

## Математические модели в экологии

Семериков С. А., Завизена Н. С.

Моделирование – эффективный инструмент, позволяющий объединить знания из разных учебных дисциплин. Моделирование вообще и компьютерное моделирование в частности способны выполнять важную гуманистическую функцию, ведь возможность спрогнозировать последствия определенных антропогенных факторов позволяет избежать опасных и нежелательных явлений даже в глобальных масштабах (изменение климата планеты, ядерная зима и т.п.). Следовательно, оно в состоянии формировать содержание и стиль политического мышления в современном обществе.

Для любого объекта в зависимости от цели исследования может быть построено много разных моделей. Например, если взять такую сложную систему, как популяция животных, то для описания процессов жизнедеятельности будет использована модель отдельного животного как биологического объекта, для моделирования поведения животных в стае исследователь воспользуется другой, этологической (поведенческой) моделью, а для прогнозирования динамики изменения количества особей будет создана совсем другая, экологическая модель. Тогда и оказывается, что свойства объекта, существенные при построении одной модели, могут оказаться совершенно незначительными для другой. Цель исследователя – найти золотую середину: составить модель процесса, не лишая его основных черт.

Первые попытки описания динамики численности отдельных популяций и их сообществ относятся еще к 18-му столетию. Современная же математическая экология зародилась в 20-х годах нашего столетия – именно в это время в биологию начали проникать методы математики и идеи моделирования.

Математическая экология – это наука об отношениях растительных и животных организмов и создаваемых ими сообществ между собой и с окружающей средой на основе изучения соответствующих математических моделей.

Перед современной экологией стоит немало проблем, но основными из них, на наш взгляд, являются следующие:

- прогнозирование состояния экосистемы под воздействием антропогенных факторов;
- выбор оптимальной стратегии использования разных возобновимых природных ресурсов;
- управление популяциями и их сообществами для борьбы с вредителями сельскохозяйственных культур не путем использования ядохимикатов, а средствами, связанными с использованием естественных врагов вредителей.

В этой статье мы рассмотрим несколько примеров математического моделирования в биологии, с помощью которых познакомимся с новыми подходами и идеями, вытекающими из специфики данной науки. При этом традиционно мы будем стараться идти от простого к сложному, то есть сначала рассмотрим максимально упрощенные модели, а затем постепенно будем их совершенствовать.

### МОДЕЛЬ МАЛЬТУСА

Одна из первых моделей динамики роста популяций принадлежит Т. Мальтусу (1766–1834), английскому экономисту и священнику, который в своем труде "Опыт о законе народонаселения" (1798 г.) утверждал, что в человеческом обществе, как и во всей живой природе, существует абсолютный закон безграничного размножения особей. При этом рост населения Земли идет в геометрической прогрессии, в то время как средства существования увеличиваются лишь в арифметической.

Модель Мальтуса в математической форме выглядит довольно просто. Рассмотрим колонию микроорганизмов, обитающую в условиях неограниченных ресурсов питания. В силу размножения и смертности число живых организмов в этой колонии будет меняться с течением времени. Найдём этот закон изменения.

Пусть  $N(t)$  – численность изучаемой популяции в момент времени  $t$ , а  $N(t+dt)$  – численность изучаемой популяции в момент времени  $t+dt$ . Величина  $dt$  – это малый интервал времени, выбор которого зависит от модели. Тогда разность  $N(t+dt) - N(t) = dN$  даёт приращение функции  $N(t)$  – количества особей в популяции – за промежуток времени от  $t$  до  $t+dt$ . Относительный прирост численности популяции – отношение  $dN/dt$ .

Согласно Мальтусу, скорость прироста популяции прямо пропорциональна её численности в данный момент, или

$$dN/dt = aN,$$

где  $a$  – коэффициент пропорциональности.

В модели Мальтуса эта величина для конкретной популяции сохраняется постоянной и в ней отражены мгновенная рождаемость и смертность особей популяции. В простейшем случае коэффициент  $a$  – разность между коэффициентами рождаемости и смертности. Поэтому величина  $a$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Эта простейшая модель динамики популяции называется мальтусовской, или экспоненциальной моделью, так как решением этого уравнения является экспоненциальная функция

$$N(t) = N(0) \exp(at),$$

где  $N(0)$  – численность популяции в начальный момент времени  $t=0$ . Исходя из свойств экспоненциальной функции, модель Мальтуса при  $a > 0$  даёт бесконечный рост численности популяции, а при  $a < 0$  численность популяции асимптотически стремится к нулю, что ведёт к гибели популяции.

Рассмотрим два произвольных момента времени  $t$  и  $t+dt$ . Пусть в момент времени  $t$  численность популяции равна  $N(t)$ , а в момент времени  $t+dt$  численность популяции равна  $N(t+dt)$ .

