

Лариса Букалова, Дарина Васильєва

ГРУПОВІ ФОРМИ РОБОТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У 6 КЛАСІ

Методичний посібник



Київ
Видавничий дім «Освіта»
2023

Про авторів

Лариса Букалова

П'ятиразовий лауреат стипендії Math for America Master Teacher Fellowship, «Учитель року – 2015» лауреат нагороди Excellence in Mathematics Education Award за сприяння викладанню математики як професії. Викладає математику в Bayside High School у Нью-Йорку, а також методику навчання математики в Touro University, Нью-Йорк.

Як офіційний представник Математичної Асоціації Америки (MAA) в Україні, проводить конкурси MAA в Україні для учнів та професійне навчання для вчителів. Є співавтором книг «Набір інструментів для вчителя математики» та «Практична алгебра: посібник для самонавчання».



Васильєва Дарина

Кандидат педагогічних наук, старший науковий співробітник відділу математичної та інформатичної освіти Інституту педагогіки Національної академії педагогічних наук України, автор підручників і посібників з математики.



Методичне видання

БУКАЛОВА Лариса Леонідівна
ВАСИЛЬЄВА Дарина Володимирівна

ГРУПОВІ ФОРМИ РОБОТИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ У 6 КЛАСІ

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп'ютерна верстка *Ю. П. Мирончик*

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.
Адреса видавництва: 04053, м. Київ, вул. Обсерваторна, 25
www.osvita-dim.com.ua

Г90 **Групові** форми роботи на уроках математики у 6 класі : Метод. посіб. / Л. Л. Букалова, Д. В. Васильєва. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2023. — 80 с. : іл.

ISBN 978-966-983-405-8 (ел.).

ISBN 978-966-983-405-8 (ел.)

© Букалова Л. Л., Васильєва Д. В., 2023
© Видавничий дім «Освіта», 2023

Зміст

Вступ	4
Розділ 1. Загальні положення.	5
1.1. Організаційні форми навчання	5
1.2. Кооперативне навчання	6
1.3. Переваги кооперативного навчання	7
1.4. Формування груп і пар.	10
1.5. Організація кооперативного навчання	13
1.5.1. Організація кооперативного навчання вчителем	13
1.5.2. Самоорганізація учнів у групі.	16
1.5.3. Організація простору в кабінеті	18
1.6. Оцінювання учнів.	20
Розділ 2. Приклади організації групової форми роботи у навчанні математики	22
2.1. Технології навчання з елементами дослідницької діяльності учнів	22
2.1.1. Дослідницька діяльність учнів.	22
2.1.2. Подумай-Пари-Поділись.	23
2.1.3. Помітити і запитати	26
2.1.4. Означення поняття	29
2.1.5. Пазли (мозаїка, ажурна пилка, джиг-со).	33
2.2. Приклади організації групової форми роботи для підведення підсумків, домашніх завдань, а також для уроків розв'язування задач та узагальнення і систематизації	40
2.2.1. Взаємне редагування робіт	40
2.2.2. Перевірка робіт за допомогою Google-документів	43
2.2.3. Картки-завдання	48
2.2.4. Цеглинки для доведення.	50
2.2.5. Килимок	54
2.2.6. Естафета	57
2.2.7. Передай папір	59
2.2.8. Станції	61
2.2.9. Центри	65
2.2.10. Завжди, іноді, ніколи	68
2.2.11. Прогулянка галереєю	69
2.2.12. Дидактичні ігри.	72
2.2.13. Поєднання декількох технологій	75
2.2.14. Використання Desmos для організації роботи в групах під час дистанційного навчання.	75
Висновки	78
Література	79

Вступ

Сучасні учні мають навчитися жити у світі, що стрімко змінюється, розуміти нові реалії, швидко орієнтуватися, навчатися, приймати самостійні рішення.

Нова українська школа покликана зацікавити учнів навчанням, зокрема навчанням математики, та підготувати їх до повноцінного життя в соціумі. З цією метою необхідно модернізувати структуру та зміст освіти на засадах компетентнісного підходу — спрямувати навчально-виховний процес на набуття учнями комплексу знань, умінь, досвіду, цінностей і ставлення, що можуть цілісно реалізовуватися на практиці.

У додатку 7 до Державного стандарту базової середньої освіти (Державний стандарт, 2020) описано компетентнісний потенціал математичної освітньої галузі за допомогою 11 ключових компетентностей. У розділі «Громадянські та соціальні компетентності» уточнено вміння та ставлення соціальної компетентності, яких мають набути учні в процесі навчання:

«Уміння:

- співпрацювати в команді для розв'язання проблеми;
- аргументувати та обстоювати власну позицію;
- приймати аргументовані рішення на основі аналізу всіх даних та формування причинно-наслідкових зв'язків проблемної ситуації;
- робити споживчий вибір послуг і товарів на основі чітких критеріїв, використовуючи математичні вміння.

Ставлення:

- ощадливість і поміркованість;
- рівне ставлення до інших осіб та відповідальність за спільну справу».

Тобто навчання математики має бути організовано так, щоб у його процесі розвивалися відповідні вміння і ставлення. Одним із варіантів сприяти формуванню наведених умінь і ставлень є впровадження кооперативного навчання.

Кооперативне навчання математики, якому присвячений цей посібник, передбачає взаємодію учнів у групах (парах) і дає можливість учням набути навичок роботи в команді, спілкування, вміння висловлюватися, критично мислити, обґрунтовувати, переконувати, вести дискусію, що дуже актуально для успішної людини в сучасному суспільстві.

Цей збірник складається з двох розділів. У першому подано теоретичні аспекти організації кооперативного навчання. А в другому докладно описано приклади реалізації деяких технологій кооперативного навчання, що можна використовувати в навчанні математики за різних умов та під час вивчення різних тем.

За допомогою розглянутих в цьому збірнику технологій можна організовувати парну і групову роботу на уроках різних типів (уроки засвоєння нових знань, урок формування умінь і навичок, урок узагальнення і систематизації тощо), позакласних заходах та під час виконання домашніх завдань. Надзвичайно продуктивними є описані технології групової роботи, що спонукають учнів до дослідницької діяльності.

Розділ 1

Загальні положення

1.1. Організаційні форми навчання за кількістю учнів

Форми організації навчання класифікують за різними критеріями: за кількістю учнів, за місцем навчання, за дидактичною метою тощо.

За кількістю учнів розрізняють такі організаційні форми навчання:

- індивідуальна;
- групова;
- колективна;
- масова.

Індивідуальна форма навчання передбачає взаємодію вчителя з одним учнем. Таке навчання може бути самостійним або з безпосередньою допомогою вчителя. Індивідуальна робота може досить часто використовуватися на уроках математики. Наприклад, учитель може пропонувати учню індивідуальне завдання, картку із задачами, самостійну роботу тощо.

Бажано, щоб у процесі навчання поступово зростав рівень самостійності учнів. На кожному уроці можна приділяти 5 хв для самостійної роботи учнів. Це може бути самостійна робота, спрямована на самостійне розв'язування визначених задач або розгляд окремої частини теоретичного матеріалу. Після закінчення самостійної роботи її результати слід обговорити і зробити висновки. Такий підхід надає можливість учням усвідомити переваги і недоліки своїх можливостей у навчанні, сприяє розвитку відповідальності й самостійному оцінюванню рівня знань учнями.

Групова форма передбачає роботу учнів у групах, їх взаємодію. Учитель опосередковано керує роботою кожного учня через завдання, які він пропонує групі та які регулюють діяльність учнів у ній. Крім того, групи (чи окремі учні) можуть отримувати консультацію вчителя, якщо самі її ініціюють.

Групова форма передбачає спільне планування навчальної діяльності учнями групи, вибір методів та засобів її здійснення.

Парну роботу можна розглядати підвидом групової форми роботи, де основна взаємодія відбувається між двома учнями.

За колективної форми клас виступає в ролі колективу, який має спільну мету і в якому розподілено обов'язки. Ця форма навчання передбачає роботу вчителя одразу з усіма учнями в єдиному темпі і з загальними завданнями. Для колективної роботи, крім традиційних, доцільно

пропонувати інтерактивні прийоми: «Знайди помилку», «Мікрофон», «Мозковий штурм» тощо.

Масові форми навчання передбачають одночасне охоплення великої кількості учасників. Наприклад, деякі онлайн-заходи можуть охоплювати широку зацікавлену аудиторію учнів незалежно від місця їх проживання (для зацікавлених учнів проводять синхронні онлайн-уроки чи створюють вікторини, онлайн-курси тощо). Масова форма навчання математики набуває особливої актуальності зі швидким поширенням інформатизації освіти й усього суспільства.

Кожна форма має свої переваги і недоліки. Важливо, щоб учитель міг організовувати навчання в різних формах і чергував індивідуальну, групову і колективну форми у своїй діяльності. Незважаючи на те, що цей посібник присвячено груповим формам роботи, це не означає, що така форма навчання має домінувати.

1.2. Кооперативне навчання та навчання у співпраці

У той час як деякі технології не приживаються в навчальному процесі, кооперативне навчання протягом останніх кількох десятиліть набуло великої популярності у всьому світі (Johnson & Johnson, 2009, p. 365).

Кооперативне навчання передбачає створення малих груп, у яких наявний або існує дух єдиної команди.

Кооперативна форма навчальної діяльності — це форма організації навчальної діяльності учнів у групах, яка ґрунтується на співробітництві усіх учасників задля розв'язання загального завдання та досягнення спільно визначеної мети (Пошетун, Пироженко, 2005, с. 33).

Просте об'єднання учнів у групи для вирішення рутинних проблем не означає, що завдання є частиною кооперативного навчання. За словами дослідників Девіда та Роджера Джонсонів (Johnson, Johnson, 2002, с. 96–97), успішне кооперативне навчання повинно мати п'ять основних елементів:

- **позитивна взаємозалежність:** учні бачать, що індивідуальний успіх пов'язаний з успіхом інших членів групи;
- **особиста відповідальність:** продуктивність кожного учня групи оцінюють, а результати групи залежать від результатів кожного учня цієї групи;
- **стимулювальна взаємодія:** учні заохочують одне одного досягати поставлених цілей групи;
- **соціальні навички:** учні повинні мати певний рівень соціальних навичок (довіра, спілкування, прийняття рішень і вирішення конфліктів), які дадуть змогу членам групи працювати разом;
- **групова рефлексія:** члени групи мають обмірковувати й обговорювати, чи добре команда працювала разом і що можна зробити для покращення її майбутньої роботи.

Деякі вчені розрізняють кооперативне навчання та навчальне співробітництво. На погляд Кеннета Браффі (Bruffee, 1995, с. 15), кооперативне навчання чітко визначає ролі для кожного учня та відображає ідеї, створені вчителем, а от навчальне співробітництво дає учням більше свободи визначати групові ролі та може приводити учнів до відповідей, які вчитель не в змозі передбачити.

Інші дослідники розрізняють кооперативне навчання та навчальне співробітництво відповідно до обсягу й типу виконаної індивідуальної роботи. Вони стверджують, що під час навчального співробітництва учні досягають індивідуального прогресу разом з іншими (наприклад, розв'язуючи завдання окремо, а потім порівнюючи роботу одне одного), а під час кооперативного навчання учні працюють окремо над частинами завдання (наприклад, самостійно пишуть частину групового пояснення) (Collaborative learning, 2017; Ferlazzo, 2016). Дослідження показують, що люди, які працюють над завданням спершу окремо, а потім разом, мають кращі результати, ніж ті, хто працюють одразу разом (Bernstein, Shore, & Lazer, 2018, с. 8737).

Інші науковці стверджують, що кооперативне навчання та навчальне співробітництво мають більше схожих рис, ніж відмінностей (Jacobs, 2014). Вони зазначають, що в обох ситуаціях учні працюють у групах під керівництвом учителя, щоб виконати конкретні завдання та поділитися своїми висновками з іншими групами. Обидві стратегії заохочують учнів навчатися шляхом дослідження і набувати знання в соціальному контексті (Rockwood, 1995, с. 8–9).

Намагатися визначити, як слід називати навчання — кооперативним чи у співробітництві, — не так корисно, як розмірковувати про рівень самостійності учнів та отримані ними компетентності під час такого роду діяльності. Доцільно періодично дозволяти учням самостійно визначати, як розподілити роботу в групі, і заохочувати їх працювати спочатку самостійно, а потім з усією групою. Надалі ми послуговуватимемося терміном «кооперативне навчання», оскільки його частіше використовують у дослідженнях про математичну освіту, але вживатимемо його для позначення широкого спектру кооперації і співробітництва.

1.3. Переваги кооперативного навчання

Наприкінці ХХ століття інтерактивні технології навчання набули широкого розповсюдження в теорії та практиці американських шкіл. Національним тренінговим центром (США, штат Мерілен) у 80-х роках було проведено дослідження, яке підтвердило ефективність використання інтерактивних технологій. Результати цих досліджень були відображені в схемі, що отримала назву «Піраміда навчання» (Мал. 1.3.1) (Тягай, 2015).



Мал. 1.3. Піраміда навчання

З піраміди видно, що найкращих результатів можна досягти за умови інтерактивного навчання, а саме під час впровадження: дискусійних груп, дидактичних ігор, навчання один одного.

Дійсно, усвідомлення і розуміння математичних понять і відношень надзвичайно покращується, коли ми співпрацюємо з іншими та обмінюємося думками. Коли учні конструктивно аналізують роботу один одного, вони можуть запропонувати ідею, вказати на проблеми та допомогти знайти помилки. У процесі такої діяльності розвиваються навички взаємонавчання, само- та взаємоконтролю. У математиці, як і в багатьох інших галузях, обговорення ідей є необхідним компонентом розуміння задачі та пошуку правильного й раціонального шляху її розв'язування.

Багаторічні дослідження показують, що кооперативне навчання може покращити навчальні досягнення учнів (Marzano, Pickering, & Pollock, 2001, с. 86; Ruffalo, 2018, с. 13; Artzt & Newman, 1997; De Lisi & Golbeck, 1999; VanAusdal, 2019; Сулова, 2016). Наведемо деякі висновки цих досліджень про кооперативне навчання:

- забезпечує високу загальну активність учнів у процесі навчання;
- підтримує конструктивізм, сприяє співпраці та надає учням можливість глибше розуміти матеріал. Коли учні працюють один з одним, вони часто можуть обговорювати свої ідеї, а отже, конкретизувати чи удосконалювати їх (Artzt & Newman, 1997, с. 2; De Lisi & Golbeck, 1999, с. 5);

- сприяє покращенню ставлення до математики — учні отримують впевненість у тому, що вони можуть удосконалюватися (що зменшує їх побоювання щодо математики) (Artzt & Newman, 1997, с. 3–4);
- дає учням можливість практикувати соціально-емоційні компетентності, наприклад підтримку та слухання одне одного (VanAusdal, 2019);
- допомагає підготувати учнів до життя після школи, де вони повинні вміти взаємодіяти та співпрацювати з іншими (De Lisi & Golbeck, 1999, с. 4);
- створює умови для формування толерантності в учнів (учні з різними здібностями та досягненнями працюють разом, що зменшує штучні бар'єри та упередження (Artzt & Newman, 1997, с. 3);
- розвиває критичне мислення, вміння аргументувати та переконувати

збільшує результативність у засвоєнні знань та формуванні вмінь (Johnson & Johnson, 1989);

- забезпечує своєчасний зворотний зв'язок, підтримку від однокласників (Суслова, 2016);
- заохочує до розкриття здібностей, талантів кожного учасника групи, реалізації себе як особистості (Суслова, 2016, с. 5).

Перехід від традиційного навчання до кооперативного є не комфортним для вчителів. Адже під час такого переходу змінюється їхня роль у класі, до чого вони ставляться з оstarхом. У вчителів можуть з'являтися упередження, що вони втрачають контроль, що учні спілкуються більше, ніж навчаються, що суттєво страждає дисципліна в класі.

О. Пометун стверджує, що задля вдалого впровадження кооперативного навчання має відбутися перехід від одних переконань до інших (табл.1.3) (Пометун, 2014).

Таблиця 1.3

Від переконань	До переконань
Гарний клас — це спокійний клас	Навчання породжує робочий шум
Дивись у власний зошит	Допоможи своєму партнеру (однокласнику) розв'язати це
Сидить тихо!	Озирнись і подивись, що роблять інші
Не розмовляйте — не намагайтеся обдурити мене!	Розмовляйте, щоб дізнатися більше

Успіх кооперативного навчання залежить від уміння вчителя добирати відповідні завдання, формувати групи, організовувати в них роботу, розподіляти свою увагу серед створених груп, оцінювати роботу груп тощо.

1.4. Формування груп і пар учнів

Важливою умовою вдалого впровадження кооперативного навчання є процес формування груп усередині класу.

Кількість груп і кількість учнів у групі залежить від:

- загальної кількості учнів у класі;
- виду запропонованого завдання та його складності (складніші завдання вимагають більшої кількості учнів у кожній групі);
- характеру й обсягу опрацьовуваних знань;
- кількості необхідних матеріалів;
- часу, відведеного на виконання (Пошетун, Гупан, 2017), (Hess, 2019).

У групі зазвичай має бути від двох (тоді називаємо таку групу парою) до шести учнів (Burns, 1990, с. 25; Slavin, 2014). За більшої кількості учнів у групі складно врахувати, яку саме роботу виконав кожний учень. Пари добре працюють для відносно невеликих завдань. А групи з 5–6 учнів часто є громіздкими, бо деяким учням може не вистачати роботи.

Об'єднання в групи може відбуватися за вказівкою вчителя або самими учнями.

Деякі способи об'єднання учнів у групи:

- за місцем розташуванням учнів у класній кімнаті;
- за заздалегідь написаним учителем списком;
- за результатами лічби відповідно до кількості груп (наприклад, якщо необхідно сформувати шість груп — пронумеруємо групи від 1 до 6 і запропонуємо учням класу розрахуватися на «перший», «другий», «третій», «четвертий», «п'ятий», «шостий»; кожен учень після розрахунку прямує до відповідного номера групи);
- за певними уподобаннями (улюблений колір, пора року тощо);
- за результатами жеребкування (наприклад, якщо необхідно розбити клас на сім груп — учитель може запропонувати учням не дивлячись витягнути картки, на яких буде намальована кольорова пляма одного із семи кольорів, і об'єднатися в групи учням, що витягли карти з плямами одного кольору, або учитель наосліп може витягувати певну кількість паличок, на яких написані імена учнів класу, і так об'єднати їх у групи тощо (мал. 1.4.1.). Замість паличок можна використовувати олівці (мал. 1.4.2);



Мал. 1.4.1



Мал. 1.4.2

- за бажанням учнів;
- вибір учителем лідерів, які вибирають учнів до своєї групи тощо.

Групи можуть бути *постійними* або *тимчасовими*. Учні, які знають, що їм доведеться працювати з тими самими учнями протягом певного часу, можуть бути більш мотивованими для ефективного спілкування та виконання завдань (Artzt & Newman, 1997, с. 6). Але бажано, щоб робота в групі не зводилася до роботи лише в постійних групах (наприклад, постійно в парі працюють учні, які сидять за однією партою). Доцільно, щоб учні в процесі кооперативного навчання здобули навички комунікації з різними учнями. Періодична зміна складу груп дає змогу вчителю корегувати деякі процеси на основі своїх спостережень за взаємодією учнів.

Групи можуть бути *однорівневі* або *різнорівневі*. Досить часто вчителі математики формують різнорівневі групи, змішуючи учнів з різними рівнями успішності, щоб вони легко допомагали один одному. Однак учні з вищим рівнем успішності можуть обурюватися, що постійно пояснюють матеріал іншим, і просто виконувати основну роботу самостійно, у той час як учні, які мають труднощі у навчанні, можуть розчаруватися через те, що не в змозі виконати завдання без допомоги. Розподіл ролей у групах може мінімізувати ці проблеми та дати змогу учням навчатися відповідно до їхнього рівня підготовки (Schriedewind & Davidson, 2000).

Рівень учнів може визначатися ситуативно. Так, після пояснення навчального матеріалу вчитель може розділити учнів на групи за допомогою вправи «Світлофор» (учні піднімають зелену картку, якщо їм все зрозуміло, жовту — якщо залишилися питання, червону — якщо нічого не зрозуміли). Учитель ділить учнів на групи так, щоб у кожній був хоча б один учень із зеленою карткою і один із червоною. Замість карток трьох кольорів можна використовувати трикутну піраміду з різними за кольором гранями або ж три паперових стаканчики трьох кольорів.

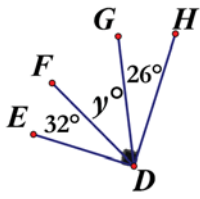
Іноді буває недостатньо різних рівнів успішності, щоб сформувати різнорівневі групи (наприклад, ми можемо мати невелику кількість учнів, рівень успішності яких значно відрізняється від рівня решти класу). У такому разі вчитель може об'єднати учнів в однорівневі групи і запропонувати їм однакові роботи, що містять завдання різних рівнів (від базового рівня до завдань, що потребують синтезу й аналізу). За таких умов кожна група вибирає завдання, які їй підсилю.

Наведемо приклад роботи, що містить завдання різного рівня і яку можна запропонувати учням 7 класу під час вивчення теми «Кути».

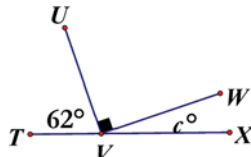
Приклад 1.4. Аркуш із завданнями на тему «Куты»

Знайди невідомі градусні міри кутів на рисунках 1–8

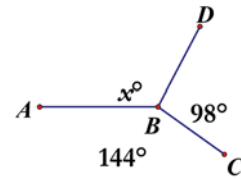
Рівень 1



1.

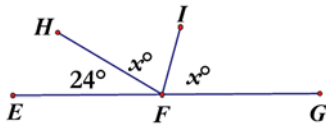


2.

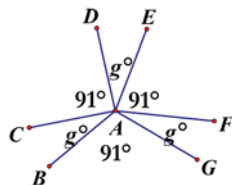


3.

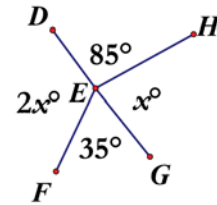
Рівень 2



4.

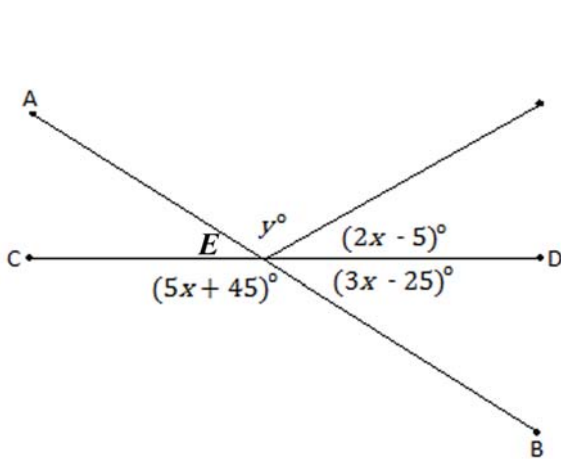


5.

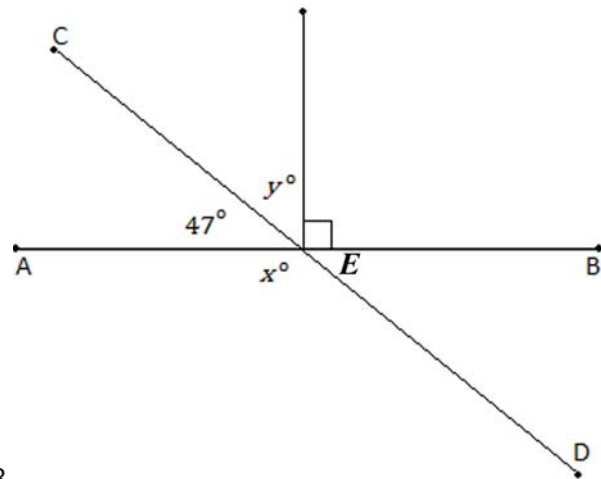


6.

Рівень 3

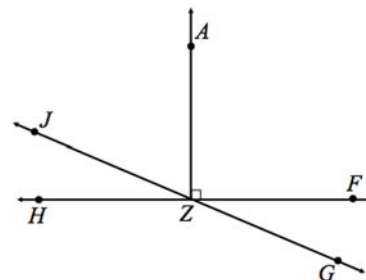


7.



8.

