r)\cap C_M A\neq\varnothing$; множину усіх таких точок називають *межею множини* A;
- *ізольованою точкою множини* A, якщо в деякому околі точки x_0 міститься лише одна точка з A, а саме x_0, тобто $\exists r>0: O(x_0,r)\cap A=\{x_0\}$.

Так, у довільному метричному просторі (M,ρ) кожна точка кулі $K(a,r)$ є її внутрішньою точкою, межу цієї кулі складають точки сфери $S(a,r)$, зовнішністю є множина $M-\overline{K}(a,r)$, ізольованих точок у кулі $K(a,r)$

нема, коли $(M,\rho)=R^n$ для деякого $n\in N$, проте для деяких метричних просторів кожна точка кулі $K(a,r)$ є її ізольованою точкою (див., наприклад, [7, с. 32]).

Множину A називають:

- *відкритою*, якщо вона не містить жодної своєї межової точки (або усі точки якої є внутрішніми для неї);
- *замкненою*, якщо вона містить усі свої межові точки.

Так, куля є відкритою множиною, а замкнена куля є замкненою множиною у довільному метричному просторі; інтервал $(0;1)$ і відрізок $[0;1]$ є відповідно відкритою і замкненою множиною у просторі R^1, а піввідрізок $[0;1)$ і півінтервал $(0;1]$ не є ані відкритою, ані замкненою множиною у просторі R^1.

Множину A називають *обмеженою* у метричному просторі (M,ρ), якщо вона міститься у деякій кулі скінченного радіуса. В іншому разі множину A називають *необмеженою*.

Так, у просторі R^2 кожен многокутник, кожне коло і кожен круг є обмеженими фігурами, а кожна пряма і зовнішня частина кожної обмеженої множини є необмеженими фігурами.

Іноді у шкільних підручниках плутають поняття «*скінченна*» та «*обмежена*» множина і «*нескінченна*»та «*необмежена*» [8, с. 102].

Скінченна множина – це та, кількість точок у якої скінченна. Кожна скінченна множина з довільного метричного простору (M,ρ) обов'язково обмежена у цьому просторі, проте не навпаки. Наприклад, відрізок $[0;1]$ – обмежена множина у просторі R^1, проте нескінченна.

Якщо множина необмежена, то вона обов'язково нескінченна, проте не навпаки.

Кожен метричний простір (M,ρ), що зустрічається у шкільному курсі математики, є водночас і лінійним простором. У таких просторах для довільних $a \in M$, $b \in M$ можна ввести поняття напрямленого *відрізка* $[a;b] = \{x : x = (1-t)a + tb,\ t \in [0;1],\ a \in M,\ b \in M$, і *ламаної* $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$ як об'єднання відрізків $[a_k; a_{k+1}]$, $k \in \overline{1,(n-1)}$, тобто $\overline{a_1 a_2 ... a_n} = \bigcup_{k=1}^{n-1} [a_k; a_{k+1}]$.

Областю (на площині R^2, у просторі R^3 чи у довільному лінійному метричному просторі (M,ρ)) називають таку відкриту множину G, будь-які дві точки якої можна сполучити ламаною, що цілком міститься у G.

Замкненою областю $\overline{G}$ називають об'єднання області G з її межею. Множину, що є областю або замкненою областю, називають неперервною множиною.

Замкнену область $\overline{G}$ називають *компактною* областю або *тілом*, якщо вона є обмеженою.

Так, будь-яка куля $K(a,r)$ (в R^1, R^2 чи R^3) є областю і неперервною множиною, замкнена куля $\overline{K}(a,r)$ є і замкненою, і компактною областю (тілом), і неперервною множиною, а об'єднання двох куль (замкнених куль) без спільних точок не є ні областю, ні тілом, неперервною множиною. Будь-який многогранник, конус і циліндр є тілом, а об'єднання двох тіл не обов'язково є тілом і тому вводити поняття об'єму лише геометричного тіла [8, с. 157] недоцільно, оскільки тоді не зрозуміло, чи існують об'єми фігур, що не є тілами.

10. Висновки. Курс математики загальноосвітніх шкіл України відповідає рівню розвитку математичної науки 150-200 річної давнини. Для більшості випускників, які у подальшому житті матимуть справу з математикою хіба що на побутовому рівні, такий рівень математичної освіти цілком достатній. Разом з тим значна кількість випускників у своєму подальшому житті змушена опановувати і застосовувати у професійній діяльності математичні моделі, що відповідають сучасному розвитку математичної науки. Тому вельми доцільно, щоб при вивченні шкільного курсу математики такі учні мали можливість діставати уявлення про сучасний розвиток математичної науки принаймні у процесі вивчення традиційних понять і фактів, враховуючи їх сучасний зміст, порівнюючи його з тим змістом, який було закладено у ці поняття і факти при їх виникненні 100, 200 чи 2000 років тому.

Література

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука,1972. – 496 с.
2. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
3. Михалін Г. О., Дюженкова Л.І. Елементи теорії множин і теорії чисел. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2001. – 128 с.
4. Куратовський К., Мостовский А. Теорія множеств. – М.: Мир, 1970. – 416с.
5. Келли Д.Л. Общая топология. – М.: Наука. – 432 с.
6. Слєдзинський І.Ф., Тесленко І.Ф. Метричні простори в шкільному курсі математики. – К.: Радянська школа, 1978. – 110 с.
7. Жалдак М. І., Михалін Г.О., Деканов С.Я Математичний аналіз. Функції багатьох змінних.-К.: НПУ ім.М.П.Драгоманова, 2007. – 430 с.
8. Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г. Геометрія 10-11. – К.: Вежа, 2002. – 222 с.