Таким образом, изменение численности популяции за время  $dt$  составляет величину

$$dN = N(t+dt) - N(t),$$

или

$$N(t+dt) = N(t) + dN.$$

Отсюда

$$N(t+dt) = N(t) + a N(t) dt$$

Это уравнение является разностным аналогом экспоненциального уравнения Мальтуса. Оно означает, что зная численность попу-

ляции в любой определенный момент времени, можно всегда найти численность популяции через промежуток времени  $dt$ .

Таким образом, можно проследить динамику популяции на довольно большом промежутке времени  $T$ , последовательно вычисляя численность популяции через каждый интервал времени  $dt$ .

Модель Мальтуса является одной из первых моделей в экологии, описывающей поведение популяций, имеющих неограниченные ресурсы обитания. Данная модель при  $a > 0$  дает бесконечный рост популяции, при  $a < 0$  необратимое вымирание ее, а при  $a = 0$  популяция находится в равновесном состоянии. Данная модель, несмотря на свой примитивизм, представляет практический интерес, поскольку воспроизводит рост популяции определенных микроорганизмов на ограниченном промежутке времени. Изменения численности популяций растительного и животного мира нельзя описать простым законом Мальтуса, на динамику роста влияют многие взаимосвязанные причины - в частности, размножение каждого вида саморегулируется и видоизменяется так, чтобы этот вид сохранялся в процессе эволюции.

## ОДНОЛЕТНЯЯ ОДНОВИДОВАЯ ПОПУЛЯЦИЯ

Несмотря на то, что закон неограниченного экспоненциального роста и был предложен для естественных популяций (например, для популяции человека Мальтусом, 1798, Медоузом и др., 1972), надо помнить, что природные ресурсы ограничены. Это приводит к наличию верхнего уровня численности популяции, который обозначим через  $K$ .  $K$  нему стремится численность, и при достижении этого уровня или его превышения она снова падает, так как недостаток пищи вызывает голодание, что увеличивает смертность и подавляет размножение. Темп возобновления истощенных ресурсов, например, вследствие увеличения производства пищи, определяет время восстановления популяции. Эти процессы приводят к тому, что численность популяции не поддерживается на постоянном уровне, а колеблется, иногда в очень широких пределах, около своего среднего значения, не превышающего максимальной численности, которую может обеспечить окружающая среда. Разработка моделей популяций помогает изучению механизмов стабилизации этих колебаний.

Общепринятой форма уравнения динамики популяции в среде с ограниченными ресурсами выглядит следующим образом:

$$dN = a ( 1 - N/K ) dt$$

Это уравнение называется уравнением Ферхюльста - Перла в честь бельгийского ученого П.Ферхюльста, который впервые предложил для его описания динамики человеческого населения (Verhulst, 1838) и американского эколога Р.Перла (Pearl, Reed, 1920; Pearl, 1925, 1928), который также получил это уравнение и широко использовал его для описания динамики биологических популяций. Кроме того, учитывая исторический приоритет, уравнение называют логистическим, как это делал сам П.Ферхюльст.

Логистическое уравнение - обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которые решаемы в курсе высшей математики. Получим его решение относительно  $N(t)$ , полагая, что  $N = N(0)$  при  $t = 0$ .

$$N(t) = (K \exp(at) N(0)) / (K - N(0)(1 - \exp(at)))$$

Данное выражение является аналитическим решением логистического уравнения и определяется тремя независимыми параметрами  $N(0)$ ,  $K$ ,  $a$ . Первый из них указывает начальное значение числен-

ности  $N(0)$  при  $t(0)=t$ , второй - высоту плато насыщения, к которому стремится  $N(t)$  при  $t(0)=t$  (т.е. предельную для данного вида численность популяции), а параметр  $a$  задает крутизну начального роста.

Рассмотрим два произвольных момента времени  $t$  и  $t+dt$ . Пусть в момент времени  $t$  численность популяции равна  $N(t)$ , а в момент времени  $t+dt$  численность популяции равна  $N(t+dt)$ .

Таким образом, изменение численности популяции за время  $dt$  составляет величину

$$dN = N(t+dt) - N(t)$$

Подставляя ее в логистическое уравнение, получим его разностный аналог, пригодный для практических расчетов на компьютере:

$$N(t+dt) = N(t) + a (1 - N/K) dt$$

Модель однолетней одновидовой популяции характеризует популяции с кратким периодом жизни и особями примерно одинакового возраста.