Рівень 4

На малюнку $AZ \perp HF$ і $\angle JZH = x$.1. Назви кут, що суміжний з $\angle HZJ$. Обґрунтуйте свою відповідь.2. Якими є кути $\angle FZG$ і $\angle JZH$? Обґрунтуйте свою відповідь.3. Знайди $\angle HZG$.

9.

Ідея полягає в тому, щоб УСІ групи учнів отримали однакові завдання та вибрали рівень, на якому їм зручно працювати. Якщо групи різних рівнів отримають різні завдання, то деякі учні можуть образитися і втратити мотивацію, бо їхнє бачення своїх можливостей не збігається з баченням учителя. Коли ж усі групи отримують однакову роботу і вимогу розв'язати будь-які п'ять завдань з неї — учні самостійно вибирають рівень і не відчують, що вчитель вважає їх недостатньо сильними.

Важливо враховувати, що учні в групі мають не лише виконати певне завдання, а й покращити комунікативні навички, тож учителю доцільно потурбуватися про позитивний емоційний клімат у групах.

1.5. Організація кооперативного навчання

1.5.1. Організація кооперативного навчання вчителем

Розглянемо, як доцільно організовувати кооперативне навчання, щоб спонукати учнів до співпраці і взаємодії в групі (парі).

Організація кооперативного навчання передбачає дотримання певних етапів:

1. Чітко напишіть інструкції та розмістіть їх на дошці та/або роздатковому матеріалі. Зазначте час на виконання завдання.
2. Запропонуйте учням самостійно прочитати завдання про себе.
3. Запропонуйте одному з учнів прочитати завдання вголос.
4. Запитайте, чи потрібні учням додаткові пояснення.
5. Запропонуйте учням об'єднатися в групи (пари) та виконати завдання. У разі потреби повідомте учням їхні ролі в групі.

Наприклад:

спікер (керівник) — організовує та координує роботу в групі, заохочує та спонукає до роботи, ознайомлює учасників групи із поставленим завданням, підводить підсумки, обирає доповідача;

секретар — чітко та коротко фіксує результати роботи;

посередник — стежить за часом, мотивує учнів до роботи;

доповідач — звітує про виконану роботу, чітко та зрозуміло висловлює думку групи, презентує результати групової діяльності тощо.

6. У разі потреби надайте допомогу групам (парам), що цього потребують, під час колективного виконання поставленого завдання.
7. Під час презентації результатів роботи прокоментуйте роботу кожної групи (пари).
8. Забезпечте систему оцінювання чи нагородження.
9. Організуйте рефлексію результатів і процесу групової взаємодії.

Щоб кооперативне навчання було ефективним, учні мають відчувати, що їхній вклад у роботу групи (пари) значний. Кожен учень повинен мати чітко визначену роль (наприклад, робити нотатки або розв'язувати підзадачу). Учитель не обов'язково вказує, яку саме роль відіграє кожен учень у групі (парі), бо учні самостійно можуть визначати ці ролі (іноді голосуванням), що дає їм певну автономію та змогу вибрати роль до вподоби.


Щоб у подальшому учні легше і швидше організовувалися, працюючи в групах (парах), доцільно їх ознайомити з різними технологіями навчання.



У більшості випадків учителі одразу зазначають, за допомогою якої технології учні будуть працювати в групах (парах), щоб полегшити їх взаємодію, тобто дають структуровані вказівки, що сприяють ефективній співпраці. Це зменшує ймовірність розмов, що не стосуються теми, або появи поведінки, що не сприяє виконанню завдання (Venables, 2015).

Визначені вчителем технології взаємодії між учнями іноді можуть обмежувати учнів. Але після набуття ними досвіду взаємодії за допомогою кожної технології групи (пари) можуть використовувати їх, щоб організувати окремих учнів, які відволікаються. Наведемо приклади декількох технологій із сайту Protocols_Handout (у перекладі) (https://www.gse.harvard.edu/sites/default/files/Protocols_Handout.pdf).

Таблиця 1.5.1

Протоколи для навчання в групах

Мета	Технології
Мозковий штурм для генерації нових ідей	<p>Станції (докладніше — у розділі 2.2.8) Учні об'єднуються в декілька груп (пар). У класній кімнаті організовано станції (локації) з різними завданнями. Групи (пари) по черзі відвідують різні станції та виконують завдання, що запропоновані на кожній із них.</p> <p>Відкритий простір Учні в групі (парі) самоорганізуються на основі заданої теми для обговорення (завдання).</p> <p>Навколо Учитель ставить перед класом відкрите запитання, що не має правильної чи єдиної відповіді. Учні працюють у групах (парах), записуючи свої думки з цього приводу. Учитель рандомно викликає учнів, щоб вони висловили свої думки. Інші учні закреслюють схожі відповіді, а потім деякі з них діляться своїми унікальними думками з рештою класу</p>
Зосередитись або дійти згоди щодо кількох ідей	<p>Техніка номінальної групи Учні в групі (парі) генерують, записують і обговорюють різні ідеї, а потім вибирають одну голосуванням.</p> <p>Фокусування Учні в групі (парі) генерують, записують і відстоюють різні ідеї, перш ніж вибрати одну голосуванням. На відміну від попередньої технології містить обов'язковий етап, під час якого учні можуть лише відстоювати кожну ідею</p>
Розподілити участь учнів або визначити черговість	<p>Карусель Одна група учнів утворює зовнішнє коло, а друга — внутрішнє, розміщуючись обличчям один до одного. Учні з двох різних кіл в парі обговорюють підказку чи завдання. Потім зовнішнє коло обертається так, щоб утворилися нові пари для наступного раунду.</p> <p>Акваріум Менша група учнів обговорює тему (завдання), а решта спостерігає за процесом або по черзі входить до меншої групи, щоб узяти участь в обговоренні.</p> <p> Цю технологію легко відтворити і на синхронному онлайн-уроці з використанням сервісів для відеоконференцій.</p> <p>Подумай-Пари-Поділися (докладніше — у розділі 2.1.2) Кожен учень має час для самостійних міркувань, перш ніж поділитися ними з іншим учнем у парі. Потім пари звітують про свої результати класу чи більшій групі.</p>

Виявлення різних поглядів на запропоновану проблему	<p>Чотири кути (докладніше — у розділі 2.2.10) Учні вибирають кут класної кімнати, щоб позначити свою позицію щодо істинності певного твердження (згоден, часткового згоден, частково не згоден, не згоден). Після цього вони беруть участь у дискусії.</p> <p>Пазли (ажурна пилка) (докладніше — у розділі 2.1.5) Учням групи доручають опрацювати різні матеріали (іноді заздалегідь). Спершу учні створюють нові «експертні групи» (їх учасники опрацьовували однакові матеріали) і обговорюють матеріали в межах цих груп. Потім повертаються до своїх початкових груп і в них розказують про те, що вже докладно вивчили й обговорили з іншими.</p> <p> Цю технологію легко відтворити і на синхронному онлайн-уроці з використанням сервісів для відеоконференцій, наприклад за допомогою функції розподілу учасників за різними залами</p>
Заохочення комунікації через письмо чи малювання	<p>Розмова крейдю (докладніше — у розділі 2.2.11) Учні в парі (групі) мовчки записують свої відповіді на завдання на аркушах та розміщують їх у класній кімнаті. Інші групи знайомляться з результатами робіт та можуть залишати питання чи коментарі до записів.</p> <p> Цю технологію легко відтворити і під час дистанційного навчання, наприклад за допомогою сервісу www.padlet.com або спільних онлайн-документів.</p> <p>Світове кафе Учні обговорюють задану тему (завдання) в малих групах за столами, пишучи або малюючи свої ідеї на паперовій «скатертині». Для кожного нового раунду змінюються учні за столом</p>
Прочитання та обговорення тексту	<p>Чотири запитання Група мовчки читає текст, роблячи примітки на полях аркушів, щоб відповісти на такі чотири запитання:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Яких припущень дотримується автор тексту? • З чим ви погоджуєтесь? • З чим ви б посперечалися? • Що ви запам'ятали? <p>Прикінцеве слово У групі один учень вибирає, що, на його думку, є основним у тексті (роботі), зачитує цей уривок. Інші учні по черзі дають зворотний зв'язок, а той, хто озвучував думку, завершує обговорення рефлексією.</p> <p>Сократівський семінар Учні обговорюють те, що автор намагався донести, використовуючи приклади з конкретного тексту. При цьому вони спираються на ідеї одне одного</p>
Обговорення даних або робіт	<p>Діалог на основі даних Учні в групі (парі) перевіряють дані або інші артефакти, проходячи чотири етапи: прогнозування, створення візуалізації, спостереження та узагальнення результатів.</p> <p>Аналіз робіт (докладніше — у розділі 2.2.1) Учні в групі (парі) перевіряють результати роботи окремих учнів, оцінюють їх, вносять корективи</p>
Отримати відгук або вирішити проблему-дилему	<p>Протокол консультації Один або кілька учнів представляють дилему або питання для обговорення в групі. Інші учні цієї групи обговорюють один з одним представлену дилему.</p> <p>Протокол налаштування Один або кілька учнів діляться результатом роботи, який обговорювали в групі. Інші учні цієї групи надають позитивні або негативні відгуки</p>

Докладніше деякі з цих технологій буде описано в розділі 2.



Поради вчителям

- *Не допомагайте учням, які ще не попросили допомоги в інших учасників групи.*
- *Ходіть по класу без олівця чи ручки.*
- *Забезпечте учнів засобами, необхідними для пояснень їхнім однокласникам.*
- *Навчайте учнів формулювати запитання.*
- *Навчайте учнів толерантно направляти інших.*
- *Завжди хваліть або журіть всю групу, а не окремого учня.*
- *Під час презентації результатів групи звертайте увагу на досягнення найслабших учнів у ній, пропонуйте їм пояснити певні етапи роботи або презентувати думку групи.*

На перших уроках учителю доцільно витратити значну частину часу на знайомство учнів з особливостями і нормами роботи в групах. Варто навчити їх чути однокласників, упроваджуючи правила культури спілкування, співпрацювати, домовляючись між собою та допомагаючи один одному, аналізувати проблемні ситуації, шукаючи різні шляхи їх вирішення. Вчителю необхідно звертати увагу учнів як на позитивний, так і на негативний досвід взаємодії в групах.



Поради учням

- *Успіхи кожного є успіхом команди, невдача кожного є невдачею команди.*
- *Не робіть за інших роботу в групі. Краще поясніть їм, як це зробити. За таких умов ви краще засвоїте матеріал і допоможете усвідомлено виконати роботу іншим.*
- *Якщо щось не зрозуміло — спершу зверніться по допомогу до учнів у вашій групі. Звертайтеся до вчителя тільки в тому разі, якщо вони не змогли допомогти.*

Бажано, щоб вчитель запропонував учням пробну взаємодію, після якої вони можуть скласти свої правила спілкування в групах (наприклад, говорити лаконічно, по черзі, за темою; обговорювати ідею, а не особистість тощо) та затвердити їх класом.

1.5.2. Самоорганізація учнів у групі

Для того щоб група досягла успіху, усі її члени повинні досягати навчальних цілей завдання. Окремі учні мають нести відповідальність за роботу групи (Slavin, 2014). Такий підхід може звести до мінімуму ймовірність ситуацій, коли одні члени групи виконують більшу частину роботи, а другі стають сторонніми спостерігачами. Крім того, учитель періодично може вибирати по одному учню з кожної групи, щоб він

пояснив її роботу, або під час презентації може просити кожного учня виконати одну частину завдання, щоб уся група могла разом зробити висновок на основі роботи кожного.

Важливо залучати учнів до здійснення самооцінювання та взаємооцінювання. Учень, який здатний чітко й ефективно оцінити себе та зробити певні висновки, стає самостійнішим. А взаємооцінювання сприяє набуттю учнями досвіду висловлювання конструктивних пропозицій чи зауважень та гідної реакції на зворотний зв'язок.

Самооцінювання і взаємооцінювання учнів сприяє:

- реалізації особистісно орієнтованому навчанню;
- розвитку їхніх ключових компетентностей;
- підвищенню їхньої мотивації;
- академічній цілісності.

Для полегшення здійснення учнями самоорганізації та самоконтролю можна запропонувати групі «Контрольний аркуш роботи в групах», що допомагатиме їм розподілити роботу між собою і потім здійснити самооцінювання чи взаємооцінювання.

Таблиця 1.5.2

Контрольний аркуш роботи в групах

ІМ'Я, ПРИЗВИЩЕ		КОНТРОЛЬНИЙ АРКУШ РОБОТИ В ГРУПАХ	
А		Розподіляє роботу порівну між учасниками групи та створює спільний документ	Виконує потрібну роботу, зосереджується
		Керує груповим часом, зосереджує групу	Шанобливо ставиться до інших
		Виконує свою частку роботи групи	Активно шукає або надає допомогу
Б		Ділиться екраном у підгрупі	Виконує потрібну роботу, зосереджується
		Виконує свою частку роботи групи	Шанобливо ставиться до інших
		Перевіряє роботу та допомагає А і В	Активно шукає або надає допомогу
В		Виконує свою частку роботи групи	Виконує потрібну роботу, зосереджується
		Перевіряє роботу і допомагає Б	Шанобливо ставиться до інших
		Перевіряє роботу і допомагає Г	Активно шукає або надає допомогу
Г		Виконує свою частку роботи групи	Виконує потрібну роботу, зосереджується
		Перевіряє роботу на А, Б, В	Шанобливо ставиться до інших
		Своєчасно здає виконану роботу	Активно шукає або надає допомогу

Робота в групі (парі) може перерости в конфлікт, конкуренцію, одноосібне виконання завдань або ж розмову на сторонню тему. Здійснення учнями самооцінювання та взаємооцінювання — ефективний інструмент уникнення конфлікту і конструктивний варіант вирішення ситуації.

Останній етап — рефлексія того, як відбувалася робота в групі (парі). Учні аналізують роботу своєї групи та отриманий результат, визначають сильні і слабкі сторони взаємодії. Вони можуть розмірковувати як про свою індивідуальну роботу (що можна зробити, щоб принести більше користі групі), так і про продуктивність всієї групи.

Складність цього етапу полягає в невмінні учнів озвучувати свої відчуття. Для полегшення процесу вчитель може запропонувати учням такі запитання:

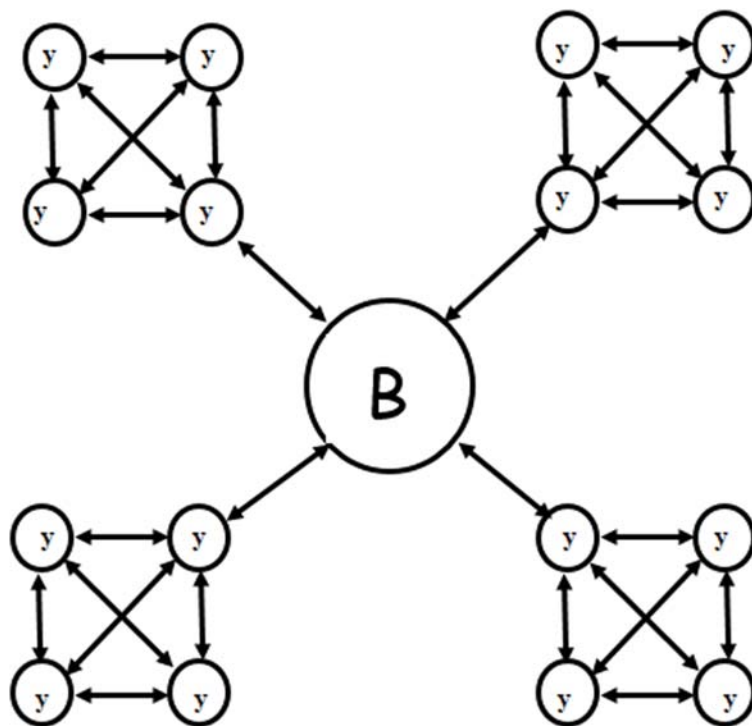
- Наскільки я уважно слухав інших і відповідав на їхні запитання чи коментарі?
- Як я сприяв досягненню мети групи?
- Що цікавого з математики я дізнався в процесі виконання завдання? (Artzt & Newman, 1997, с. 10–12.)
- Важко чи легко було працювати в групі?
- Хто відчував себе некомфортно і чому?
- Чи хтось керував роботою групи і як я до цього ставлюсь?
- Чи варто відмовчуватися під час обговорення і чому?
- Що відчуває людина, якій не дають висловитися?
- Що допомагає і що заважає роботі групи?
- Яка допомога вчителя була потрібна? (Пошетун, Гупан, 2017.)

Запитання можна змінювати для роздумів над груповою роботою. Наприклад, перше запитання можна змінити на таке: «Наскільки кожний у групі уважно слухав один одного та відповідав на запитання чи коментарі інших?».

1.5.3. Організація простору в кабінеті

Навчальний простір кабінету відіграє значну роль в організації кооперативного навчання. Взаємодія передбачає спілкування одного з одним. Щоб створити зони для спілкування в групах, доцільно змінювати розташування парт у класній кімнаті.

Наприклад, для класу, у якому навчаються (присутні) 16 учнів, може бути створено чотири зони зі шкільних парт для груп по 4 учні. Одиначні парти та наявність на їх ніжках коліс значно полегшує сам процес їх пересування. Якщо в класі немає можливості пересувати парти — можна організувати групову взаємодію чотирьох учнів, які сидять поруч (мал 1.5.3).



Мал. 1.5.3

Добре, якщо в класній кімнаті будуть окремі робочі зони в різних її кутах. Це дасть змогу швидко об'єднувати учнів у групи навколо таких робочих зон.

Оскільки обов'язковим етапом групової роботи є презентація результатів, добре, коли в учнів є вільний підхід до стін класної кімнати, де легко можна їх почепити.

Зміна звичного простору класу психологічно готує учнів до кооперативного навчання. Л. Виготський зазначав, що «очікування полегшує поведінку при настанні конкретної події» (Выготский, 1996, с.152). Внутрішня готовність учнів дає змогу на кожному наступному уроці скорочувати час, необхідний для занурення у форму і зміст кооперативного навчання.

1.6. Оцінювання учнів

Кооперативне навчання потребує декількох різних методів оцінювання (Artzt & Newman, 1997, с. 9). Коли вчитель оцінює роботу групи, то має дивитися не лише на кінцевий результат, а й на те, як члени групи працювали разом, щоб його досягти. Під час роботи учнів учитель ходить по класу не лише для того, щоб відповідати на їхні запитання, а й для того, щоб спостерігати за їхньою поведінкою і мати уявлення про вклад кожного в роботу групи.

Учитель може гнучко підходити до оцінювання під час кооперативного навчання. Можна, наприклад, оцінювати роботу кожного учня в

групі або всіх учасників групи одночасно залежно від презентованої групою роботи. Але завжди в групі доцільно провести самооцінювання, взаємооцінювання і рефлексію.

Хоча гарна поведінка — важлива характеристика командної роботи, однак не варто її вимагати під час проведення кооперативного навчання, а оцінювати її поготів. Адже це сприятиме формуванню в учнів уявлень про те, що вчитель більше зацікавлений у контролі над ними, ніж у тому, щоб вони вдало виконували завдання і досягали мети.

Щоб допомогти учням залишатися зосередженими, краще заохочувати їх поважати одне одного, правильно та вчасно виконувати індивідуальні завдання, толерантно взаємодіяти, намагатися дійти спільного висновку, наприклад за допомогою бланка, який можна використати для самооцінювання та взаємооцінювання.

Таблиця 1.6.

Критерії для оцінювання кооперативного навчання

КРИТЕРІЇ	НИЖЧЕ СТАНДАРТУ	ВІДПОВІДАЄ СТАНДАРТУ	ПЕРЕВИЩУЄ СТАНДАРТ
Участь	<i>Не виконує вчасно необхідних індивідуальних завдань. Не допомагає групі обговорювати ідеї та досягати спільної думки щодо висновку</i>	Своєчасно виконує необхідні індивідуальні завдання. Бере на себе <i>другорядну</i> роль, допомагаючи групі обговорити ідеї та досягти спільної думки щодо висновку	Своєчасно виконує необхідні індивідуальні завдання. Бере на себе <i>важливу</i> роль, допомагаючи групі обговорити ідеї та досягти спільної думки щодо висновку
Повага	<i>Рідко</i> ввічливо розмовляє і слухає інших	<i>Зазвичай</i> ввічливо розмовляє та слухає інших	<i>Завжди</i> ввічливо розмовляє та слухає інших. Допомагає вирішувати конфлікти між членами групи
Математика	Виконує завдання <i>зазвичай</i> з помилками. Демонструє <i>слабке</i> розуміння математичних понять і відношень	Виконує завдання <i>переважно правильно</i> , що допомагає групі досягнути мети. Демонструє <i>помірне</i> розуміння математичних понять та відношень, що лежать в основі уроку	Виконує завдання <i>завжди правильно</i> , що допомагає групі досягнути мети. Демонструє <i>глибоке</i> розуміння математичних понять та відношень, що лежать в основі уроку
Спілкування	<i>Нечітко</i> формулює ідеї математичною мовою	Чітко формулює ідеї, використовуючи поєднання <i>математичної та неформальної мови</i>	Чітко формулює ідеї, використовуючи <i>правильну математичну мову</i>

Кооперативне навчання дає змогу об'єднати зусилля учнів і водночас індивідуальний внесок кожного члена групи у виконання спільної роботи.

О. Пометун в Енциклопедії інтерактивного навчання зазначає: «Девіз кооперативного навчання — “колективна відповідальність, але індивідуальна звітність”». Тобто завдання, для виконання яких застосовано кооперативне навчання, вимагають, щоб учні відповідали один за одного, а відповідно мали змогу навчатися один в одного певних речей. Проте учні при цьому підзвітні індивідуально, тобто кожен із них має вивчити весь матеріал. З цього випливає, що вчитель має перевіряти оволодіння матеріалом кожним учнем (усно або письмово). Однак він може заохочувати також спільні здобутки й успіхи груп, слідкуючи за успішністю групи протягом усього часу й присуджуючи бали всім її членам, якщо підвищується загальна успішність групи (Пометун, 2007).



Розділ 2

Приклади організації групової форми роботи в навчанні математики

Кооперативне навчання може бути організовано на уроках математики різних типів: засвоєння нових знань, формування практичних умінь та навичок, застосування знань, умінь і навичок, узагальнення та систематизації знань тощо. Деякі технології більше підходять для організації дослідницької діяльності учнів, а деякі — для узагальнення, систематизації або підведення підсумків.

Пропонуємо розглянути приклади організації групової (парної) роботи за допомогою деяких описаних в першому розділі технологій.

2.1. Технології навчання з елементами дослідницької діяльності учнів

2.1.1. Дослідницьке навчання

Кожній людині від природи дарована схильність до пізнання і дослідження довкілля. Якщо учні отримуватимуть математичні знання, набуватимуть досвіду й оволодіватимуть вміннями і цінностями в процесі дослідницької діяльності, навчання для них буде природним процесом, що задовольнятиме їх цікавість.

Мета дослідницької діяльності — розвиток цікавості до навколишнього світу та математики, розвиток мислення, а також відтворення діяльності вченого-математика, направленої на вивчення нового об'єкта чи процесу.

Дослідницький метод навчання є основою компетентнісного підходу, який сьогодні є пріоритетним в освітній політиці.

Якщо вчителю вдасться стимулювати учнів до дослідницької діяльності системно, цікаво й цілеспрямовано, то він зможе прищепити їм смак до досліджень та озброїти їх методами науково-дослідної роботи. У цьому вчителю може допомогти кооперативне навчання.

Робота в групі із залученням дослідницької діяльності позитивно сприймається учнями й орієнтована на формування в них умінь працювати з різними джерелами інформації, складати таблиці, оформлю-

вати результати спостережень у письмовому вигляді, формувати думки у зовнішньому та внутрішньому мовленні, аналізувати, порівнювати та узагальнювати, здійснювати само- та взаємоконтроль і само- та взаємооцінку, проводити само- та взаємоаналіз. А також знайомить із методами наукового пізнання й етапами дослідницької діяльності, сприяє формуванню вміння виділяти проблеми, формувати припущення, планувати експериментальну діяльність, робити висновки.

2.1.2. Подумай-Пари-Поділись

Учитель пропонує учням запитання, дає їм спочатку час на самостійні роздуми, а потім — на обговорення відповіді у парах. Коли наданий час завершився, пари презентують свої відповіді решті учнів у класі (McTighe & Lyman, Jr., 1988, с. 19). Вони можуть озвучити свої відповіді або написати їх, наприклад, на міні-дошках, якщо є такі (учні пишуть на них відповіді, а потім піднімають ці міні-дошки).



Ця технологія практично не потребує попередньої додаткової підготовки. Як би не розташовувалися учні в класі, вони майже завжди можуть звернутися до партнера. Учень, який сидить сам, може звернутися до пари, щоб сформувати групу з трьох осіб. Крім того, учитель може дозволяти учням стояти, щоб трохи змінити буденність в класі.

«Подумай-Пари-Поділись» вимагає від учнів відповідальності, даючи їм усім шанс взяти участь у математичній бесіді в менш напруженому середовищі, а саме в парах. Ця технологія найкраще працює, коли ми встановлюємо короткий часовий ліміт — від 30 до 60 секунд (учитель не витрачає багато часу на уроці на такі завдання, але учні встигають їх виконати). Запитання для вправи «Подумай-Пари-Поділись» може вимагати короткої відповіді (наприклад, «Хто правий і чому?») або довшої (наприклад, «Яка помилка в цій роботі?»), але воно має бути досить вузьким, щоб пари могли дійти згоди менш ніж за хвилину.

Під час роботи учнів у парах учитель ходить по класу, щоб почути обговорення учнів та побачити, як вони взаємодіють один з одним.

Наведемо декілька завдань, які можна запропонувати учням для виконання в парі за технологією «Подумай-Пари-Поділись», із підручників для 5 і 6 класів авторського колективу Г. Бевз, В. Бевз, Д. Васильєва, Н. Владімірова (Бевз, 2022; Бевз, 2023, Ч.1; Бевз, 2023, Ч.2).

625. Яку помилку допущено? Поясніть на прикладах.

Число, яке має два дільники, називають простим.



1849. Довжина якого з відрізків — AB , MN і KP — є середнім арифметичним довжин двох інших?

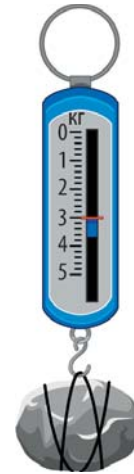


1676. Розгортки яких фігур зображено на малюнках?



10. Увечері температура повітря була $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ і йшов дощ. За ніч температура знизилася на $3\text{ }^{\circ}\text{C}$. Якою була температура вранці? Що сталося з калюжами? Чи був дощ?

41. Чому на шкалі кантара немає штрихів з від'ємними числами?



613. Пиріг, розрізаний на 16 частин, поділили порівну між 4 друзями. Яку частину пирога отримав кожен?



Як бачимо, для технології «*Подумай-Пари-Поділись*» чудово підходять завдання, що мають декілька відповідей, або такі, що потребують пояснення. Але найкраще пропонувати завдання на дослідження.

Типи завдань на дослідження:

- на встановлення істинності висловлювань;
- на встановлення відповідності;
- на встановлення існування та кількості заданих об'єктів;
- на порівняння і встановлення залежності;
- на встановлення умов;
- на дослідження взаємного розташування фігур;
- на знаходження геометричного місця точок тощо.

Наведемо декілька прикладів завдань на дослідження з підручників для 5 і 6 класів авторського колективу Г. Бевз, В. Бевз, Д. Васильєва, Н. Владімірова (Бевз, 2022; Бевз, 2023, Ч.1; Бевз, 2023, Ч.2), які доцільно буде запропонувати учням виконати за технологією «Подумай-Пари-Поділись».

786. Чи завжди від множення числа на правильний дріб число зменшується, а від множення на неправильний — збільшується? Наведіть приклади.

5

618. За якої умови дріб дорівнює своєму чисельнику? Наведіть приклад.

860. Чи правильно, що число збільшиться, якщо поділити його на правильний дріб? Наведіть приклади.

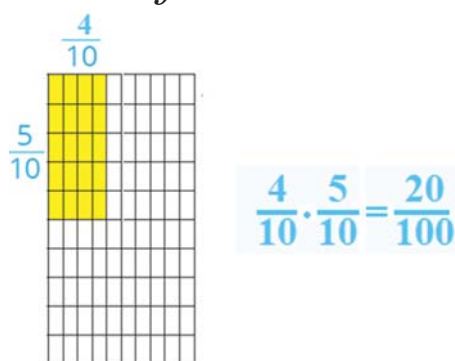
220. Чи означають одне й те саме вирази: «відрізок проходить через точки A і B » і «відрізок сполучає точки A і B »?

На основі цієї технології можна вводити і новий для учнів матеріал. Звісно, за таких умов на виконання завдання буде відведено більше часу. Наприклад, для того, щоб підвести учнів до правила множення звичайних дробів у 6 класі, можна запропонувати їм за технологією «Подумай-Пари-Поділись» виконати таке завдання (Бевз, 2023):

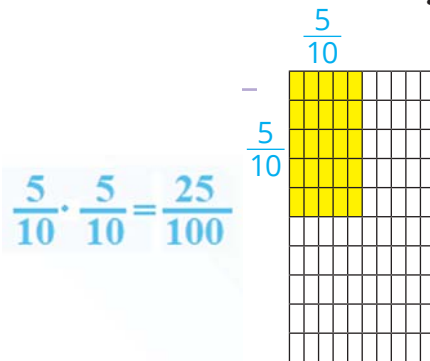
787. Побудуй прямокутник. Провівши паралельні відрізки, поділи кожную його сторону на десять частин. Зафарбуй певну частину кожної сторони та прямокутник, що ними утворений. Сформулюй правило множення звичайних дробів.

Спершу учні самостійно виконують це завдання. Навведемо приклади можливих учнівських робіт.

Робота учня 1



Робота учня 2




А на наступному етапі вони обговорюють свої записи та варіанти формулювання правила в парі. Перевіряють одне одного і приходять до спільного формулювання, яке потім презентують класу.

Приклади інших завдань можна побачити, натиснувши на лінк: <https://cutt.ly/VwrMuNQR> — або перейшовши за посиланням у QR-коді.



2.1.3. Помітити і запитати

Я помічаю .. 

Я запитую ... 

Технологія «*Помітити і запитати*» привчає учнів аналізувати, знаходити спільні й відмінні ознаки, помічати закономірності чи суперечності і формулювати запитання. Учитель пропонує учням завдання (наприклад, проблемну ситуацію, малюнок, текстову задачу, вираз або набір тверджень), а вони озвучують, що помітили та що їх дивує (які питання в них виникають) (Rumack & Huinker, 2019, с. 397). За потреби вчителі можуть надати додаткові підказки, як-от:

- Про які величини йдеться?
- Що можна полічити?
- Що можна виміряти?
- Як ще можна представити надану інформацію? Яку схему чи таблицю можна скласти?
- Які обчислення можна зробити?
- Які залежності помічаєте?
- Що спільне? Що відмінне?

Організація роботи учнів у групах за допомогою технології «*Помітити і запитати*» подібна до «*Подумай-Пари-Поділись*». Але можна додатково запропонувати учням такі інструкції:

1. Подумайте про завдання протягом хвилини.
2. Запишіть трьома пунктами, що цікавого ви помітили, і три запитання до них.
3. Зверніться до однокласника і коротко обговоріть або уточніть свої думки.
4. Унесіть зміни до своїх записів на основі обговорення.
5. Будьте готові поділитися своїми ідеями з рештою класу.

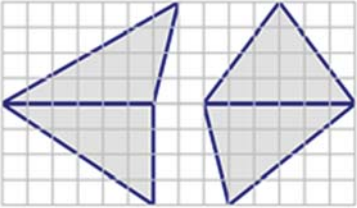
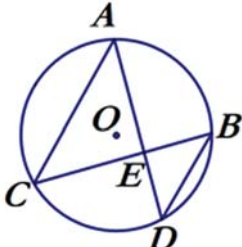
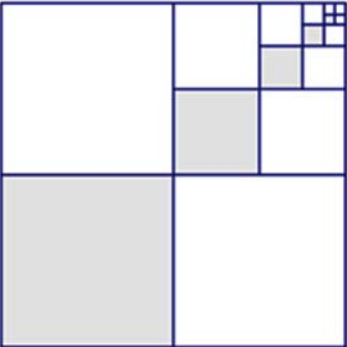
Можна запропонувати учням повторювати кроки 3 і 4, щоб дати їм більше можливостей працювати в парі. Після виконання учнями цих кроків учитель записує їхні висновки на дошці та використовує як відправну точку для наступної частини уроку.

У таблиці 2.1.3 наведено кілька прикладів завдань (перша колонка) і можливих відповідей учнів (друга і третя колонки).

Таблиця 2.1.3

Бланк для технології «Помітити і здивуватися» на різні теми

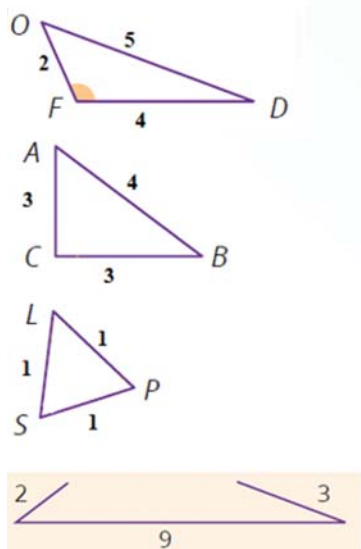
Завдання 1	Помічаю 2	Хочу запитати 3
ВЕЛИЧИНИ Ширина аркуша паперу 0,1 міліметра. 1 метр = 1000 міліметрів.	<i>Ширину аркуша паперу вимірюють у міліметрах.</i>	<i>Яка ширина аркуша паперу в метрах? Скільки аркушів паперу потрібно скласти, щоб досягти висоти київської телевежі?</i>
Зріст середньостатистичної української жінки становить 1,64 метра.	<i>Середньостатистична українська жінка набагато нижча за київську телевежу.</i>	<i>Скільки українських жінок приблизно довелося б поставити одна на одну, щоб досягти висоти київської телевежі?</i>

1	2	3
<p>Висота найвищої телевежі України, що розташована в Києві, становить 385 метрів.</p>	<p>Висоту людей і будівель вимірюється в метрах.</p>	
<p>ПЛОЩА ТРИКУТНИКА</p> 	<p>Трикутники мають спільну сторону.</p> <p>Спільні сторони мають однакові довжини.</p> <p>Трикутники мають однакову висоту.</p> <p>Трикутники нерівні.</p> <p>Трикутники мають однакові площі.</p>	<p>Трикутники з рівними висотами і основами мають рівні площі?</p> <p>Як зміниться площа, якщо змінити висоту, а основу залишити без змін?</p> <p>Яка залежність між площею трикутника та площею прямокутника?</p>
<p>ПОСЛІДОВНОСТІ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ...</p>	<p>Кожне число є сумою двох попередніх чисел.</p> <p>Не є арифметичною прогресією.</p> <p>Частка двох послідовних чисел приблизно 1,6.</p>	<p>Яке наступне число в послідовності?</p> <p>Якою формулою можна представити цю послідовність?</p> <p>Як змінилася б послідовність, якби перші два числа були різними?</p>
<p>ВПИСАНІ КУТИ</p> 	<p>$\angle ACE$ і $\angle ADB$ здаються рівними.</p> <p>$\angle CAE$ та $\angle BDE$ здаються рівними.</p> <p>$\triangle AEC$ і $\triangle DBE$ здаються подібними.</p>	<p>Чи можемо ми довести, що $\triangle AEC$ і $\triangle DBE$ подібні?</p> <p>Який зв'язок між градусними мірами $\angle ACE$ і $\angle ADB$?</p> <p>Що зміниться, якщо точку E перемістити в точку O?</p>
<p>СУМА ГЕОМЕТРИЧНОЇ ПРОГРЕСІЇ</p> 	<p>Деякі квадрати діляться на чотири рівні частини.</p> <p>Кожен сірий квадрат становить 0,25 більшого білого квадрата.</p> <p>На рисунку є чотири набори квадратів, які стають меншими.</p>	<p>Чи можна цю послідовність продовжувати нескінченно?</p> <p>Якщо візерунок із сірих квадратів продовжувати нескінченно, чи нескінченною є їх загальна площа?</p> <p>Яке відношення площ сірих квадратів до площ білих квадратів?</p> <p>Що зміниться, якщо замість квадратів використовувати трикутники?</p>

Використання технології «*Помітити і запитати*» допомагає учням зрозуміти контекст проблеми, пояснити її своїми словами, визначити, що потрібно знайти, і спрогнозувати відповідь. Ця технологія навчання також може допомогти учням генерувати запитання типу «що, якщо...?» під час дослідницьких робіт та навчальних проєктів.

Цю технологію можна використати і для підготовки учнів до сприйняття нового матеріалу теми. Наприклад, в 5 (або 7) класі на початку уроку, на якому буде вивчено нерівність трикутника, можна запропонувати групам наведене нижче завдання.

Завдання. Розгляньте рисунки. Запишіть, що ви помітили і які питання у вас виникли.



Я помічаю	Виникають питання

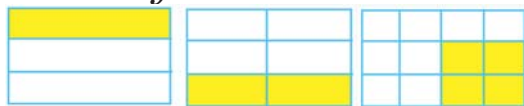
Учні спершу працюють самостійно, помічають, що не з будь-яких трьох відрізків можна утворити трикутник. У них можуть виникнути питання щодо умов існування трикутника. Після обговорення в парах учні презентують свої думки класу. Якщо жодна пара не змогла описати цих умови — учитель знайомить уже мотивованих учнів з новим матеріалом. Якщо ж учні у своїх гіпотезах були досить близькі — учитель допомагає їм сформулювати твердження і переконатися в його істинності.

Наведемо приклад ще одного завдання з посібника для 5 класу (Бевз, 2022; Бевз, 2023, Ч.1; Бевз, 2023, Ч.2), що допоможе наštтовхнути учнів на думку про те, що різні дроби можуть мати однакові значення, що є першою сходинкою до розуміння скорочення дробів.

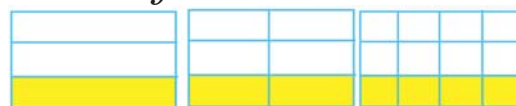
959. Побудуй три прямокутники зі сторонами 3 см і 4 см. На першому зафарбуй $\frac{1}{3}$, на другому — $\frac{2}{6}$, на третьому — $\frac{4}{12}$ частин прямокутника. Що ти помітив/помітила?

На першому етапі учні працюють окремо і самостійно виконують завдання. У всіх них можуть бути різні рисунки. Наведемо приклади можливих рисунків двох учнів.

Робота учня 1



Робота учня 2



Учні формулюють, що вони помітили і які питання в них виникли. У парах вони обговорюють сформульовані твердження й питання і можуть прийти до висновку, що значення заданих дробів рівні.



Поради вчителям

Технологія «*Помітити і запитати*» може допомогти учням, які застрягли на складному завданні, наприклад текстовій задачі на обчислення чи на доведення. Учитель може показати учням вимогу текстової задачі, але не показувати запитання. Запитавши учнів, що вони помітили і які запитання у них виникли, учитель може озвучити, що саме потрібно знайти в запропонованій задачі.

Переглянути ще декілька прикладів можна натиснувши на лінк: <https://cutt.ly/vwtusXOe> — або перейшовши за посиланням у QR-коді.



2.1.4. Означення поняття



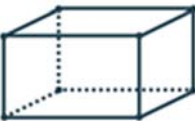

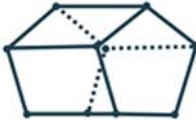

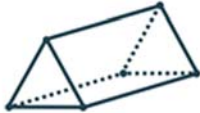

Доцільно під час уведення нового символу або терміна показувати учням необхідність його уведення, а також прикладне застосування. Наприклад, деякі терміни чи символи дають змогу спрощувати твердження чи їх записи (використання символу « $=$ » є зручнішим, ніж слова «дорівнює», а терміна «квадрат» — ніж «прямокутник із рівними сторонами»). Важливо показувати учням, де цей символ або термін використовують у житті. Наприклад, коли ми пояснюємо різницю між середнім арифметичним і медіаною вибірки, можемо навести приклад, чому уряди озвучують рівні доходи громадян, використовуючи саме медіану, а не середнє арифметичне вибірки громадян.

Деякі символи чи терміни є основними в темі і вимагають ґрунтовнішого обговорення під час їх уведення. Однією з технологій, що допомагає це забезпечити, є «*Означення поняття*» — індуктивний метод навчання, розроблений Дж. Брунером та його колегами (Bruner, Goodnow, & Austin, 1956). Учні намагаються означити поняття на основі запропонованих пар прикладів, у кожній із яких один є ілюстрацією поняття, а інший — ні. (Ferlazzo & Sypniewski, 2018, с. 123, 128; Gay, 2008, с. 219; Silver, Strong, & Perini, 2009).

Наведемо приклад серії карток, за допомогою яких організована технологія «*Означення поняття*» до уроку «Призми». Кожна картка містить пари геометричних фігур, одна з яких є призмою, а інша — ні. Учитель поступово показує по одній парі фігур на мультимедійній дошці. Якщо є фізичні моделі фігур — доцільно використати їх. Учні

аналізують кожну картку, формулюють означення, а потім уточнюють їх під час обговорення в парах чи малих групах. У результаті групи (пари) мають бути готові презентувати свої остаточні означення всьому класу.

Приклад 2.1.4.А. Картки до теми «Призма»

1. Сформулюйте означення призми на основі запропонованих рисунків	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це призма </div> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це НЕ призма </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;">   </div>
2. Уточніть своє означення призми на основі запропонованих рисунків	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це призма </div> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це НЕ призма </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;">   </div>
3. Уточніть своє означення призми на основі запропонованих рисунків	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це призма </div> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це НЕ призма </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;">   </div>
4. Сформулюйте своє остаточне означення призми на основі запропонованих рисунків	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це призма </div> <div style="text-align: center;"> <input checked="" type="checkbox"/> Це НЕ призма </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center; margin-top: 10px;">   </div>

Побачивши першу пару, учні можуть припустити, що призма — це куб. Після аналізу другої пари вони можуть внести зміни до означення і сказати, що призма — це прямокутний паралелепіпед. Після аналізу третьої пари вони можуть зауважити, що грані призми можуть бути не лише прямокутниками, а й п'ятикутниками. Після аналізу четвертої пари вони можуть сказати, що одна пара протилежних граней може бути трикутником, чотирикутником чи п'ятикутником, але решта є прямокутниками.

Після здійснення такого аналізу учні об'єднуються в пари, щоб написати остаточне означення призми на основі проведених аналізів кожним із них та презентувати його класу. Хоча формулювання, що отримують пари, можуть значно відрізнятися, але в цілому в них має бути такий сенс, що призма — це геометрична фігура з однією парою пара-

За таких умов доречно роздати учням інструкції, або розмістити їх на дошці.

Інструкція для учнів

1. Розгляньте 2 записи. Порівняйте їх. Лише один із них містить приклад поняття, яке потрібно означити. Запишіть початкову версію означення поняття. Поки НЕ діліться своїми результатами!
2. Розгляньте наступні 2 записи. Порівняйте їх. Лише один із них містить приклад поняття, яке потрібно означити. Уточніть або внесіть зміни до початкової версії означення цього поняття. Поки НЕ діліться своїми результатами!
3. Розгляньте наступні 2 записи. Порівняйте їх. Лише один із них містить приклад поняття, яке потрібно означити. Уточніть або внесіть зміни до попередньої версії означення цього поняття. Поки НЕ діліться своїми результатами!
4. Поділіться своїми результатами з напарником. Уточніть своє означення ще раз.
5. Поділіться результатом з класом.

Учням можна пропонувати також лише один бланк, що міститиме одразу декілька карток. За цих умов вони одразу аналізують всі надані дані і на їх основі конструюють означення поняття. Наведемо приклад такої картки.

Приклад 2.1.4.Г. Картка до теми «Взаємно прості числа»

Ці числа взаємно прості.

33 і 95

15 і 44

7 і 11

7 і 22

Ці числа не є взаємно простими.

4 і 16

20 і 25

14 і 22

15 і 42

Дай означення взаємно простих чисел.

?

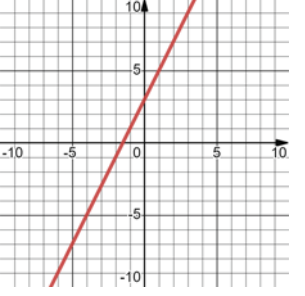
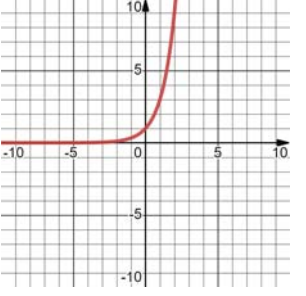
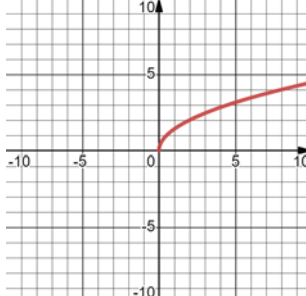
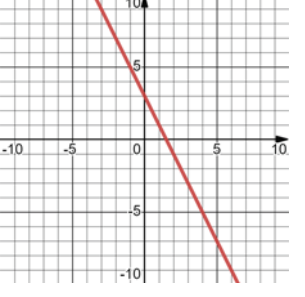
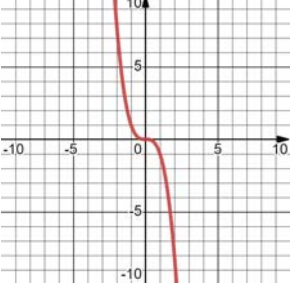
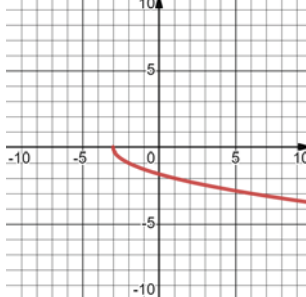
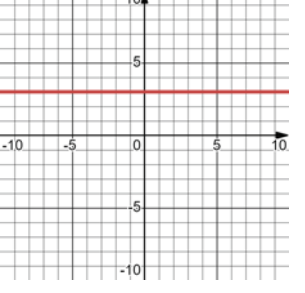
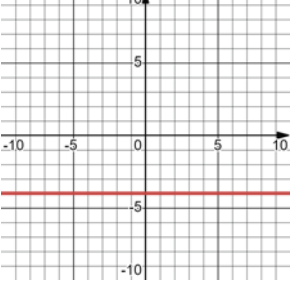
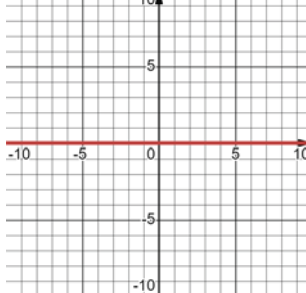
Крім того, учням можна пропонувати таблиці, на основі яких вони мають означити декілька понять.

Приклад 2.1.4.Г. Аркуш до теми «Означення зростаючої та спадної функції»

Інструкція для учнів

Використовуйте графіки для опису таких понять:

- зростаюча функція;
- спадна функція;
- стала функція.

Зростаюча функція			
Спадна функція			
Стала функція			

2.1.5. Пазли (мозаїка, ажурна пилка, джиг-со)

Ця технологія дає змогу учням разом опрацьовувати велику кількість інформації за короткий час.

Технологія «Пазли» зазвичай складається з чотирьох етапів:

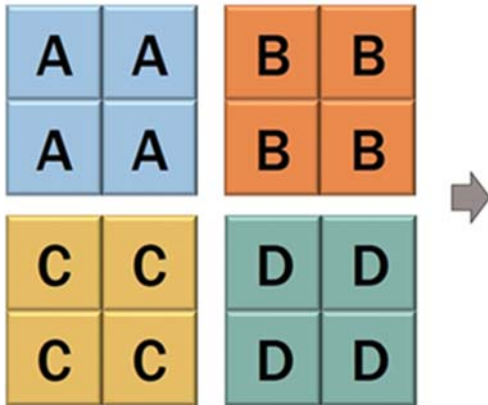
- Спершу учні об'єднуються (самостійно або за допомогою вчителя) у «домашні групи». Кожній із «домашніх груп» пропонують роботу, що складається із завдань (кількість завдань дорівнює кількості учнів у групі). Наприклад, якщо до «домашньої групи» входять 4 учні, то їй пропонують для опрацювання 4 різних завдання. Кожний учень — учасник «домашньої групи» вибирає одне із запропонованих завдань і самостійно детально його опрацьовує. Надалі він буде виступати в ролі експерта з цього завдання (Butman, 2014, с. 55).
- Далі учні формують тимчасові «експертні групи», до яких входять експерти з одного й того самого завдання. Учні «експертної групи» працюють разом, щоб обмінятися думками, зробити уточнення в своїх записах, узгодити розв'язання та відповідь, а також щоб отримати відгук щодо своєї попередньої самостійної роботи.
- Потім учні повертаються до своїх «домашніх груп» і розказують іншим трьом учням про результати своєї роботи. Учні «домашньої групи» слухають, обговорюють та записують почуте, роблять висновки, презентують свою роботу.

- Після цього результати робіт груп розвішують у класі, як у галереї, щоб усі учні класу могли ознайомитися з ними. Учні можуть залишати коментарі чи запитання на наліпках до представлених робіт, на які кожна група має відповісти.

Схематично роботу учнів у групі можна поділити на 2 раунди і представити у вигляді схеми.

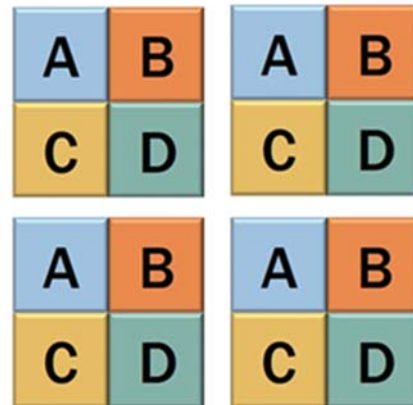
Раунд 1

Робота в «експертних групах»



Раунд 2

Робота в «домашніх групах»



Щоб групове обговорення було керованим, бажано, аби в групах було не більше 4 учнів.

Наведемо приклад, як за допомогою технології «Пазли» учні можуть прийти до формулювання правил додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками та додавання дробу до 1 і віднімання дробу від 1 в 5 класі.

На першому етапі учні об'єднуються по чотири особи в групи, їм пропонується чотири картки із завданнями. Кожен учень вибирає одну картку і працює над нею (розфарбовує відповідні квадратики в прямокутнику і намагається сформулювати правило виконання дій).

Зафарбуй моделі і розв'яжи завдання.
Сформулюй правило виконання таких дій

$$\frac{3}{8} + \frac{2}{8} =$$

Зафарбуй моделі і розв'яжи завдання.
Сформулюй правило виконання таких дій

$$\frac{3}{8} - \frac{2}{8} =$$

Зафарбуй моделі і розв'яжи завдання.
Сформулюй правило виконання таких дій

$$1 - \frac{2}{8} =$$

Зафарбуй моделі і розв'яжи завдання.
Сформулюй правило виконання таких дій

$$1 + \frac{2}{8} =$$

На наступному етапі учні утворюють «експертні групи». Наприклад, всі учні, які виконували завдання 1, за командою вчителя піднімаються, і вчитель залежно від кількості таких учнів або спрямовує їх в одну групу, або ділить на дві «експертні групи». Аналогічно учні, які виконували завдання 2, 3 і 4, також утворюють «експертні групи», у яких аналізують записи одне одного, обмінюються своїми гіпотезами, уточнюють формулювання, пояснюють тим, у кого виникли труднощі.

Після цього учні повертаються до «домашніх груп». Кожен учень має розказати те, що дослідив, іншим трьом учням, переконатися, що вони зрозуміли матеріал. Відповідно кожен буде «експертом» в одному завданні, але має зрозуміти, як виконувати інші три завдання.

Група обов'язково презентує свою роботу. Учитель підводить підсумки.

За такого підходу не вчитель розказував новий для учнів матеріал, а учні самостійно його пізнали, а отже, краще запам'ятали.

Під час уроків засвоєння нових знань, де певне поняття чи твердження уводиться шляхом дослідницької діяльності, досить часто учні мають розв'язати багато завдань, щоб побачити певну закономірність. Наприклад, виміряти кути чотирьох довільних трикутників та знайти суму градусних мір кутів кожного, щоб сформулювати гіпотезу про те, що градусна міра всіх кутів трикутника дорівнює 180 градусів. Звісно, це займає багато часу. Натомість можна застосувати технологію «Пазли» і запропонувати кожній «експертній групі» розглянути одне із завдань. Потім кожен учень у «домашній групі» ділиться результатами своєї роботи, інші учні з цієї групи помічають, що незалежно від виду трикутника сума градусних мір його кутів дорівнює 180 градусів, і презентують класу свої гіпотези (можуть записувати їх на дошці). Коли учні бачать на дошці всі відповіді одночасно, учитель проводить обговорення з класом, щоб виявити закономірність і сформулювати спільне твердження.

Наведемо приклад аркуша, який можна запропонувати учням на уроці засвоєння нових знань з теми «Теорема Безу». На ньому містяться запропоновані завдання на встановлення зв'язку між двочленом, на який ділиться многочлен, та остачою при діленні цього многочлена на двочлен. Після обговорення в «експертних групах» і повторного обговорення в «домашніх групах» учні повинні побачити, що многочлен $P(x)$, який ділиться на $(x - a)$, має остачу $P(a)$.

Приклад 2.1.5.А. Аркуш до теми «Теорема Безу»**ЧАСТИНА 1. Дослідження****Завдання**1. Задано $f(x) = x^2 + 5x + 1$.1) Знайди $f(1)$.2) Поділи $f(x)$ на $x - 1$.2. Задано $f(x) = x^2 + 4x - 18$.1) Знайди $f(3)$.2) Поділи $f(x)$ на $x - 3$.3. Задано $f(x) = x^2 + 2x + 2$.1) Знайди $f(2)$.2) Поділи $f(x)$ на $x - 2$.4. Задано $f(x) = x^2 - 8x + 15$.1) Знайди $f(5)$.2) Поділи $f(x)$ на $x - 5$.**ЧАСТИНА 2**





Проаналізуй відповіді до попередніх завдань та заповни пропуски у твердженні:

Теорема Безу: При діленні многочлена $P(x)$ на $x - \underline{\hspace{1cm}}$, де a є дійсним числом, остача дорівнює $P(\underline{\hspace{1cm}})$.

Навчання учнів за технологією «*Пазли*» можна організувати і під час синхронного онлайн-уроку. Для цього знадобиться підібрати додаткові матеріали, створити спільні документи для кожної групи учнів та скористатися функцією поділу на зали в сервісах відеозв'язку.

Наведемо приклад аркуша, що можна запропонувати групам на початку синхронного онлайн-уроку засвоєння нових знань з теми «Геометричні перетворення» в 9 класі. У такому разі кожна «експертна група» детально досліджує одне з геометричних перетворень, а потім всі учні в «домашніх групах» знайомляться з рештою перетворень. За результатами такої роботи учні мають візуально розпізнавати дзеркальну симетрію, поворот і паралельне перенесення та описувати їх властивості.

Приклад 2.1.5.Б. Аркуш до теми: «Властивості основних геометричних перетворень»

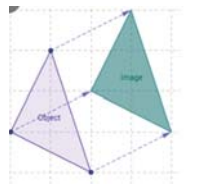
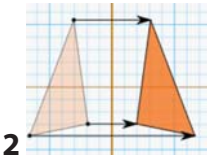
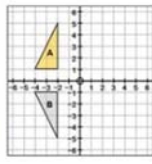
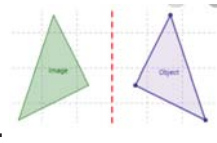
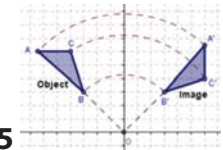
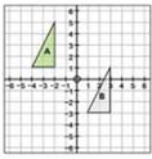
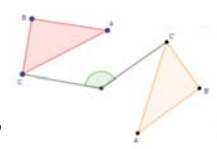
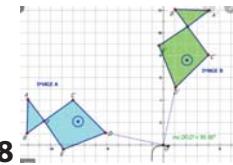
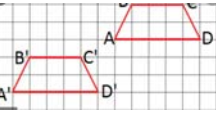
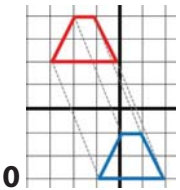
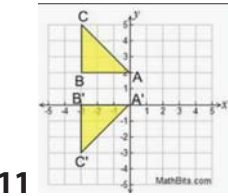
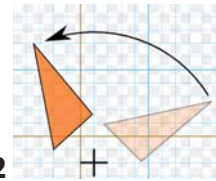
<p>Завдання 1</p> <p>Перегляньте відео: перейдіть за лінком: https://www.youtube.com/watch?v=2KfSdOhgMvk&t=65s — або за посиланням у QR-коді</p> <p>Поясніть, що робить мозаїки Ешера несхожими на інші картини. Як все це стосується математики?</p> <p>Мотивація</p> <p>Як дізнатися, які перетворення використані під час створення цих мозаїк? Які їх властивості?</p>		
Учень	<p>Запропоноване відео <i>(подані відео є англійськими, але в YouTube є можливість налаштувати українські субтитри)</i></p>	
A	<p>https://www.youtube.com/watch?v=1sxml4Y1K3s</p>	
B	<p>https://www.youtube.com/watch?v=gBGW7JbGcl8</p>	
C	<p>https://www.youtube.com/watch?v=A8fX2Drlpng</p>	
<p>Частина II (навчаємо одне одного)</p> <p>1. Запишіть стислий підсумок побаченого. 2. Навчіть свою групу тому, що ви дізналися. 3. Я відвідуватиму групи, щоб послухати ваші пояснення. Учні, які будуть виступати під час мого візиту, отримають додаткові бали.</p> <p>План відповідей учнів</p> <p><i>Поверот</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Означення. • Властивості. • Ілюстрація (ви можете використовувати зображення Google або одне із зображень, які подано в банку зображень). <p><i>Паралельне перенесення</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Означення. • Властивості. • Ілюстрація (ви можете використовувати зображення Google або одне із зображень, які подано в банку зображень). <p><i>Дзеркальна симетрія</i></p> <ul style="list-style-type: none"> • Означення. • Властивості. • Ілюстрація (ви можете використовувати зображення Google або одне із зображень, які подано в банку зображень). 		

Частина III (працюємо разом / підсумок)

Попрацюйте разом і розмістіть наведені нижче рисунки в потрібних комірках.

Поворот	Паралельне перенесення	Дзеркальна симетрія

Банк малюнків: <https://cutt.ly/3wrMmRmt>

Приклад 2.1.5.В. Графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ та їх властивості**Мета:** Навчитися будувати графіки та описувати властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$.**Цілі:** До кінця уроку учні зможуть:

- Будувати графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$.
- Визначати область визначення та область значень для кожної функції.
- За допомогою симетрії визначати парність функції.
- Дійти висновку, що $\sin(-x) = -\sin x$ і $\cos(-x) = \cos x$.

Частина I

Учні працюють у парах і виконують завдання А і В.

Мета завдання А — знайти графік функції $y = \sin x$.Мета завдання В — знайти графік функції $y = \cos x$.**Частина II**

Учні об'єднуються в групи по 4 особи, де 2 учні працювали над завданням А, а 2 — над завданням В. Вони порівнюють графіки й описують спільні та відмінні властивості функцій. Неформально доводять формули $\sin(-x) = -\sin x$ і $\cos(-x) = \cos x$, використовуючи означення парних і непарних функцій.

Матеріали: DESMOS<https://cutt.ly/NwrMQuSD>

Технологія «**Пазли**» чудово працює на уроках засвоєння нових знань та під час розв’язування громіздких або складних задач (наприклад, текстових задач, задач з серією запитань чи на доведення).

Зазвичай під час уроків розв’язування громіздких задач або задач на доведення вчитель, працюючи з учнями фронтально, встигає розв’язати лише 1–2 задачі. Але якщо запропонувати учням на таких уроках працювати за технологією «**Пазли**» — вони ознайомляться з 3–4 задачами (бо «домашня група» отримує саме стільки задач).


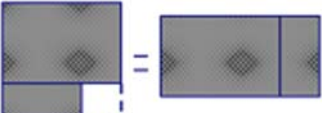


Наведемо приклад аркуша, що можна запропонувати учням для роботи над доведенням певних тверджень за технологією «**Пазли**».

Приклад 2.1.5.Г. Доведення тверджень

Частина 1. Об’єднайтеся в «домашні групи» по 4 особи. У своїх групах установіть відповідність між рисунками та запропонованими математичним твердженням. Кожен виберіть по одному рисунку. Переконайтеся, що всі в групі вибрали різні рисунки.

Частина 2. Об’єднайтеся в «експертні групи», тобто з учнями з інших груп, які вибрали такий самий рисунок. В «експертній групі» обговоріть рисунок та відповідне твердження і напишіть пояснення (доведення) до твердження математичною мовою.

Частина 3. Поділіться результатами своєї попередньої роботи з учнями з вашої «домашньої групи».

	Малюнок	Твердження та його доведення
		
		
		
		
	<p>Банк тверджень: В прямокутному трикутнику $a^2 + b^2 = c^2$. $S_{\text{трап}} = \frac{a + b}{2} \cdot h$. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Сума градусних мір кутів трикутника дорівнює 180 градусів.</p>	

Технологію «Пазли» ефективно можна застосовувати і в позаурочний час, особливо для проведення позакласних заходів або підготовки до них. Наприклад, у 6 класі до теми «Раціональні числа» можна запропонувати учням захід, присвячений історії математики. Учні до заходу (орієнтовно за тиждень до нього) об'єднуються в групи по 3 особи і отримують картки з такими завданнями:

Знайдіть інформацію з історії математики про виникнення і використання від'ємних чисел в **Індії**

Знайдіть інформацію з історії математики про виникнення і використання від'ємних чисел у **Європі**

Знайдіть інформацію з історії математики про виникнення і використання від'ємних чисел у **Китаї**

Кожний учень виконує пошукову роботу із запропонованої теми. За декілька днів до заходу учні «експертної групи» обговорюють знайдену інформацію, обмінюються нею, структурують і уточнюють її. А на самому заході одним із завдань буде робота учнів у «домашніх групах». Вони розказуватимуть один одному про історію від'ємних чисел в Індії, Європі та Китаї, а потім презентуватимуть результати своїх робіт.

2.2. Приклади організації групової форми роботи для підведення підсумків домашніх завдань, а також для уроків розв'язування задач та узагальнення і систематизації

Досить часто вчителі спостерігають, що учні важко озвучують свої думки. Вони можуть соромитися відповідати на уроці, у них може бути незв'язне мовлення, вони можуть недостатньо вільно володіти математичною мовою, щоб чітко формулювати своє питання, можуть не розуміти запитань вчителя або однокласників. Хоча трапляється й таке, що вчитель просто дає недостатньо часу для відповіді.

Технології групової роботи, що запропоновані в наступних частинах розділу, спрямовані на посилення обміну думками між учнями, логічно правильне викладення їх у письмовій формі, аналізування робіт одне одного, обґрунтування наявних помилок та надання пропозицій щодо їх виправлення.

2.2.1. Взаємне редагування робіт

Учні можуть проводити взаємооцінювання, надаючи зворотний зв'язок одне одному або виставляючи оцінку (Lui & Andrade, 2015). Дослідження показують, що зворотний зв'язок, наданий однолітками, який містить пропозиції кроків для більш успішної роботи, може покращити навчання учнів (Brookhart, 2017, с. 83; Min, 2006, с. 133).

Перш ніж дозволити учням виправляти роботи одне одного, вчителю необхідно встановити (або розробити) правила взаємодії та погодити їх з учнями. Наведені далі вказівки допоможуть учням бути продуктивнішими у взаємооцінюванні.

Правила взаємодії:

- *Уважно прочитайте виконане завдання.*
- *Зверніть увагу на те, що є хорошим у роботі, а також на те, що слід покращити.*
- *Будьте справедливим і толерантним.*
- *Коментуйте роботу, а не людину.*
- *Надайте конкретні пропозиції щодо покращення роботи (Brookhart, 2017, с. 84).*

«**Взаємне редагування робіт**» може бути організовано в різних формах. Наприклад, учням у парах можна запропонувати короткотривалу самостійну роботу у двох варіантах. Після того як учні виконають завдання своїх варіантів, вони обмінюються роботами, аналізують їх та оцінюють. Або ж учням у парах можна запропонувати виконувати один і той самий набір завдань, у такий спосіб організувавши для них самостійну роботу навчального характеру. Такий підхід дасть змогу зменшити час на перевірку робіт одне одного. Такого виду роботи запропоновані, наприклад, у підручнику «Математика», 6 клас (Бевз, 2023, Ч.1; Бевз, 2023, Ч.2). Наведемо приклад однієї з них. Цю роботу для взаємооцінювання можна запропонувати учням на початку 6 класу під час вивчення розділу «Цілі числа» після вивчення тем «Додатні і від'ємні цілі числа», «Координатна пряма», «Модуль числа», «Координатна площина».

СПРОБУЙ СВОЇ СИЛИ*

ДОДАТНІ І ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

Розв'яжи!

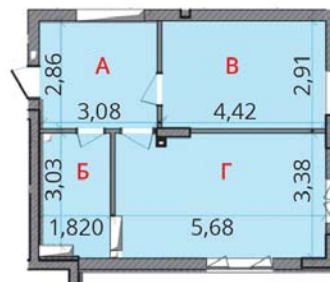
1. Які з чисел 17, -3, -8, -12, 47, 0, 12, 4, -16, 8:
а) додатні; б) від'ємні; в) ні додатні, ні від'ємні; г) протилежні?
2. Познач на координатній прямій усі цілі числа, які знаходяться між числами -4 і 3. Випиши протилежні числа.
3. Обчисли: а) $|-32| + |16| - |-8|$; б) $|-36| : |-18| + |-2| \cdot 14$.
4. На координатній площині побудуй прямокутник $ABCD$, якщо $A(-3; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; -5)$. Запиши координати точки D .
Знайди периметр побудованого прямокутника (в одиничних відрізках).
5. Розв'яжи рівняння: а) $|x| = 5$; б) $|x| = -8$; в) $|x| = 0$.

Для того щоб цей вид робіт дійсно сприяв взаємонавчанню, важливо, щоб учні не виправляли помилок одне одного, а наголошували на тому, де допущено помилку, і пояснювали, чому написане не є правильним. Бажано, щоб автор сам виправляв свої помилки за допомогою рекомендацій напарника.

Учні також можуть застосовувати «*Взаємне редагування робіт*» в групах під час розв'язування підзавдань одного завдання. За цих умов кожен учень у групі пише розв'язання однієї підзадачі на аркуші паперу. Потім учні обмінюються своїми записами і надають пропозиції щодо покращення. Усі члени групи мають прокоментувати виконання кожного підзавдання.

Наведемо приклад завдання для 5 класу, яке можна розбити на підзавдання і запропонувати для «*Взаємне редагування робіт*» в групах (Бевз, 2022).

1644. Обчисліть площу кожної кімнати, а потім знайдіть об'єм повітря в кожній кімнаті, якщо висота стелі 3 м.



Група з чотирьох учнів, виконуючи це завдання, має розподілити завдання між собою, тобто кожен має знайти площу окремої кімнати та об'єм повітря в ній, а потім надати зворотний зв'язок трьом іншим учасникам групи.

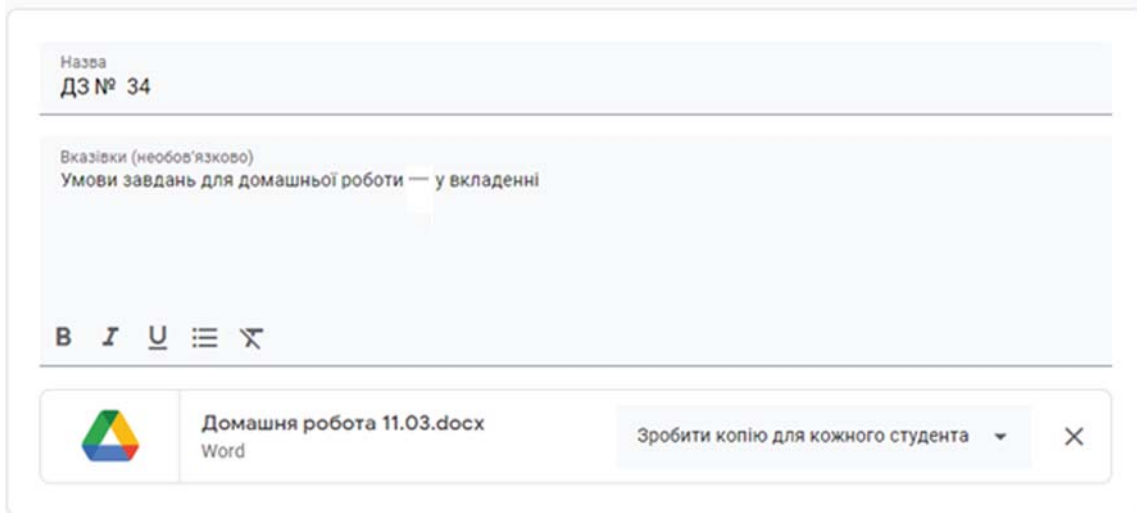
Учням у групі можна пропонувати послідовно працювати над розв'язуванням однієї задачі. За таких умов їм можуть бути запропоновані такі вказівки:

1. Прочитайте задачу, щоб отримати початкове розуміння. Запишіть думки чи запитання, якими ви хочете поділитися з групою.
2. Об'єднайтеся в групи. У групах поділіться думками та стратегіями щодо розв'язування задачі.
3. Виберіть кожний із чотирьох кольорів маркер або ручку. Запишіть один крок або речення з розв'язання, використовуючи маркер вибраного кольору. Передайте записи іншому учаснику із вашої групи, щоб він записав наступний крок і зредагував всі вже наявні. Це триває, доки розв'язання не буде завершено.
4. Свою роботу і її результати, група розміщує на дошці чи стіні. Учні класу аналізують всі роботи та коментують роботи інших груп.

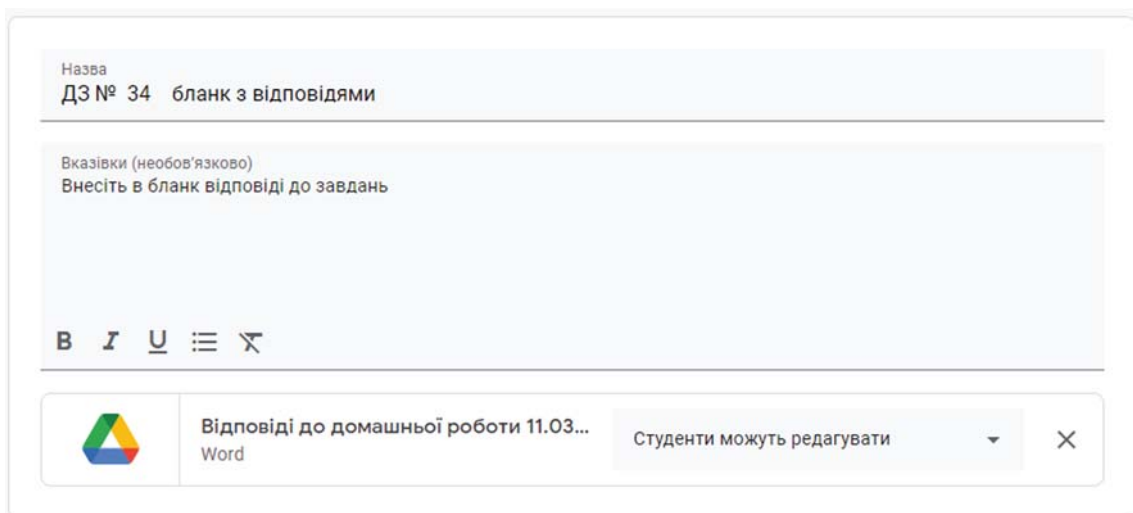
Крок 3 учні можуть виконувати в повній тиші, але за такого підходу вони повинні мати можливість обговорити свої дії в групі, тобто обговорити, чому вони виправили попередні кроки.

2.2.2. Перевірка робіт за допомогою Google-документів

Кожен урок математики супроводжується домашнім завданням для учнів. Учитель може розміщувати в Google-класі умови завдань, які учні мають виконати вдома в зошиті, та документ, що називається «Відповіді», до якого учні повинні мати доступ для редагування.



Учні за бажанням (або учні, обрані вчителем) напередодні уроку заносять до останнього документа відповіді до завдань (або розв'язання з відповідями). Інші учні можуть переглянути цей документ, прокоментувати його, внести свої пропозиції чи зауваження.



Документ із відповідями, який заповнювали учні, учитель використовує, щоб наступного дня на уроці обговорити розв'язання з класом. Учні, які публікували відповіді, виходять до дошки та починають обговорення. Під час дистанційного навчання учні можуть просто поділитися своїм екраном і так розпочати обговорення. Решта учнів у зошиті можуть виправляти допущені ними помилки. І лише після цього всі учні класу надсилають фото своїх робіт із виправленнями в Google-клас.

Така форма спільного використання документів за допомогою Google-класу є дуже цінною, оскільки дає можливість полегшити взаємодію між учнями, а також навчити їх аналізувати та виправляти помилки одне одного. Учителю доцільно нараховувати додаткові бали учням, які добровільно розміщують у Google-документі відповіді або розв'язування домашніх завдань напередодні уроку, і додаткові подвійні бали учням, які роблять виправлення та пояснюють допущені помилки.

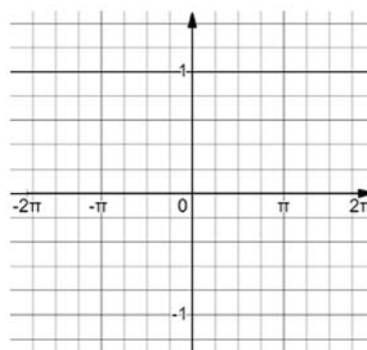
Ця технологія допомагає економити час на уроці, оскільки обговорення домашньої роботи між деякими учнями починається ще до уроку, тож учитель може організувати перевірку домашнього завдання досить швидко одразу на початку уроку.

Наведемо декілька прикладів обговорення домашнього завдання учнями Bayside High School у Нью-Йорку.

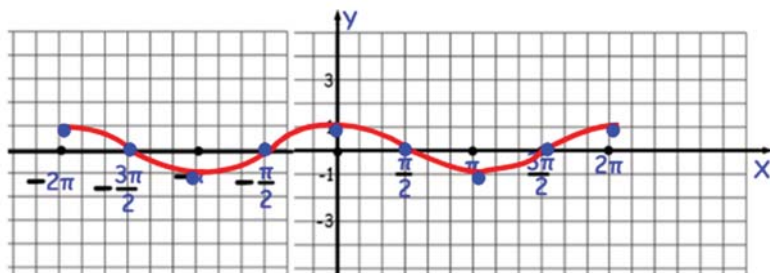
Домашнє завдання «Властивості графіка синуса і косинуса»

Виконай завдання:

1. Побудуй графік функції $y = \cos x$.
2. Знайди область визначення функції.
3. Знайди область значень функції.
4. Знайди період функції



Відповідь учня № 1 (18:00)



Область визначення: всі дійсні числа

Область значень: $[-1; 1]$

Період: 2π

Відповідь учня № 2 (18:30)

Виправлення

Область визначення: $[-2\pi, 2\pi]$.

Пояснення: На графіку є крайні точки справа і зліва, тож область визначення $[-2\pi, 2\pi]$.

Відповідь учня № 3 (18:35)

Запитання: У завданні не йдеться про встановлення меж для графіка. Чи не міг графік продовжуватися за 2π ?

Я думаю, що область визначення — це множина всіх дійсних чисел.

Відповідь учня № 4 (19:12)

Ти правий. Тут область визначення є множина дійсних чисел.

Домашнє завдання «Розв'язування показникових рівнянь розкладанням на множники»

$$81 \cdot 9^{-2b-3} = 27$$

Відповідь учня № 1 (15:00)

$$729^{-2b-1} = 729^{0,5}$$

$$-2b - 1 = 0,5$$

$$-2b = 1,5$$

$$b = -0,75$$

Джон Блэк

Відповідь учня № 2 (16:33)

Виправлення

Я помітив, що Джон спочатку помножив 81 на 9. Це неправильно, бо спершу ми маємо піднести до степеня, а вже потім виконати множення!

$$81 \cdot 9^{-2b-2} = 27$$

$$3^4 \cdot (3^2)^{-2b-2} = 3^3$$

$$3^4 \cdot 3^{-4b-4} = 3^3$$

$$-4b = 3^3$$

$$b = -0,75$$

Джонатан Таух

Домашнє завдання «Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники»

1. $\text{tg}^2x - 7\text{tg}x - 8 = 0$

$$\text{tg}^2x + 1\text{tg}x - 8\text{tg}x - 8 = 0$$

$$\text{tg}x(\text{tg}x + 1) - 8(\text{tg}x + 1) = 0$$

$$(\text{tg}x - 8)(\text{tg}x + 1) = 0$$

$$\text{tg}x - 8 = 0$$

$$\text{tg}x + 1 = 0$$

$$\text{tg}x = 8$$

$$\text{tg}x = -1$$

$$x = \arctg(8)$$

$$x = \arctg(-1)$$

$$x = 83^\circ, 263^\circ$$

$$x = -45^\circ$$

$$x = 135^\circ, 315^\circ$$

$$x = \{83^\circ, 135^\circ, 263^\circ, 315^\circ\}$$

Кевін Наваррете

Цю технологію можна використовувати для узагальнення і систематизації знань учнів з певної теми. Учитель створює Google-документ зі списком тем, які виносить на контрольну роботу, і пропонує групам учнів заповнити аркуш типовими завданнями з кожної теми. Кожна група працює над однією темою. Учні можуть брати завдання зі своїх конспектів, домашніх завдань чи підручника. Також можуть публікувати розв'язання цих задач. Учитель може додати типові задачі, які учні не включили до документа. Крім того, можна створити Google-презентацію, слайди якої учні мають заповнити теоретичним матеріалом з цієї теми: означеннями, правилами, твердженнями, теоремами, доведеннями тощо.

Наведемо приклад підсумкового аркуша, який можна запропонувати групам учнів для заповнення наприкінці вивчення теми «Чотирикутники». Для таких видів робіт учитель може публікувати список учнів у групах і пропонувати їм зробити одну копію завдання для групи і працювати в ній.

ВЛАСТИВОСТІ ЧОТИРИКУТНИКІВ

	Паралелограм	Прямокутник	Ромб	Квадрат	Трапеція	Рівнобедрена трапеція	Прямокутна трапеція
Означення	Це чотирикутник із 2 парами паралельних сторін	Це паралелограм із 4 рівними прямими кутами	Паралелограм із 4 рівними сторонами	Паралелограм із 4 рівними сторонами і 4 рівними прямими кутами	Чотирикутник із однією парою паралельних сторін	Це трапеція із непаралельними сторонами, які дорівнюють одна одній	Трапеція із двома прямими кутами
Протилежні сторони паралельні?	Так	Так	Так	Так	Лише одна пара	Лише одна пара	Лише одна пара
Протилежні сторони рівні?	Так	Так	Так	Так	Ні	Непаралельні сторони рівні	Ні
Усі сторони рівні?	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Ні
Чи рівні сусідні сторони?	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Ні
Чи рівні протилежні кути?	Так	Так	Так	Так	Ні	Ні	Ні
Чи сума градусних мір протилежних кутів дорівнює 180 градусів?	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
Чи є сусідні кути внутрішніми односторонніми?	Так	Так	Так	Так	Лише якщо це кути між основами	Лише якщо це кути між основами	Лише якщо це кути між основами
Чи рівні сусідні кути?	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Кути при основах рівні	Лише прямі кути рівні
Чи всі кути є прямими?	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Ні	Ні
Чи рівні діагоналі?	Ні	Так	Ні	Так	Ні	Так	Ні
Чи перпендикулярні діагоналі?	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Ні
Чи ділять діагоналі одна одну навпіл?	Так	Так	Так	Так	Ні	Ні	Ні
Чи ділять діагоналі кути навпіл?	Ні	Ні	Так	Так	Ні	Ні	Ні

Оригінал спільного документа міститься за лінком: <https://cutt.ly/kwrMQ4gQ> — і за за посиланням у QR-кодi.



За таким самим принципом можна пропонувати учням виконувати спільні завдання або проєктні роботи. Наведемо приклад білінгвального термінологічного проєкту, що можна запропонувати групам учнів у 7 класі під час вивчення курсу «Геометрія». Учитель пропонує набір математичних термінів українською мовою. Учні мають перекласти їх англійською, записати означення англійською та додати фото з життя, на якому б містилося відповідне математичне поняття.

Лінк на проєкт: <https://cutt.ly/iwrMWO6H> — і за за посиланням у QR-кодi.



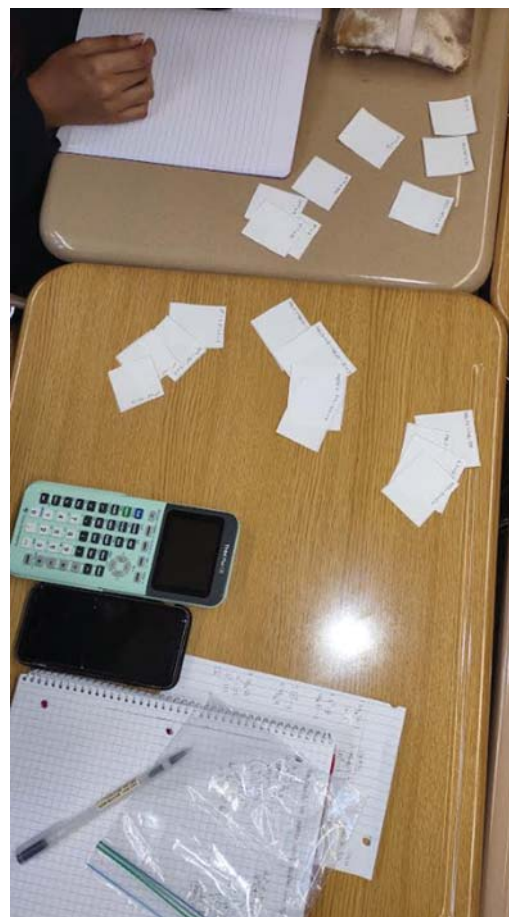
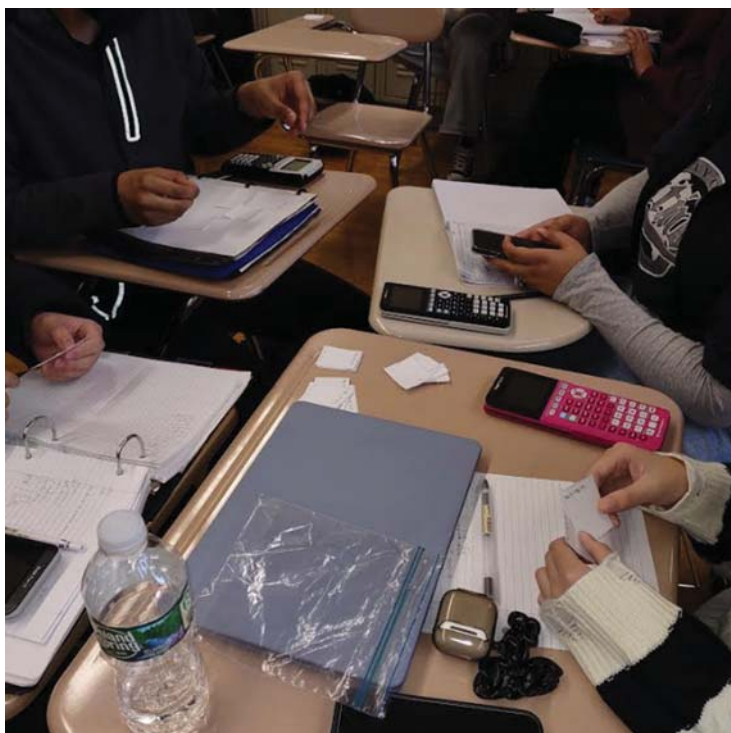
Усі описані роботи вперше було запропоновано учням під час дистанційного навчання, зумовленого пандемією COVID-19. Однак ці технологія і види робіт настільки сподобалися вчителям та учням, що зараз їх застосовують і в традиційному навчанні.

2.2.3. Картки-завдання

Учитель пропонує групам (парам) учнів певну кількість карток із малюнками чи записами (зазвичай це 10–20 карток). Учні мають розсортувати картки, групуючи їх за певною ознакою (Chavutot & Venson, 2008, с. 391).

«Картки-завдання» можна пропонувати групам (парам) учням під час формування уявлень про нове математичне поняття. Наприклад, під час вивчення раціональних чисел можна їм запропонувати 20 карток, на кожній із яких буде одне число. Учні мають на одну стопку покласти картки з додатними числами, на другу — з від'ємними, а на третю — з нулем. Аналогічно можна застосовувати цю технологію для того, щоб учні вчилися розрізняти: прості числа, складені числа і число 1; числовий, лінійний та іменованій масштаби; тіла обертання; лінійні і квадратні рівняння тощо.

Але найкраще ця технологія підходить для формування вмінь та навичок розв'язувати задачі. Наприклад, під час вивчення трьох видів задач на відсотки в 6 класі учням можна запропонувати картки з найпростішими задачами цих видів. Вони мають проаналізувати їх умови і розсортувати на три стопки відповідно до виду. Учитель також може запропонувати учням розв'язати задачі після сортування. Таку технологію можна застосовувати під час вивчення багатьох тем. Наприклад, під час вивчення моделювання вчитель може запропонувати групам учнів картки із задачами, які вони мають розсортувати відповідно до моделі, яку використовують для її розв'язування, а під час вивчення квадратних рівнянь — розсортувати картки з рівняннями залежно від кількості коренів кожного.



Учні Лариси Букалової працюють над сортуванням карток.
Листопад 2022 р.,
Bayside High School, Нью-Йорк

Наведемо приклад карток (табл. 2.2.3), які можна запропонувати під час проходження в 7 класі теми «Розв'язування систем лінійних рівнянь». Завдання орієнтовано на те, щоб учні розглянули різні алгебраїчні способи розв'язування систем лінійних рівнянь, а саме: підстановка, додавання та множення на число з подальшим додаванням. Кожну із запропонованих систем на картках найкраще розв'язувати за допомогою одного з цих методів.

Таблиця 2.2.3

Картки-завдання

<p>A</p> $\begin{cases} y = 2x \\ y = -6x + 4 \end{cases}$	<p>B</p> $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$	<p>C</p> $\begin{cases} 2x + 5y = 34 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$
<p>D</p> $\begin{cases} m = -2n - 3 \\ m = n \end{cases}$	<p>E</p> $\begin{cases} 5x + y = 16 \\ -5x + 3y = 8 \end{cases}$	<p>F</p> $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$
<p>G</p> $\begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$	<p>H</p> $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$	<p>I</p> $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 3x - 5y = -11 \end{cases}$
<p>J</p> $\begin{cases} c = 3d - 5 \\ 2d + 5c = 60 \end{cases}$	<p>K</p> $\begin{cases} 2q + r = 7 \\ 3q - r = 3 \end{cases}$	<p>L</p> $\begin{cases} 6x + 3y = 33 \\ 5x + 2y = 17 \end{cases}$

Ось інструкції, які вчитель може надати учням перед початком роботи із запропонованими картками:

1. Працюйте разом у групах по чотири учні.
2. Ваша група отримає набір карток із завданнями. Розсортуйте картки та згрупуйте їх за найбільш раціональними способом розв'язування системи рівнянь: 1) підстановка, 2) додаванням, 3) множення на число з подальшим додаванням.
3. Кожний учень вибирає по одній картці з кожної з трьох стопок та розв'язує запропоновану на ній систему на окремому аркуші.
4. Після того як кожен розв'яже три свої системи він обмінюється записами з іншим учнем групи. Той своєю чергою вносить пропозиції до отриманих записів.
5. На основі коментарів автор змінює свою роботу. Обмінюйтеся записами ще раз, якщо це необхідно, щоб переконатися, що робота виконана правильно.
6. Дайте групою відповіді на підсумкове запитання: який спосіб розв'язування можна застосувати до кожної запропонованої системи? Відповідь проілюструйте розв'язаними прикладами. (Можете розподілити свою роботу так, щоб кожний учасник групи по черзі писав пояснення.)
7. Буде зібрано розв'язання кожного та кінцеві відповіді вашої групи.

Під час дистанційного чи змішаного навчання можна використовувати цю технологію за допомогою карток, створених у Desmos. Приклади таких карток-завдань можна переглянути за лінком: <https://cutt.ly/PwrMxtLI> — і за за посиланням у QR-коді.



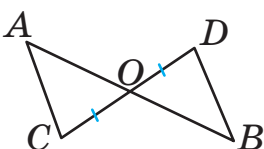
2.2.4. Цеглинки для доведення

Для розв'язування геометричних задач на доведення вчителі можуть застосовувати групову (парну) роботу учнів за технологією «*Цеглинки для доведення*». Учням пропонують означення, аксіоми, теореми, подані у вигляді блоків, які потрібно пов'язати разом, щоб утворити логічні ланцюжки міркувань і довести необхідне твердження. Надання учням таких блоків-підказок створює базу, потрібну для доведення будь-якої задачі.

Розглянемо приклад задачі та її доведення за допомогою «*Цеглинок для доведення*».

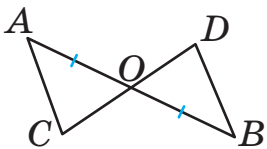
Задача. Через точку O , що є серединою відрізка CD , проведено відрізок AB так, що $AO = OB$. Доведіть рівність трикутників AOC та BOD .

Накреслимо рисунок та запишемо скорочено умову задачі:



Дано: $AO = OB$.
 O – середина CD .
Довести: $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Розглянемо, як учні в групах за допомогою цих блоків конструюють доведення. Спершу вони добирають одну з трьох ознак рівності трикутників, що, на їхню думку, найкраще підходить до задачі (у цьому разі рівність трикутників за двома сторонами і кутом між ними):



Дано: $AO = OB$.
 O – середина CD .
Довести: $\triangle AOC = \triangle BOD$.

Доведення

□□ = □□

□□ = □□

□□ = □□

Трикутники
рівні
за трьома
сторонами
(ССС)

$\triangle \square\square\square = \triangle \square\square\square$

$\angle \square\square\square = \angle \square\square\square$

□□ = □□

□□ = □□

Трикутники
рівні за сторо-
ною і двома
прилеглими
кутами (КСК)

$\triangle \square\square\square = \triangle \square\square\square$

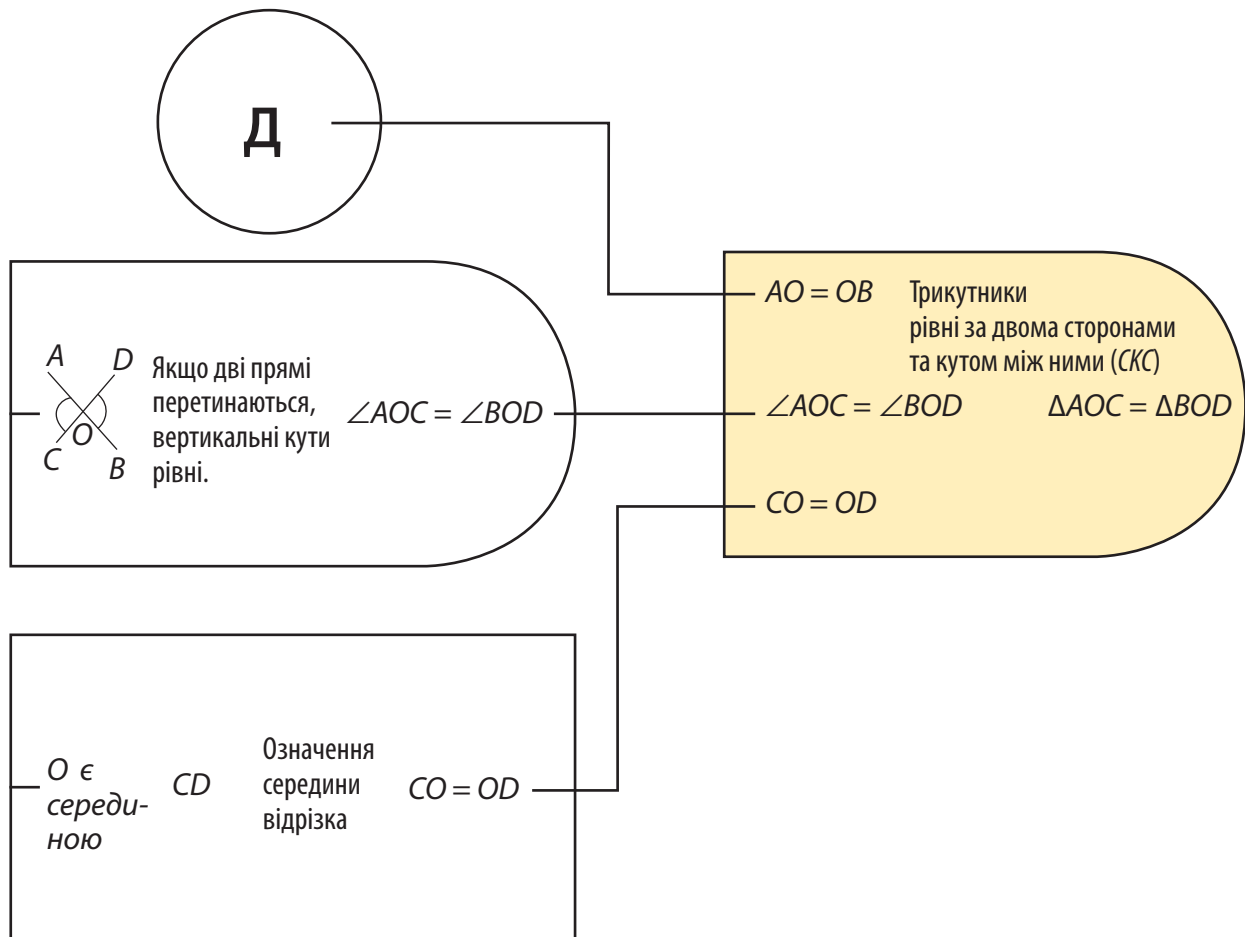
□□ = □□

Трикутники рівні за двома сторо-
нами та кутом між ними (СКС)

$\angle \square\square\square = \angle \square\square\square$ $\triangle \square\square\square = \triangle \square\square\square$

□□ = □□

Потім заповнюють блок, який вибрали, рівностями і зліва добирають блоки, що пояснюють три зазначених рівності.



На основі побудованої схеми учням легше записати доведення в зошиті. У групі вони можуть створювати схему, а потім самостійно записувати доведення в зошиті, обґрунтовуючи кожне твердження. Або ж за допомогою збільшених блоків учитель або одна з груп учнів на дошці може планувати доведення, а потім учні в групі детально оформлюють розв'язування задачі.

Технологія «Цеглинки для доведення»:

- запобігає неправильним логічним міркуванням;
- дає змогу учням легко перевірити правильність своєї роботи;
- забезпечує візуальне та кінестетичне навчання.

Набір карток та задачі, які можна запропонувати учням під час вивчення теми «Ознаки рівності трикутників» у 7 класі, можете знайти за лінком <https://cutt.ly/lwrMnx0M> — або за посиланням у QR-кодi.

Ще більше інформації про цю технологію та відео про здійснення доведення можна знайти на сайті *ProofBlocks. A visual approach to proof* за лінком: <https://cutt.ly/bwrMnJdy> — або за посиланням у QR-кодi.

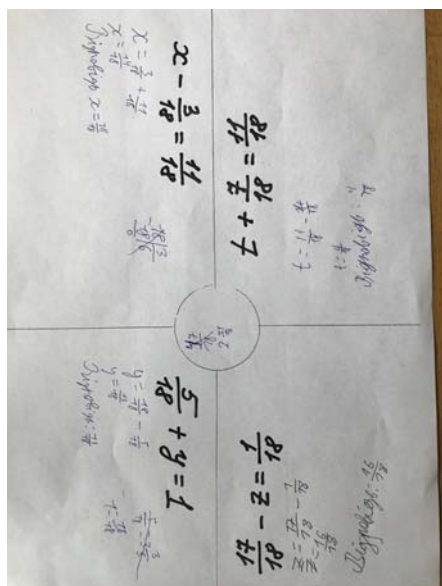


2.2.5. Килимок

Технологію «*Килимок*» доцільно застосовувати, коли учні активно засвоюють нові навички або актуалізують вже наявні.

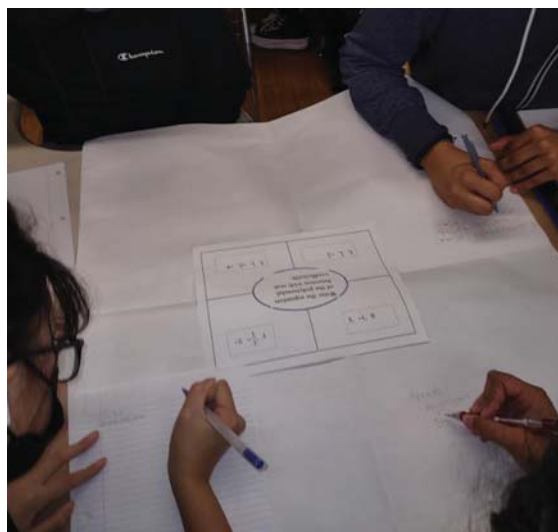
Учням у групі пропонують *килимок* (картку) з декількома завданнями (кількість завдань відповідає кількості учнів). Кожен учень має спершу вибрати собі завдання і самостійно розв'язати його, а потім обговорити його розв'язання з іншими. Після того як усі відповіді до завдань погоджено групою, учні мають додати результати і записати суму в центрі килимка. Учитель легко та швидко перевіряє суму, щоб оцінити роботу групи. Такий підхід також дає змогу учням зрозуміти, чи припустилися вони помилки під час розв'язування.

Приклад 2.2.5.А. Килимок із теми «Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками»



Учні ліцею № 11 м. Новоград-Волинський Житомирської області працюють над задачею

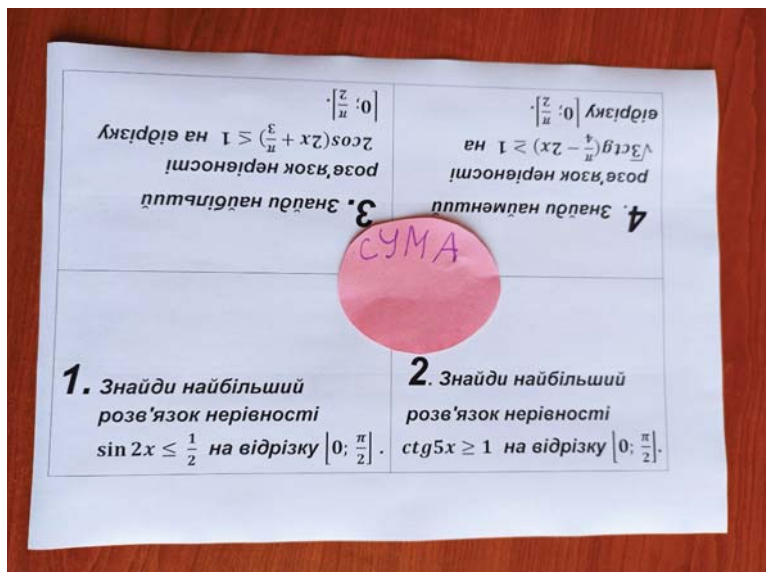
Щоб краще організувати діяльність учнів, можна розміщувати *килимок* (картку із завданнями) у центрі ватмана та пропонувати учням писати свої розв'язання і відповіді на окремих його частинах. У такому разі після завершення роботи над завданням вони можуть розміщувати ватман на стіні для аналізу результату роботи усіма учнями класу. Ватман можна сфотографувати і вивести на екран (за потреби) або ж вирізати окремо частини ватмана, на яких писав розв'язування кожний окремих учень, і вкласти до зошита чи портфолію.



Учні Bayside High School, Нью-Йорк працюють над задачею

Учителі також можуть створювати багаторазові картки зі змінною частиною для запису суми. У такому разі учні будуть розв'язувати свої завдання у зошитах.

Приклад 2.2.5.Б. Килимок із теми «Тригонометричні нерівності»



Учні Дрогобицького ліцею № 1 імені Івана Франка працюють над задачею

Ця технологія сприяє розвитку математичного мислення та полегшує спільний пошук помилок і внесення виправлень. Наведемо приклади ще декількох *килимків*.

Приклад 2.2.5.В. Килимок з теми «Розв'язування лінійних рівнянь»

<p>1. Розв'яжіть рівняння</p> $\frac{1}{3}x + 6 = -8$	<p>2. Розв'яжіть рівняння</p> $\frac{x}{3} - 5 = -1$
<p>СУМА:</p>	
<p>3. Розв'яжіть рівняння</p> $4x - 7 = 5$	<p>4. Розв'яжіть рівняння</p> $\frac{1}{4}x - 18 = -22$

Приклад 2.2.5.Г. Килимок із теми «Розв’язування квадратних тригонометричних рівнянь»

Д

$$\cos x + \sqrt{3} = -\cos x$$

С

$$4 \sin^2 \theta - 3 = 0$$

Сума

$$2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

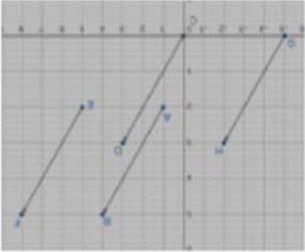
А

$$5(\sin \theta + 1) = 5$$

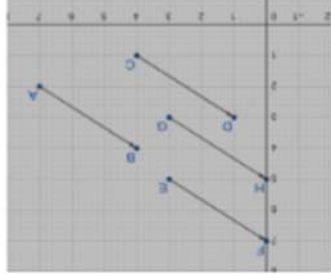
В

Приклад 2.2.5.Г. Килимок із теми «Модуль вектора»

Д

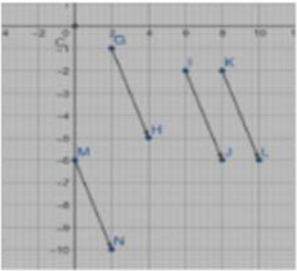


С

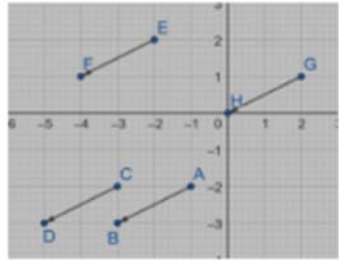


Сума

Знайдіть в кожному з випадків проекцію векторів на вісь x, проекцію векторів на вісь y, довжину вектора та запишіть їх суму



А

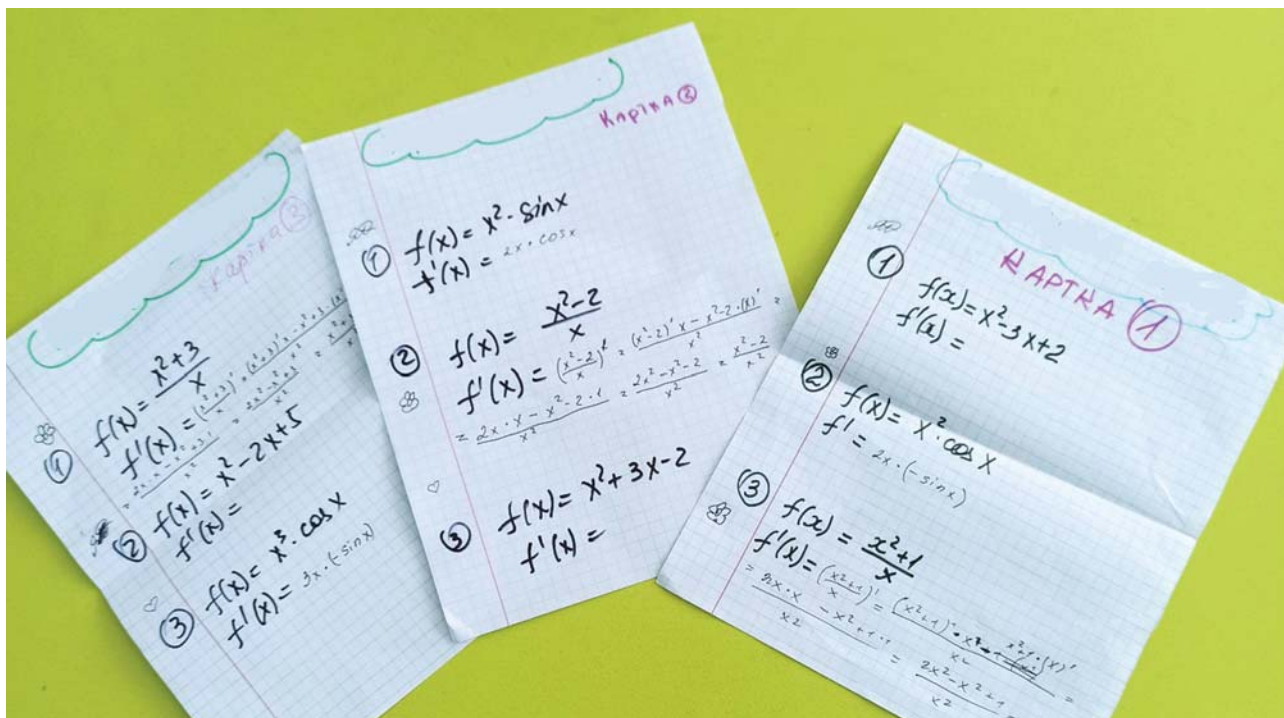


В

2.2.6. Естафета

Технологія «*Естафета*» дає можливість учням у групах редагувати роботи одне одного і змагатися з іншими групами. Учитель об'єднує учнів у групи (по п'ять-шість учасників у кожній) і пропонує серію коротких однотипних завдань (кожен учень розв'язує своє завдання). Учні кожної групи мають сидіти одне за одним (тобто в одному ряду), щоб легко передавати аркуш одне одному після виконання своєї частини роботи, поки завдання не закінчаться. Групи можуть змагатися, хто швидше правильно розв'яже більшу кількість завдань на аркуші (якщо їх багато).

Різним групам можна пропонувати як однакові, так і різні аркуші. Завдання на аркуші мають бути однакової складності та мати приблизно однакову кількість кроків, щоб робота була рівномірно розподілена між усіма учасниками групи. Кожне завдання має бути візуально відокремлено від інших і містити місце для записів.



**Аркуші для «Естафети» виготовлені Людмилою Роман —
учителькою математики Дрогобицького ліцею № 1 імені Івана Франка**

Доцільно використовувати «*Естафету*» як веселу кульмінаційну діяльність після того, як учні самостійно вправлялись у розв'язуванні певних видів завдань.

Для естафети вчитель може надати учням такі інструкції:

1. Ви працюєте в групі по п'ять-шість осіб.
2. Ваша група отримає набір задач.
3. У вас буде кілька хвилин, щоб разом переглянути їх і обговорити, як розв'язувати та хто буде починати розв'язувати кожену з них і в якому порядку.

4. За сигналом сідайте за парту. Учасники групи мають сидіти в одному ряду.
5. Перший учасник розв'язує одне завдання на аркуші і підписує його. Після того як перший учасник завершив розв'язання свого завдання — він передає його другому учаснику, щоб той розв'язав своє завдання, і т.д.
6. Після того як останній учень у ряду розв'яже своє завдання — він передає аркуш учню, який сидить першим у ряду.
7. Повторюйте кроки 5 і 6, доки всі задачі не буде розв'язано.
8. Наприкінці група збирається, щоб перевірити всі розв'язання перш ніж їх здати.

«Естафета» — енергозатратний вид учнівської діяльності, особливо коли організувати її як змагання між групами. Ця технологія роботи в групі може бути цікавою для учнів, які люблять працювати в швидкому темпі. Однак деякі учні можуть відчувати надмірний тиск під час виконання завдань на швидкість, особливо якщо вони розуміють, що решта групи чекає на них. Щоб зменшити стрес, який учні можуть відчувати під час участі в **«Естафеті»**, учитель може дозволити учням, які застрягли на задачі, звернутися по допомогу до інших членів своєї групи. Не доцільно пропонувати цю технологію, якщо учням може бути некомфортно в метушливому класі. Перш ніж організувати **«Естафету»**, радимо зважити на вподобання учнів.

Наведемо приклади декількох заготовлених аркушів для естафет, що перекладені українською і опубліковані з дозволу їх авторів.

Приклад 2.2.6.А. Теорема Піфагора для визначення виду трикутника

Вказівка. Використай теорему Піфагора для того, щоб визначити, який трикутник є прямокутним.

<p>1. Довжини сторін трикутників</p> <p>15 см 20 см 24 см</p> <p>Ім'я: _____</p>	<p>2. Довжини сторін трикутників</p> <p>30 см 40 см 50 см</p> <p>Ім'я: _____</p>	<p>3. Довжини сторін трикутників</p> <p>48 см 55 см 76 см</p> <p>Ім'я: _____</p>
<p>4. Довжини сторін трикутників</p> <p>6 см 8 см 10 см</p> <p>Ім'я: _____</p>	<p>5. Довжини сторін трикутників</p> <p>10 см 16 см 20 см</p> <p>Ім'я: _____</p>	<p>6. Довжини сторін трикутників</p> <p>9 см 15 см 17 см</p> <p>Ім'я: _____</p>

Приклад 2.2.6.Б. Задачі на відсотки

Вказівка. Розв'яжи перше завдання. Після цього передай картку однокласникам для розв'язання інших завдань.

1. Знайди 15% від 60. Ім'я: _____	2. Знайди 20% від 36 Ім'я: _____	3. Знайди число 4% якого становлять 6. Ім'я: _____
4. Знайди 140% від 20 Ім'я: _____	5. Олександра забила 12 з 15 м'ячів. Який відсоток м'ячів забила Олександра? Ім'я: _____	6. Знайдіть 2% від 30 Ім'я: _____
7. Знайди число, 30% якого дорівнює 15. Ім'я: _____	8. Знайди 98% від 50 Ім'я: _____	9. Подай звичайний дріб $\frac{16}{25}$ у відсотках Ім'я: _____
10. Лукас пропустив 3 з 20 м'ячів. Який відсоток м'ячів він пропустив? Ім'я: _____	11. Знайди 250% від 80. Ім'я: _____	12. Подай звичайний дріб $\frac{3}{40}$ у відсотках Ім'я: _____

2.2.7. Передай папір

Технологія «*Передай папір*» дуже схожа на «*Естафету*», але в цьому разі учні в групі працюють над однією задачею. Учитель об'єднує учнів у групи (по п'ять-шість учасників у кожній) і пропонує одне завдання, яке вони мають розв'язати разом, по черзі записуючи кроки розв'язання. Учні передають одне одному аркуш, поки задача повністю не буде розв'язана.

Кожен учень робить записи своїм кольором (або підписує твердження, що ним були написані). Крім того, кожний учень, коли отримує аркуш,

аналізує написане до нього і може вносити виправлення до розв'язання попередніх учнів.

Групи можуть змагатися, хто швидше правильно розв'яже завдання.

Приклад 2.2.7.А. Аркуш виконаного групою учнів завдання на тему «Розв'язування систем лінійних нерівностей графічно»

Передай папір Ім'я _____

Розв'язування систем лінійних нерівностей графічно

Example#1
Розв'яжіть графічно систему нерівностей $\begin{cases} x + 4y \geq 10 \\ 3x - 2y < 12 \end{cases}$ $y \geq -\frac{x}{4} + \frac{10}{4} \rightarrow \frac{5}{2} = 2.5$

Кроки (підпишіть своїми ініціалами кроки, що ви виконували)	Ініціали	Розв'язання
1) Перепиши першу нерівність у вигляді $y = kx + p$.	AJ	<p> $3x - 2y < 12$ $-2y < -3x + 12$ $y > \frac{3}{2}x - 6$ $(2, 4)$ $2 + 4(4) \geq 10$ $18 \geq 10 \checkmark$ $3(2) - 2(4) < 12$ $6 - 8 < 12$ $-2 < 12 \checkmark$ </p>
2) Провели відповідну пряму. Зафарбуй необхідну частину площини.	GS	
3) Перепиши другу нерівність у вигляді $y = kx + p$.	LB	
4) Провели відповідну пряму. Зафарбуй необхідну частину площини.	PM	
5) Переріз зафарбованих частин з кроку 2 і 4 є множиною розв'язків цієї системи. Познач цю область літерою P	AJ	
6) Перевір відповідь, вибравши довільну точку з області P		

Відповідні бланки двома мовами можна знайти за лінком: <https://cutt.ly/2wrMRK00> — або за посиланням у QR-кодi.



2.2.8. Станції

«Станції» («Навчальні станції») — це технологія за якої учні групами мають пройти декілька локацій у класній кімнаті, де розміщено різноманітні завдання на одну тему (Andreasen & Hunt, 2012, с. 242). Одночасно різні групи учнів перебувають на різних *станціях*. Оскільки кожна *станція* відображає різні аспекти однієї теми, учням потрібно пройти всі *станції* (але у своєму порядку), щоб досягти цілей уроку. Наприклад, якщо урок узагальнення і систематизації присвячено розв'язуванню задач про чотирикутники, учитель може створити декілька *станцій*: *станція 1* — задачі з паралелограмами, *станція 2* — задачі з прямокутниками, *станція 3* — задачі з квадратами, *станція 4* — задачі з ромбами. Якщо ж учні вивчають тригонометричні тотожності, то можна запропонувати ось такі картки для кожної станції:

Приклад 2.2.8.А. Приклади карток для чотирьох станцій

Доведіть тотожність.

Станція 1

$$\sec x - \sin x \operatorname{tg} x = \cos x$$

Станція 2

$$\frac{-\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{csc}^2 x}{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{tg} x$$

Станція 3

$$\frac{\sin \theta}{1} : \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \cos \theta = \sec \theta$$

Станція 4

$$\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1} : \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 x$$

Зазвичай учитель пропонує від трьох до шести різних *станцій* із від однієї до п'яти задач на кожній *станції*. Щоб запобігти роботі великої кількості учнів на одній *станції*, учитель може дублювати *станції*. Кількість завдань на кожній *станції* залежить від їх складності. Завдання на кожній *станції* можуть бути як одного рівня, так і декількох (Martin, 2019; Tomlinson, 2014, с. 123). Учителю бажано чітко зазначати тематику кожної *станції* та, якщо наявні, рівні складності її завдань, щоб учні могли контролювати своє проходження *станцій*.

Хоча учні теоретично можуть самостійно працювати над розв'язуванням задач на *станціях*, але краще, щоб вони працювали в групах по двоє чи троє та могли з кимось обговорити свої думки, замість того, щоб довго вагатися наодинці чи постійно просити вчителя про допомогу. Учитель може запропонувати учням створити пари в середині груп. Наприклад, доцільно запропонувати мовчазному учню працювати з учнем, який є досить активним і говірким.

Один із способів організувати *станції* — написати або надрукувати завдання на великих аркушах паперу та розкласти їх в різних місцях класної кімнати. Бажано, щоб на кожній *станції* був приклад розв'язаного одного завдання, що буде для учнів орієнтиром. Учитель

може надати також відповіді до завдань. Група учнів працює на визначеній для них частині запропонованого аркуша або використовує свої зошити.

Ще один спосіб організувати *станції* — розмістити для кожної *станції* в кімнаті папки з копіями завдань та орієнтирами для розв'язування. У такому разі кожна група може взяти по одній копії і працювати безпосередньо на ній. Використання папок потребує додаткової роботи з боку вчителя, однак це робить роботу груп більш організованою.

Перш ніж учні розпочнуть рух *станціями*, учитель інформує їх про тематику кожної *станції*, нагадує, що вони мають пройти кожен з них. Доцільним є визначити першу *станцію* для кожної групи, щоб переконатися, що учні рівномірно розподіляються по класній кімнаті, а також напрямок руху *станціями* (за годинниковою стрілкою чи проти або видати маршрутний лист). Напрямок руху може визначатися самими завданнями на *станціях*. Наведемо приклад таких карток із завданнями на станціях.

Приклад 2.2.8.Б. Приклади карток із відповідями, що задають рух станціями

КАРТКА 1

Виконай ділення

$$(x^3 + 11x^2 + 25x - 2) : (x + 8)$$

Відповідь

$$3x - 1 - \frac{5}{2x + 2}$$

© Never Give Up On Math 2015

КАРТКА 2

Виконай ділення

$$(4x^4 + 2x^3 - x^2 + 6x + 9) : (x + 1)$$

Відповідь

$$5x^3 - 5x^2 - 7x - 6 - \frac{8}{x + 1}$$

© Never Give Up On Math 2015

КАРТКА 3

Виконай ділення

$$(2x^3 - 9x^2 - 60x + 31) : (x - 8)$$

Відповідь

$$5x^2 + 2x + 4$$

© Never Give Up On Math 2015

КАРТКА 4

Виконай ділення

$$(7x^3 + 10x^2 + 59x + 31) : (7x + 3)$$

Відповідь

$$x^2 + 3x + 1 - \frac{10}{x + 8}$$

© Never Give Up On Math 2015

КАРТКА 5

Виконай ділення

$$(-4x^2 - x + x^3 + 20) : (x - 3)$$

Відповідь

$$x^2 - \frac{8}{x+8}$$

© Never Give Up On Math 2015

КАРТКА 6

Виконай ділення

$$(5x^3 + 27x^2 + 14x + 20) : (x + 5)$$

Відповідь

$$4x^3 - 2x^2 + x + 5 + \frac{4}{x+1}$$

© Never Give Up On Math 2015

Ділення многочленів

Ім'я: _____ Час: _____ Дата: _____

В І Д П О В І Д І	Картка 1	Картка 2
	Картка 3	Картка 4
	Картка 5	Картка 6

© Never Give Up On Math 2015

Під час вивчення ділення многочленів учням пропонують об'єднатися в групи і пройти всіма створеними вчителем станціями. На кожній станції учнів чекають завдання і відповідь, але відповідь не відповідає завданню. Учні мають розв'язати завдання, а потім переміститися на ту станцію, у картці якої зазначено правильну відповідь. У такому разі групи будуть по класу шукати наступну станцію, що їм потрібна.

Щоб допомогти учням контролювати час, учителю бажано використувати таймер і повідомляти, коли групи мають перейти на іншу станцію. Кількість часу для кожної станції залежить від складності задач і кількості станцій. Якщо є чотири — шість станцій із від однієї до п'яти задач на кожній, то зазвичай відводять 5–10 хв на станцію протягом уроку (45 хв).

Після проходження всіх станцій учні можуть повернутися на свої місця, узагальнити та проаналізувати свою роботу. Учитель може поставити їм конкретне запитання, на яке потрібно відповісти (або дозволити учням вибрати одне із запитань). Учні можуть індивідуально відповісти на такі запитання, якщо вчитель просить їх прокоментувати свою роботу, або ж відповісти на узагальнювальне запитання в групах — кожен учасник може по черзі писати речення іншим кольором (кожному учню відповідає свій колір записів). Якщо інших кольорів немає, можна запропонувати написати свої ініціали біля своєї частини роботи, щоб ідентифікувати автора кожного твердження.

Наведемо кілька прикладів питань, на які учні можуть відповісти після проходження станцій.

Яка станція, на вашу думку, була найскладнішою? Яка найпростішою? Чому? Ці питання доречні, коли кожна станція присвячена різним способам розв'язування задач одного типу.

Що спільного у всіх станцій? Це запитання доречне, якщо станції організовані таким чином, щоб учні знайшли нову ідею, до якої підводить кожна з них.

Які типові помилки чи які важливі речі слід пам'ятати під час розв'язування цих задач? Це запитання допомагає учням брати участь у метакогнітивній діяльності, розмірковуючи про своє мислення.

Під час вивчення теми «Розкладання многочлена на множники» в 7 класі вчитель може запропонувати на уроці узагальнення і систематизації групам учнів пройти п'ять станцій, кожна з яких присвячена різним способам розкладання многочлена на множники (застосування формули різниці квадратів, групування, виділення повного квадрата, винесення за дужки спільного множника та змішані випадки). Групи мають на кожній станції виконати будь-які п'ять завдань (учні можуть вибрати, які завдання вони будуть виконувати). Під час роботи в групах учні часто розподіляють завдання, а потім перевіряють роботу одне одного. Задачі на всіх станціях пронумеровані послідовно, щоб учитель міг легко перевірити відповіді. Якщо вчитель вважає за потрібне, то наприкінці роботи може надати ключі відповідей до деяких або всіх завдань, щоб учні самостійно перевірили себе.

Розглянемо аркуш для Станції № 4, що присвячена розкладанню многочлена на множники за допомогою винесення спільного множника за дужки. Ця станція складається із завдань чотирьох рівнів складності.

Приклад 2.2.8.В. Аркуш Станції № 4*Станція №4. Винисення спільного множника за дужки**Короткий огляд*

$$y^3 + 12y^2 + 35y = y(y^2 + 12y + 35) = y(y + 5)(y + 7)$$

Рівень 1

$$49. 2x^2 + 20x + 48 \quad 50. 3x^2 - 30x + 63 \quad 51. 3x^2 - 9x - 120 \quad 52. 7b^2 - 35b - 42$$

Рівень 2

$$53. 8p^3 + 12p^2 + 4p \quad 54. 18x^3 - 6x^2 - 24x \quad 55. 2x^3 - 3x^2 - 5x \quad 56. 12k^3 + 6k^2 - 18k$$

Рівень 3

$$57. 4y^3 - 4y \quad 58. 8x^3 - 50x \quad 59. 50y^2 - 8 \quad 60. 36y^2 - 4p^2$$

Рівень 4

$$61. 256x^4 - 81 \quad 62. w^4 - 625n^3 \quad 63. 3x^4 - 3 \quad 64. 81x - 16x^3$$

Станції особливо добре працюють для ознайомлення з різними способами розв'язування задач та постійного вправлення в розв'язуванні задач певної теми. Ця технологія створює умови, коли учні можуть вчитися у своїх однокласників і колективно розв'язувати задачі. Крім того, вона дає змогу учням рухатися під час уроку, що урізноманітнює шкільну буденність.

2.2.9. Центри

«Центри» («Навчальні центри») — це набори завдань на різні теми, які розміщують у різних локаціях у класі. На відміну від *станцій*, *центри* зазвичай не тісно пов'язані один з одним. Натомість вони розроблені, щоб допомогти учням, яким потрібна додаткова практика з деяких навчальних тем (Martin, 2019; Tomlinson, 2014, с. 123).

Найчастіше вчителі пропонують учням попрацювати за допомогою технології *«Центри»* під час повторення й узагальнення кількох тем наприкінці розділу, чверті чи семестру. Кожен *центр* може містити завдання з декількох підтем. Усі *центри* можуть бути поєднані певною навчальною темою. Наприклад, «Звичайні дроби», «Метод координат», «Статистика», «Раціональні вирази» тощо. Учителі також можуть розміщувати різні навчальні засоби на локаціях, щоб допомогти учням із розв'язуванням задач.

Наведемо приклад уроку узагальнення і систематизації у 8 класі із теми «Квадратні рівняння», що передбачає групову роботу учнів за технологією *«Центри»*. Один із *центрів* передбачає побудову графіка квадратичної функції за допомогою сервісу Desmos, тож на одній із локацій потрібно буде забезпечити гаджет з доступом до мережі Інтернет. На початку уроку вчитель надає учням інструкції:

1. Ви маєте групою відвідати кожен центр.
2. На кожній локації ви побачите аркуш із завданням. Ви маєте спершу переглянути навчальне відео за лінком (або за посиланням у QR-кодї), а потім заповнити пропуски у твердженнях.
3. Після цього розв'яжіть запропоновані завдання.

Наведемо приклади аркушів для кожної локації.

Приклад 2.2.9.А. Аркуші для різних центрів

Центр 1. Розв'язування квадратних рівнянь за допомогою оберненої теореми Вієта



1. Перегляньте відео: перейдіть за лінком: <https://cutt.ly/RwrMUxuV> — або за посиланням у QR-кодї.

2. Заповніть пропуски.

Крок 1: Переконайтеся, що права частина рівняння дорівнює ____.

Крок 2: Розкладіть на множники _____ частину рівняння за допомогою оберненої теореми Вієта.

$$x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Крок 3: Добуток дорівнює _____, коли хоча б один множник дорівнює нулю. Прирівняйте кожен множник до _____.

Крок 4: Розв'яжіть кожне новоутворене рівняння.

3. Розв'яжіть рівняння : $x^2 + 6x = -8$.

Крок 1:

Крок 2:

Крок 3:

Крок 4:

Центр 2. Розв'язування квадратних рівнянь за допомогою дискримінанта



1. Перегляньте відео: перейдіть за лінком: <https://cutt.ly/GwrMU3hx> — або за посиланням у QR-кодї.

2. Заповніть пропуски.

Крок 1: Переконайтеся, що права частина рівняння дорівнює ____.

Крок 2: Визначте коефіцієнти a , b і c .

Крок 3: Знайдіть дискримінант за формулою _____

Якщо $D < 0$, то рівняння _____

Якщо $D = 0$, то рівняння _____

Якщо $D > 0$, то рівняння _____

Крок 4: Знайдіть, якщо можливо, значення x за формулою _____

3. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 6x = -8$

Крок 1:

Крок 2:

Крок 3:

Крок 4:

Центр 3. Розв'язування квадратних рівнянь за допомогою виділення повного квадрата

1. Перегляньте відео: перейдіть за лінком: <https://cutt.ly/JwrMlZjT> — або за посиланням у QR-коді.



2. Заповніть пропуски.

Крок 1: Переконайтеся, що права частина рівняння дорівнює ____, а ліва містить вираз виду $x^2 + bx$.

Крок 2: Виділіть повний квадрат у _____ частині рівняння.

Крок 3: Розкладіть ліву частину рівняння на _____.

Крок 4: Прирівняйте кожен множник до ____ та знайдіть x .

3. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Крок 1:

Крок 2:

Крок 3:

Крок 4:

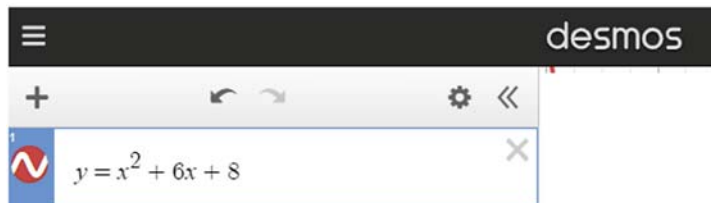
Центр 4. Розв'язування квадратного рівняння графічним способом

1. Заповніть пропуски.

Крок 1. Переконайтеся, що права частина рівняння дорівнює _____.

Крок 2. Замініть __ на y та побудуйте в графічному калькуляторі Desmos графік утвореної функції (<https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>).

Уведіть в лівому верхньому ряду



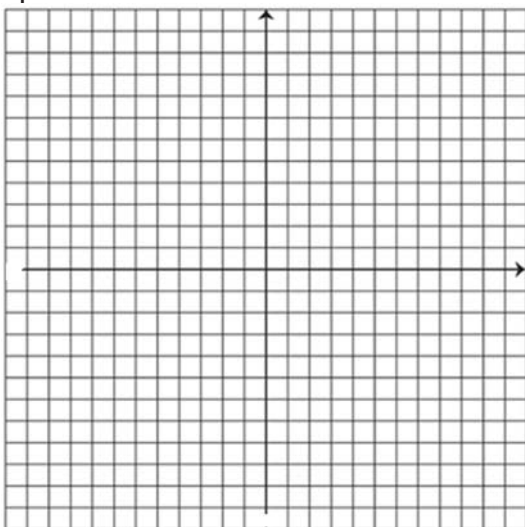
(показник степеня 2 вводиться як x^2)

Крок 3. Знайдіть точки перетину графіка з віссю _____

2. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Крок 1:

Крок 2:



Крок 3:

2.2.10. Завжди, іноді, ніколи

Ця технологія спрямована на визначення істинності тверджень, що запропоновані групі учнів, і може бути організована в декількох варіантах.

Варіант № 1

Попросіть всіх учнів класу об'єднатися в пари і стати біля локації «Я не знаю». Спроектуйте картки із твердженнями на екран чи мультимедійну дошку. Учні мають прочитати твердження і в парах визначити, є воно за будь-яких умов істинним, хибним, чи це залежить від умов. Після того як учні в парі визначилися, вони мають перейти до локацій із написами «Завжди», «Іноді» чи «Ніколи». Коли кожна пара зробить свій вибір, навмання виберіть пару, яка пояснить свої міркування. Після цього інші пари можуть перейти на іншу локацію на основі представлених аргументів.

Варіант № 2

Об'єднайте учнів у групи по 4. Роздайте групам по набору карток із твердженнями і попросіть відсортувати їх на три стопки «Завжди», «Іноді», «Ніколи».

Підказки учням

Дайте відповіді на запитання:

1. Чи завжди подані твердження істинні? Чи лише за певних умов? Чи вони завжди хибні?
2. Чому ви так вважаєте?
3. Чи можете навести контрприклад для кожного випадку?
4. Чи можете пояснити, за яких умов твердження є істинним? Чи можете переписати твердження так, щоб воно завжди було істинним або, навпаки, завжди хибним?

Набір тверджень до теми «Подільність натуральних чисел»

1. Добуток двох натуральних чисел завжди більший за кожен із множників.
2. Якщо один із доданків 5, то сума буде більшою за 5.
3. Сума трьох послідовних чисел ділиться на 3.
4. Якщо натуральне число поділити на одну другу, то частка буде удвічі більша за ділене.
5. Сума трьох чисел непарна.
6. Якщо до непарного числа додати 1, то отримаємо парне число.
7. Числа кратні 5 закінчуються на 5.
8. Сума двох непарних чисел є непарним числом.
9. Якщо до числа кратного 5 додати 10, то результат буде кратним 5.

Набір тверджень до теми «Многокутники»

1. Шестикутник має 6 сторін однакової довжини.
2. У трикутнику є лінія симетрії.
3. Квадрати мають дві діагоналі, що перетинаються під прямим кутом.
4. Якщо відрізати кут квадрата вийде п'ятикутник.
5. В основі піраміди лежить квадрат.
6. Паралелепіпед має дві грані у формі квадрата.

Для розвитку креативності учнів можна пропонувати їм у групах чи парах створювати аналогічні картки.

Підручники з математики, укладені за чинними програмами, містять завдання, де учні мають визначити істинність тверджень. На основі цих завдань легко організувати схожу діяльність учнів, коли вони мають розсортувати картки лише на дві стопки: «Істинні», «Хибні» — або зайняти одну з двох локацій: «Істинне» чи «Хибне».

Наведемо декілька завдань з підручника «Математика. 6 клас» (Бевз, 2023, Ч. 2), які можна запропонувати виконати групам (парам) учнів за цією технологією.

74. Яке з тверджень хибне?

A $2 : 8 = 5 : 20$

B $7 : 2 = 21 : 6$

B $10 : 2 = 1 : 5$

Г $1,2 : 0,3 = 8 : 2$

337. На діаграмі зображено кількість відкриття шлагбаума в зазначені проміжки часу. Установи істинність тверджень.

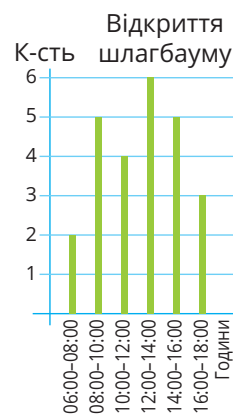
а) Шлагбаум відкривався найчастіше з 12:00 до 14:00.

б) З 8:00 до 10:00 шлагбаум відкривався 4 рази.

в) З 6:00 до 18:00 шлагбаум відкривався 25 разів.

г) Шлагбаум відкривався 5 разів з 14:00 до 16:00.

ґ) З 16:00 до 18:00 шлагбаум відкривався в 2 рази менше, ніж з 12:00 до 14:00.



2.2.11. Прогулянка галереєю

Суть цієї технології полягає в тому, що учні в групах (парах) виконують певне завдання і результат своєї роботи кріплять на стіну, як полотно в галереї. Решта учнів прогулюється галереєю, тобто аналізує всі роботи і може залишати коментарі чи запитання авторам роботи. Після завершення вчитель з учнями може обговорити всі або окремі роботи, дати змогу групам презентувати свої роботи, відповісти на запитання, що були поставлені до їхніх робіт.


Ця технологія працює найкраще, коли учні в групі (парі) мають творче завдання. Наприклад, коли вони за рисунком, схемою чи рівнянням мають скласти умову до задачі та розв'язати її. Після того як кожна група (пара) презентує свої задачі, учні, прогулюючись галереєю, аналізують роботи, перевіряють розв'язки та оцінюють, чи має текст задачі сенс. Кожній групі (парі) біля кожної роботи пропонуються надати коментарі, поставити свої ініціали та перейти до наступного завдання.

Чудово, коли вчитель потім декілька найкращих задач включає в подальші самостійні чи контрольні роботи.

Можна запропонувати й іншу реалізацію цієї технології. Наприклад, для уроку розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь кожній групі можна запропонувати різні рівняння. Кожна група за рівнянням формулює лише умову задачі, прикріплює її до стіни. А потім учні в групах (парах), прогулюючись галереєю, мають розв'язати кожну задачу. Якщо учні вважають, що умова складена неправильно, — вони залишають свої коментарі під умовою.

Наведемо декілька прикладів завдань з підручників з математики для 5 і 6 класів (Бевз, 2022; Бевз, 2023, Ч. 2), на основі яких учитель може організувати «Прогулянку галереєю».

751. Склади умову задачі за рівнянням:

 а) $x - 100 = 170$; б) $12 : x = 3$.

406. Складіть за малюнком умову задачі та запропонуйте її розв'язати однокласникові/однокласниці двома способами.



157. За скороченими записами сформулюй умови задач та запропонуй їх розв'язати своїм однокласникам/однокласницям.

300 — 100 %
x — 30 %

33 — 15 %
x — 100 %

8000 — 100 %
60 — x %

Учитель може дозволяти учням перед розміщенням роботи на стіні просити однокласників розв'язати їхні задачі. За такого підходу учні зазвичай більш сумлінно ставляться до виконання роботи (Schulten, 2018).

Підказки для вчителя

Роздайте малюнки (схеми, рівняння тощо) кожній групі (парі) та попросіть учнів сформулювати умову задачі на основі малюнка (схеми, рівняння тощо).

- Групи (пари) повинні перемалювати поданий малюнок (схему, рівняння тощо) на свій аркуш та написати повний текст умови задачі і її розв'язання.

- Групи (пари) розміщують свої аркуші на стіні.

- Попросіть групи (пари) обмінятися міркуваннями та перевірити роботу одна одної:

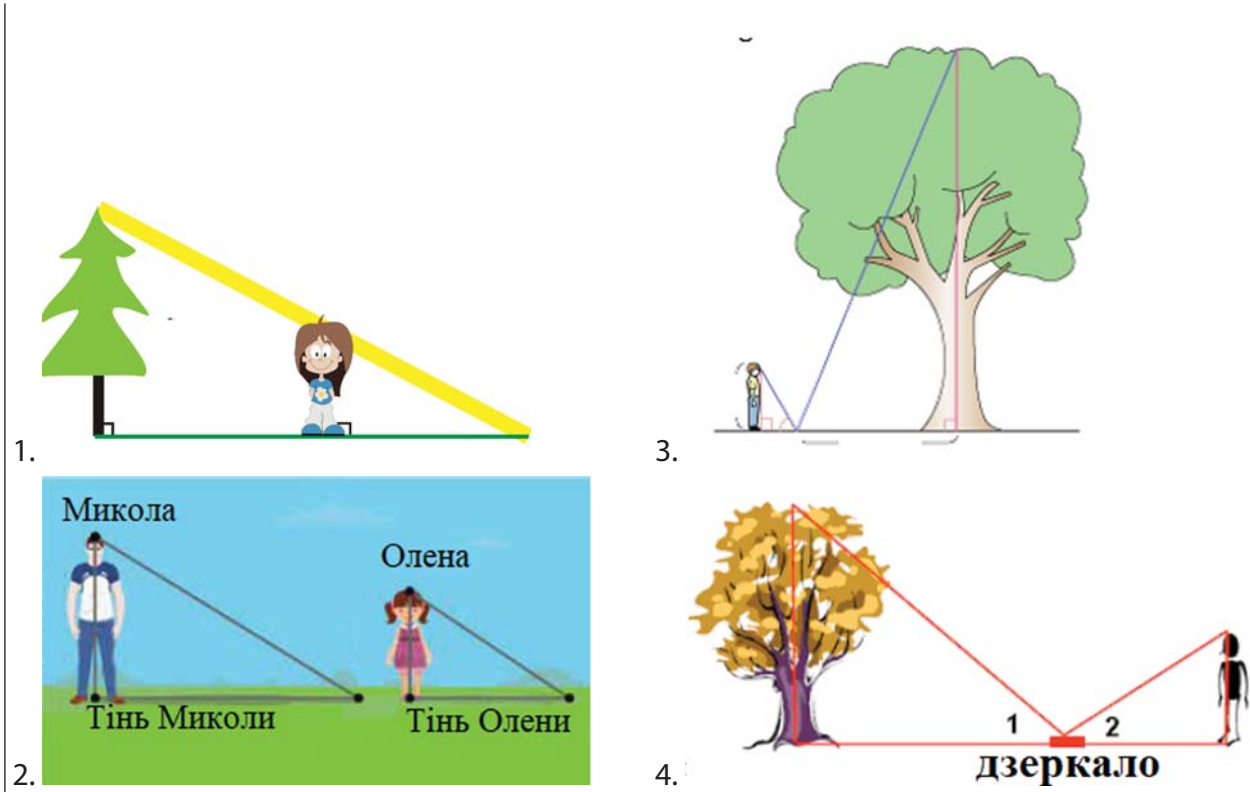
- Чи має сенс текст задачі?

- Чи правильне розв'язання? Так/Ні. Чому ні?

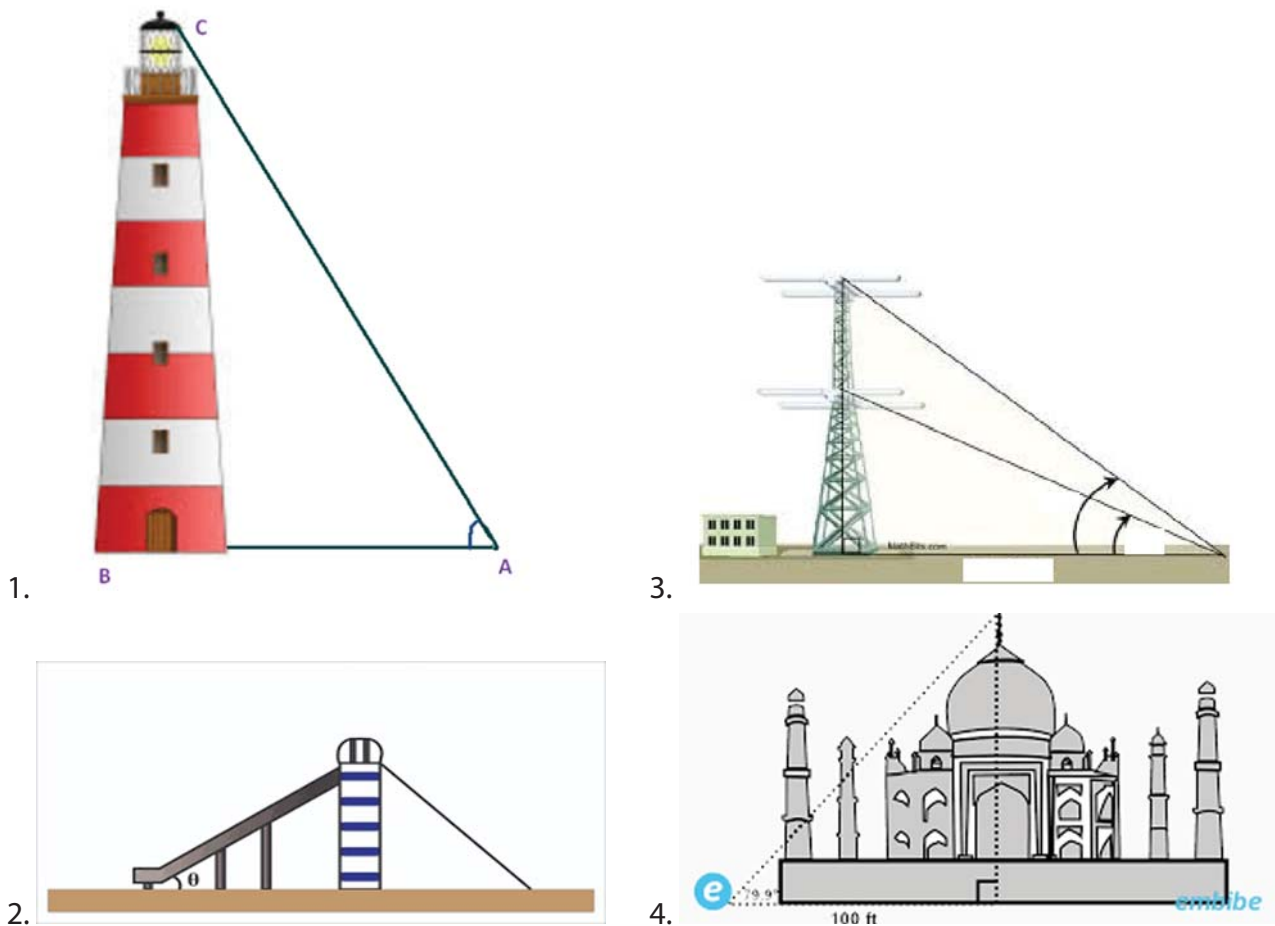
- Якщо є помилка, виправте її.

Наведемо приклади малюнків до деяких тем.

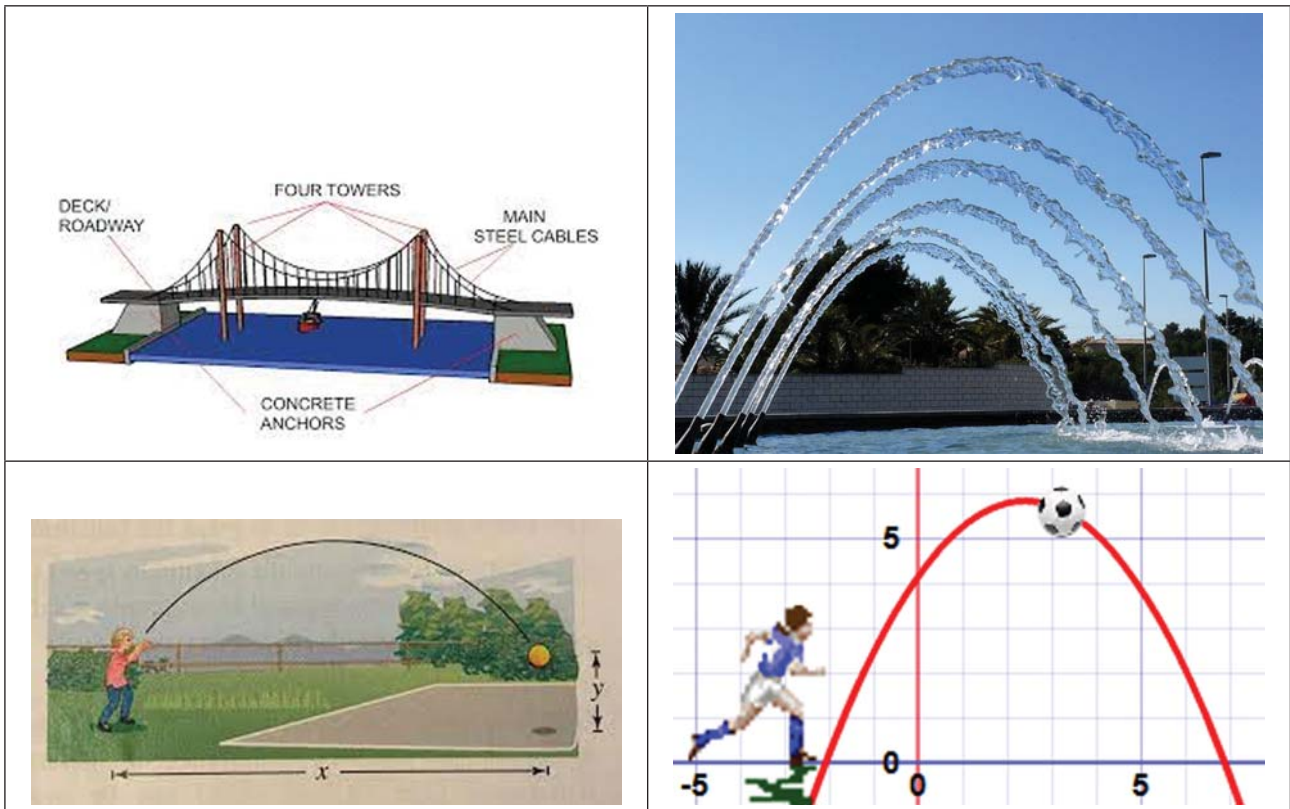
Приклад 2.2.11.А. Малюнки до теми «Подібні трикутники»



Приклад 2.2.11.Б. Малюнки до теми «Синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника»



Приклад 2.2.11.В. Малюнки до теми «Моделювання квадратичної функції»



2.2.12. Дидактичні ігри

Для груп (пар) доцільно пропонувати і різноманітні дидактичні ігри, коли кожен учасник групи (пари) відіграє певну роль або виконує певне завдання.

Наведемо приклад дидактичної гри «У банку», яку можна запропонувати учням у 5 класі під час вивчення теми «Десяткові дроби». Двом учням пропонують однакові картки з діалогом, у якому вони мають заповнити пропуски. Спочатку вони працюють окремо, а потім озвучують діалог в парі (один грає роль працівника банку, а інший — клієнта). (Додається курс валют.)

Приклад 2.2.12.А. Картки до теми «Дії з десятковими дробами»

К а р т к а 1

Працівник банку: Вітаю вас у нашому банку. Чим я можу вам допомогти?

Клієнт: Я хочу обміняти іноземну валюту на гривні.

Працівник банку: Яка у вас валюта?

Клієнт: 40 доларів.

Працівник банку: Загальна сума, яку ви отримаєте, — _____ гривень.

Клієнт: Я з вами _____ (згоден, не згоден)

К а р т к а 2

Клієнт: Доброго дня! Мені потрібно здійснити обмін валюти. Я маю 800 грн. Скільки євро я можу отримати?

Працівник банку: Ви отримаєте _____ євро.

Клієнт: Скільки ви сказали? За моїми підрахунками я отримую _____

За допомогою таких карток легко показати прикладну спрямованість математики, організувати парну роботу в класі, привчати учнів перевіряти одне одного, а також не боятися творчо опрацьовувати завдання (адже учням можна пропонувати складати свої діалоги експромтом).

У підручнику «Математика. 5 клас» (Бевз, 2022) запропоновано завдання-ігри, де один учень із пари дає завдання другому, який має його розв'язати, після чого вони міняються ролями.

1358. Гра. Один учень/учениця має показати нове місцезнаходження коми у числі **4 5 6 7, 8 9 6 3**, а інший учень/учениця має назвати число, на яке при цьому треба помножити задане число. Потім поміняйтеся ролями.

1633. Гра. Один учень/одна учениця має описати одну із фігур у мішечку, а інший/інша має вгадати, що це за фігура. Потім поміняйтеся ролями.



Зазвичай учитель відводить певний час на розв'язування такого завдання. Наприклад, якщо вчитель відвів парам на роботу із завданням 2 хв, то після закінчення часу (незалежно від того, скільки разів кожен учень виступив у якій ролі) гра припиняється, і вчитель може одній парі запропонувати програти гру на загальний клас так, щоб кожен виступив у кожній ролі по одному разу.

Але роботу з такими іграми можна організувати й інакше. Наприклад, учитель може встановити, скільки разів учні мають помінятися ролями в парі. Або ж учні можуть не просто надавати одне одному зворотний зв'язок щодо правильності відповіді, а й виставляти бали (наприклад, за кожну правильну відповідь учасник отримує 1 бал). У такому разі гра може припинятися тоді, коли якийсь учень набере певну кількість балів (наприклад, 5 балів).

Учням дуже до вподоби різноманітні дидактичні ігри для груп (пар), у яких вони самі придумують певні дані. Такі завдання сприяють формуванню в учнів креативного та прогностичного мислення і можуть бути як усними так і письмовими.

Наведемо ще декілька прикладів таких завдань з підручників математики для 5 і 6 класів (Бевз, 2022; Бевз, 2023, Ч.1) для пар і для груп.

Для пар

573. Гра. Хтось один/одна пише багатоцифрове число, але закриває всі цифри, крім останньої, а інший/інша має сказати, чи ділиться це число на 2, 5 або 10. Поміняйтесь ролями.



?

0 — ділиться на 2, 5, 10;
7 — не ділиться на 2, 5, 10;
6 — ділиться на 2,
не ділиться на 5, 10.

347. Гра. Один з учнів/одна з учениць записує істинну рівність, що містить одну дію множення, а другий/друга має записати відповідні 2 рівності, що містять ділення.



$$-8 \cdot 7 = -56$$



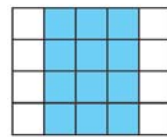
$$-56 : (-8) = 7, \quad -56 : 7 = -8.$$

Потім учні міняються ролями.

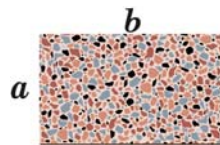
58. Гра. Побудуйте координатну пряму. Один/одна із вас має поставити на ній точку, а інший/інша — показати симетричну їй точку відносно початку координат.



1376. Один учень/учениця має вирізати з аркуша паперу в клітинку прямокутник. А інший учень/інша учениця має знайти його площу двома способами. Пам'ятайте, довжина сторони клітинки зошита 0,5 см. Потім учні міняються ролями.



804. Гра. Один з учнів/одна з учениць задає виміри плитки у звичайних дробах, а інший/інша знаходить її площу. Потім поміняйтеся ролями.



Для груп

390. Гра. Один з учнів/одна з учениць записує буквений вираз, другий/друга записує вираз, що відрізняється лише коефіцієнтом, а третій/третя шукає їх суму.



291. Гра. Один учень/одна учениця називає ціле число, а другий/друга вказує, до якого степеня треба піднести це число. Третій учень/третя учениця визначає, додатним чи від'ємним є значення такого виразу.



527. Гра. Один учень/одна учениця записує число, другий/друга — ще одне. Третій/третя знаходить найменше спільне кратне цих чисел. Потім учні/учениці міняються ролями.



2.2.13. Поєднання декількох технологій

Залежно від теми та мети уроку, рівня класу, кількості часу, що вчитель відводить на кооперативне навчання, використовують різні технології. Учитель також може поєднувати декілька технологій. Наприклад, побудувати урок на основі технології «*Центри*», але в одному з *центрів* буде пропонувати завдання на основі технології «*Завжди, іноді, ніколи*».

Наведемо приклад поєднання технології «*Станції*» та «*Прогулянка галереєю*» для уроку узагальнення та систематизації на тему «*Функції*».

Учням пропонують відвідати *станції*:

1. Лінійна функція.
2. Квадратична функція.
3. Функція квадратного кореня.
4. Обернена пропорційність.
5. Показникова функція.
6. Логарифмічна функція.
7. Тригонометричні функції.

На кожній з них вони мають написати все, що пам'ятають з озвученої теми на плакатах. Учитель використовує секундомір, щоб підказувати, коли учням час переходити від однієї *станції* до іншої (від однієї теми до іншої). Після того як учні пройдуть усі *станції*, вони розміщують свої плакати на стіні і групи оглядають результати за технологією «*Галерея*». Учні обговорюють написане та разом визначають, чи вся інформація правильна.

2.2.14. Використання Desmos для організації роботи в групах під час дистанційного навчання

Під час упровадження дистанційного та змішаного навчання математики багато вчителів відчувають дискомфорт через те, що вони не можуть бачити роботу своїх учнів у реальному часі та організувати їх групову роботу.

Використання в навчальному процесі онлайн-платформ, різноманітних онлайн-дошок та спільних документів дає змогу вчителю відслідковувати роботу учнів та залучати їх до роботи в групах і парах. Найчастіше для цього вчителі використовують Google Jamboard, Whiteboard.fi, Whiteboard.chat, GeoGebra або Desmos. Усі ці сервіси є безкоштовними, хоча деякі з них мають платні функції або певні обмеження (деякі мають готові шаблони, які вчителі можуть змінювати). Зазвичай учні отримують доступ до ресурсу, перейшовши на сайт та ввівши код або натиснувши на унікальне посилання. За допомогою системи керування навчанням, як-от Canva або Google Classroom, у вчителя є можливість призначати конкретні активності лише для певних класів.

Використання наведених онлайн-ресурсів дає можливість бачити роботу всіх учнів одночасно. У результаті вчитель може коментувати роботи учнів практично одразу. Це не лише дає змогу підтримувати зацікавленість учнів, а й допомагає охопити увагою їх усіх, особливо тих, які зазвичай не висловлюються.

Два онлайн-ресурси, GeoGebra та Desmos, заслуговують на особливу увагу з боку вчителів математики, бо вони дають змогу учням працювати з анімацією (зокрема, керувати нею). Учні можуть пересувати повзунки або інші елементи керування, щоб побачити, як певні параметри впливають на математичні явища. Наведемо приклад завдання з анімацією, запропонованого в Desmos на тему «Площа трикутника».

Знайдіть площу трикутника №1

Знайдіть площу трикутника.
Скористайтеся інструментом створення ескізу, якщо це допоможе знайти відповідь.

Відправити

Дії вчителя Приклади відповідей

За допомогою GeoGebra та Desmos учні можуть використовувати вбудовані редактори формул та графічні калькулятори. Обидва сервіси пропонують у бібліотеках багато безкоштовних готових завдань, які вчителі можуть змінити або налаштувати під себе, щоб їм не довелося починати з нуля.

Desmos є потужним онлайн-інструментом і може бути використаний для організації парної та групової форм роботи під час дистанційного чи змішаного навчання. Він має функцію віртуальної дошки, на якій учні можуть працювати разом у режимі реального часу. Вони можуть обмінюватися своїми ідеями, розв'язувати математичні завдання, спільно створювати малюнки чи графіки тощо.

Учитель може створювати завдання в Desmos, які потрібно виконувати в парах. Наприклад, створити графік функції та попросити учнів дослідити за ним властивості функції. Учні можуть обговорювати свої результати в онлайн-чаті або на форумі навчальної платформи.

Desmos зменшує потребу робити копії, вирізати картки та готувати будь-який роздатковий матеріал. Можливість переглядати роботи всіх

учнів одночасно допомагає вчителю швидко визначити, хто має проблеми і потребує допомоги.

Діяльність, організована на платформі Desmos, має низку переваг. Запропоновані активності розміщуються на слайдах, які дають можливість орієнтуватися, що вміщується на екрані, і контролювати темп уроку. Інформаційна панель учителя дає змогу переглядати прогрес учнів, писати коментарі та ділитися роботами учнів.

Сортування карток у Desmos допомагає учням збільшити словниковий запас, пов'язуючи математичні терміни з їх означеннями та малюнками. Потужна вбудована мова сценаріїв Desmos дає змогу вчителю змінювати вміст слайдів на основі записів учнів. Наприклад, слайди можуть автоматично перевіряти відповіді, уведені учнями.

Сервіс має певні обмеження за умови використання під час синхронних онлайн-уроків — учні повинні запуснути дві програми: Desmos та відеозв'язок. Залежно від пристрою, яким вони користуються, або якості підключення до мережі Інтернет, деяким учням може бути важко встигати за уроком. Крім того, є певна специфіка введення математичних формул на платформі, з якою вчитель має ознайомити учнів.

Незважаючи на ці труднощі, використання Desmos урізноманітнює діяльність учнів під час будь-якого навчання (традиційного, змішаного чи дистанційного) та суттєво покращує їх залученість під час уроку.

Щоб навчитися створювати уроки за допомогою Desmos, потрібно перейти за лінком: <https://cutt.ly/1wrMPJ1x> — або за посиланням у QR-коді.



Висновки

У своїй буденній діяльності людина щодня взаємодіє з іншими. Тож навчити учнів правилам цієї взаємодії — важливе завдання шкільної освіти.

За допомогою впровадження в процес навчання математики групової (парної) форм роботи учні набувають досвіду спілкування з однолітками, вчаться працювати в команді, висловлювати свою думку, відстоювати її, чути думки інших, дискутувати, змінювати свої погляди, переконувати, іти на компроміс, розподіляти роботу, оцінювати свою роботу в групі та роботу інших учнів, презентувати результати своєї роботи тощо.

Багаторічні дослідження показують, що кооперативне навчання може покращити навчальні досягнення учнів.

Для того щоб навчання в групі було дійсно продуктивним, важливо правильно його організувати. Спершу ознайомити учнів зі специфікою такої роботи, надати інструкції та ознайомити із завданням, потім запропонувати об'єднатися в групи для його виконання, презентувати результати роботи, оцінити свій внесок та внесок інших учнів у роботу групи, провести рефлексію.

Щоб учні легше і швидше організовувалися, працюючи в групах (парах), доцільно їх ознайомити з різними технологіями навчання.

Під час групової форми роботи учнів змінюється роль учителя. Він із транслятора знань перетворюється на організатора, що допомагає здобути чи закріпити знання учням за допомогою взаємонавчання.

Групову (парну) форму роботи можна організувати не лише під час традиційного, а й під час змішаного чи дистанційного навчання. У цьому вчителю стануть в пригоді сучасні сервіси відеозв'язку, що допомагають клас ділити на групи в окремих залах, спільні документи, а також сервіс Desmos, що дає змогу виконувати завдання декільком учням.

Групова (парна) форма роботи дає змогу підвищити навчально-пізнавальну активність учнів, сприяти формуванню в них не лише предметної, а й ключових компетентностей.

Література

1. Бевз, Г.П., Бевз, В.Г., Васильєва, Д.В., та Владімірова, Н.Г. (2022). Математика: підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Видавничий дім «Освіта». URL https://lib.imzo.gov.ua/wa-data/public/site/books2/5kl-nush/math-galuz/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0_5_%D0%BA%D0%BB_%D0%95%D0%BB_%D0%92%D0%B5%D1%80.pdf
2. Бевз, Г.П., Бевз, В.Г., Васильєва, Д.В., та Владімірова, Н.Г. (2023). Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 1. К.: Видавничий дім «Освіта».
3. Бевз, Г.П., Бевз, В.Г., Васильєва, Д.В., та Владімірова, Н.Г. (2023). Математика: підручник для 6 класу закладів загальної середньої освіти. Частина 2. К.: Видавничий дім «Освіта».
4. Білаш, І. С. (2019). Розвиток комунікативної компетентності учнів на уроках математики через використання групових форм роботи. *Педагогіка та психологія*, №1., 23-28.
5. Выготский, Л.С. Педагогическая психология. М.: Педагогика-Пресс, 1996.
6. Гладун, А. В. (2017). Групові форми роботи на уроках математики як засіб активізації пізнавальної діяльності учнів. *Наукові записки. Серія: Педагогіка та психологія*, т. 38., 35-39.
7. Глазова, О.В., та Савіна, Л.В. (2013). Інтерактивні форми роботи у навчанні математики. *Науковий вісник Полтавського університету економіки і торгівлі. Серія «Педагогіка»*, вип. 1 (58), 94-99.
8. Головащук, М. І. (2018). Групові форми роботи на уроках математики в середній школі. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*, №6 (80), 133-139.
9. Державний стандарт базової середньої освіти. (2020). URL: <https://imzo.gov.ua/derzhavni-standarty-bazovoi-seredn-oi-osvity/>
10. Маркова, О.М. (2020). Використання групових форм роботи на уроках математики для розвитку творчого мислення учнів. *Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. Педагогічні науки*, вип. 2 (98), 104-110.
11. Пометун, О. І. (2007). Енциклопедія інтерактивного навчання. Київ. https://repository.ldufk.edu.ua/bitstream/34606048/24841/1/%d0%95%d0%bd%d1%86%d0%b8%d0%ba%d0%bb%d0%be%d0%bf%d0%b5%d0%b4%d1%96%d1%8f%20%d1%96%d0%bd%d1%82%d0%ba%d1%80%d0%b0%d0%ba%d1%82%d0%b8%d0%b2%d0%bd%d0%be%d0%b3%d0%be%20%d0%bd%d0%b0%d0%b2%d1%87%d0%b0%d0%bd%d0%bd%d1%8f_2007.pdf
12. Пометун, О.І., та Пироженко, Л.В. (2005). Сучасний урок: інтерактивні технології навчання : навч.-метод. посіб. Київ : А.С.К..
13. Пометун, О. І., та Гупан, Н. М. (2017) *Використання кооперативного навчання учнів у загальноосвітній школі в Україні: практика і проблеми* Scientific Letter of Academic society of Michal Baludansky, 5/2, 88-92. <https://lib.iitta.gov.ua/713432/1/Pometun,Gupan.pdf>
14. Солодовник, О.В. (2018). Методика використання групових форм роботи на уроках математики. *Наукові записки. Серія: Педагогіка та психологія*, т. 48, 49-53.
15. Сулова, Т.І. (2016). Особливості використання інтерактивних методів навчання молодших школярів. *Початкова освіта*, №20, 4—29.
16. Тягай, І.М. (2015). Інтерактивне навчання у вищій школі: навчально-методичний посібник для організації самостійної роботи магістрів. Умань: ФОП Жовтий О.О.
17. Тягай І.М. (2017). Форми інтерактивного навчання математичних дисциплін майбутніх учителів математики: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. URL: https://npu.edu.ua/images/file/vidil_aspirant/dicer/%D0%94_26.053.03/Tiagai.pdf
18. Andreasen, J. B., & Hunt, J. H. (2012). Using math stations for commonsense inclusiveness. *Teaching Children Mathematics*, 19(4), 238-246. URL: <http://www.nctm.org/Publications/teaching-children-mathematics/2012/Vol19/Issue4/Using-Math-Stations-for-Commonsense-Inclusiveness>

19. Artzt, A. & Newman, C. M. (1997). *How to use cooperative learning in the mathematics class* (2nd ed.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. URL: <https://www.amazon.com/How-Cooperative-Learning-Mathematics-Class/dp/0873534379>
20. Bernstein, E., Shore, J., & Lazer, D. (2018). How intermittent breaks in interaction improve collective intelligence. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(35), 8734-8739. URL: <http://www.pnas.org/content/115/35/8734>
21. Brookhart, S. M. (2017). *How to give effective feedback to your students* (2nd ed.). Alexandria, VA: ASCD. URL: <http://www.ascd.org/ASCD/pdf/siteASCD/publications/books/How-to-Give-Effective-Feedback-to-Your-Students-2nd-Edition-sample-chapters.pdf>
22. Bruffee, K. A. (1995). Sharing our toys: Cooperative learning versus collaborative learning. *Change: The Magazine of Higher Learning*, 27(1), 12-18. URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00091383.1995.9937722>
23. Bruner, J. S., Goodnow, J. J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. London, UK: Chapman & Hall.
24. Burns, M. (1990). The math solution: Using groups of four. In N. Davidson (Ed.), *Collaborative learning in mathematics: A handbook for teachers* (pp. 21-46). Menlo Park, CA: Addison-Wesley. URL: <https://www.amazon.com/Cooperative-Learning-Mathematics-Handbook-Teachers/dp/0201232995>
25. Butman, S. M. (2014). A new twist on collaborative learning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 20(1), 52-57. URL: http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2014/Vol20/Issue1/Mathematical-Explorations_-A-New-Twist-on-Collaborative-Learning
26. Chauvot, J. & Benson, S. (2008). Card sorts, state tests, and meaningful mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(7), 390-397. URL: <http://www.nctm.org/Publications/mathematics-teaching-in-middle-school/2008/Vol13/Issue7/Card-Sorts,-State-Tests,-and-Meaningful-Mathematics>
27. Collaborative learning vs. cooperative learning: What's the difference? (2017, March 5). URL: <http://resourced.prometheanworld.com/collaborative-cooperative-learning>
28. Johnson, D. W., Johnson, R. T. & Holubec, E. J. (1994). *Cooperative Learning in the Classroom*, Association for Supervision and Curriculum Development.
29. De Lisi, R. & Golbeck, S. L. (1999). Implications for Piagetian theory for Peer Learning. In A. M. O'Donnell & A. King (Ed.), *Cognitive perspectives on peer learning*. New York: Routledge. URL: <http://www.taylorfrancis.com/books/9781410603715>
30. Ferlazzo, L. (2016). Collaborative learning, Common Core, and ELLs. *Edutopia*. URL: <http://www.edutopia.org/blog/collaborative-writing-common-core-ells-larry-ferlazzo-katie-hull-sypnieski>
31. Ferlazzo, L., & Sypnieski, K. H. (2018). *The ELL teacher's toolbox: Hundreds of practical ideas to support your students*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.
32. Frey, N. & Fisher, D. (2010). Making group work productive. *Educational Leadership*, 68(1). URL: <http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/sept10/vol68/num01/Making-Group-Work-Productive.aspx>
33. Gay, G. (2018). *Culturally responsive teaching: Theory, research, and practice* (3rd ed.). New York: Teachers College Press. URL: <https://www.amazon.com/Culturally-Responsive-Teaching-Multicultural-Education/dp/0807758760/>
34. Hess, K. K. (2019). Deepening student understanding with collaborative discourse. *ASCD Express*, 14(22). URL: <http://www.ascd.org/ascd-express/vol14/num22/deepening-student-understanding-with-collaborative-discourse.aspx>
35. Jacobs, G. M. (2014). *Collaborative learning or cooperative learning? The name is not important; flexibility is*. URL: http://www.academia.edu/6997708/Collaborative_Learning_or_Cooperative_Learning_The_Name_Is_Not_Important_Flexibility_Is
36. Johnson D. W., & Johnson, R. (1989). *Cooperation and competition: Theory and research*. Edina, MN: interaction Book Company.

37. Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2002). Learning Together and Alone: Overview and meta-analysis. *Asia Pacific Journal of Education*, 22(1), 95-105. URL: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/0218879020220110>
38. Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. *Educational Researcher*, 38(5), 365-379. URL: <http://journals.sagepub.com/doi/10.3102/0013189X09339057>
39. Lui A., & Andrade, H. (2015). Student peer assessment. In R. Gunstone (Ed.), *Encyclopedia of Science Education*. Dordrecht: Springer. URL: http://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-94-007-6165-0_461-3.pdf
40. Martin, K. (2019, May 17). What is the difference between learning centers and stations in class? *The Classroom*. URL: <http://www.theclassroom.com/difference-learning-centers-stations-class-7969725.html>
41. Marzano, R. J., Pickering, D. J., Pollock, J. E. (2001). *Classroom instruction that works: research-based strategies for increasing student achievement*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development. URL: <https://www.amazon.com/Classroom-Instruction-That-Works-Research-Based/dp/0871205041>
42. McTighe, J., & Lyman, Jr. F. T. (1988). Cueing theory in the classroom: The promise of theory-embedded tools. *Educational Leadership*, 45(7), 18-24. URL: http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_198804_mctighe.pdf
43. Min, H.-T. (2006). The effects of trained peer review on EFL students' revision types and writing quality. *Journal of Second Language Writing*, 15(2), 118-141. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S106037430600004X>
44. ProofBlocks. A visual approach to proof. URL: https://www.proofblocks.com/resources/resources/demonstration_videos.html
45. Protocols_Handout. URL: https://www.gse.harvard.edu/sites/default/files/Protocols_Handout.pdf
46. Rockwood III, H. S. (1995), Cooperative and collaborative learning. *The National Teaching & Learning Forum*, 4(6), 8-9. URL: <http://onlinelibrary.wiley.com/toc/21663327/1995/4/6>
47. Rumack, A. M., & Huinker, D. (2019). Capturing mathematical curiosity with notice and wonder. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 24(7), 394-399. URL: <http://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/2019/Vol24/Issue7/Capturing-Mathematical-Curiosity-with-Notice-and-Wonder>
48. Schniedewind, N., & Davidson, E. (2000). Differentiating cooperative learning. *Educational Leadership*, 58(1), 24-27. URL: <http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/sept00/vol58/num01/Differentiating-Cooperative-Learning.aspx>
49. Schulten, K. (2018, November 15). Writing for an audience beyond the teacher: 10 reasons to send student work out into the world. *New York Times*. URL: <http://www.nytimes.com/2018/11/15/learning/writing-for-audience-beyond-teacher.html>
50. Silver, H. F., Strong, R. W., & Perini, M. J. (2009, January 4). How the strategic teacher plans for concept attainment. *ASCD Express*, 4. URL: <http://www.ascd.org/ascd-express/vol4/420-silver.aspx>
51. Slavin, R. E. (2014). Making cooperative learning powerful. *Educational Leadership*, 72(2), 22-26. URL: <http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/sept98/vol56/num01/Making-Cooperative-Learning-Equitable.aspx>
52. Tomlinson, C. A. (2014). *The differentiated classroom: Responding to the needs of all learners* (2nd ed.). Alexandria, VA: ASCD.
53. VanAusdal, K. (2019). Collaborative classrooms support social-emotional learning. *ASCD Express*, 4(22). URL: <http://www.ascd.org/ascd-express/vol14/num22/collaborative-classrooms-support-social-emotional-learning.aspx>
54. Venables, D. R. (2015). The case for protocols. *Educational Leadership*, 72(7). URL: <http://www.ascd.org/publications/educational-leadership/apr15/vol72/num07/The-Case-for-Protocols.aspx>