## ОДНОВИДОВАЯ МНОГОЛЕТНЯЯ ПОПУЛЯЦИЯ

Описанные выше модели применяются при описании популяции, особи которых достаточно однородны в отношении возраста или стадий онтогенеза, как, например, однолетние растения, животные с неперекрывающимися поколениями или микроорганизмы, в отношении которых вообще трудно говорить о возрасте отдельной особи. Однако имеется множество видов растений и животных, популяций которых в каждый момент времени состоят из особей разных возрастов или стадий онтогенетического развития, т.е. характеризуются разновозрастностью и онтогенетической гетерогенностью. В разном возрасте организмы предъявляют весьма различные требования к экологическим условиям и выполняют в экосистеме различные функции, что особенно хорошо видно на примере насекомых. Для таких видов построение сколько-нибудь адекватных популяционных моделей без учета возрастной гетерогенности оказывается невозможным. Если же поколения перекрываются, мы должны учитывать также определенную возрастную структуру, которую могут иметь некоторые популяции. Например, молодые (еще не размножающиеся) и взрослые особи сильно различаются по смертности, причем молодые, так как они не размножаются, вносят совершенно иной вклад в популяцию. Соображения о возрастных характеристиках популяций использовались демографами и статистиками, и на их основе развиты специальные методы для популяций с возрастной структурой, хотя и существуют общие закономерности, применимые к любым популяциям.

Для обозначения возраста особей введем в употребление неотрицательную действительную переменную  $k$ , которая в зависимости от выбираемого способа описания возрастных различий будет принимать дискретные или непрерывные значения и для каждого вида с индексом  $j$  ограничена максимальным для этого вида возрастом  $k(\max, j)$ .

Рассмотрим сначала дискретный вариант, когда весь интервал возможных возрастов  $[0, k(\max)]$  с помощью возрастающей последовательности точек  $0 < k(1) < k(2) < \dots < k(m) = k(\max) = k$  делится на  $m$  отрезков  $[0, k(1))$ ,  $[k(1), k(2))$ , ...,  $[k(m-1), k(m))$ . Все особи популяции распределяются на  $m$  возрастных групп таким образом, что организм, возраст которого  $k$  попадает в интервал  $[k(i-1), k(i))$ , относится к группе с номером  $i$  ( $i=1, \dots, m$ ).

Пусть общая численность популяций в момент времени  $t$  равна  $x(t)$ . Тогда, обозначая через  $x(t, i)$  количество особей в  $i$ -той группе, общую численность можно представить в виде суммы численностей всех возрастных групп

$$x(t) = x(t, 1) + \dots + x(t, m)$$

Теперь можно определить абсолютный возрастной состав популяции в момент времени  $t$  как  $m$ -мерный вектор

$$(x(t, 1), \dots, x(t, m)),$$

координаты которого показывают значение численностей соответствующих возрастных групп в данный момент времени.

Деление популяции на возрастные группы осуществимо в тех случаях, когда организмы данного вида обладают признаками, позволяющими точно определить возраст особи, например годовые кольца деревьев и кустарников, слоев нарастания чешуи у рыб, рогов у копытных и т.д. К сожалению, подобные диагностические показатели существуют далеко не у всех видов. Кроме того, для эколога часто бывает важен не абсолютный возраст данной особи, а достигнутая ею к этому возрасту стадия онтогенеза.

При популяционно-динамическом описании онтогенетического состава популяций необходимо прежде всего учитывать различия в способности особей к размножению. С этой целью обычно выделяется 3 группы особей:

- а) прегенеративных (молодых, еще не способных к размножению),
- б) генеративных (способных к размножению, хотя и необязательно размножающихся в данный момент) и
- в) постгенеративных (старческих, уже потерявших способность к размножению).

В зависимости от особенностей жизненного цикла конкретного вида и при наличии надежных диагностических признаков каждая из этих больших групп, в свою очередь, может подразделяться на более мелкие категории.

Для иллюстрации рассмотрим показатели абсолютного возрастного состава популяций калифорнийской секвойи, представленные в таблице.

Как можно из нее увидеть, в количественном отношении преобладают особи первых двух возрастных групп, на которые приходится почти три четверти всей численности популяций. Более того, особи первой возрастной группы составляют практически половину (43 %) от общей численности.

Номер возраст- ного класса	Возрастной ин- тервал в годах $k(i-1) - k(I)$	Число деревьев в данном клас- се $x(i)$	Доля от общей численности $p(i)$
1	0 - 20	1000	0.43
2	20 - 200	696	0.31
3	200 - 400	197	0.09
4	400 - 600	183	0.08
5	600 - 800	105	0.05
6	800 - 1000	65	0.03
7	1000	17	0.01
		2263	1.00

Пусть все выделенные в популяции онтогенетические группы перенумерованы индексом  $i$ , изменяющимся от 1 до  $m$ , где 1 - номер первой, а  $m$  - последней группы. С течением времени возрастной и онтогенетический состав популяции может существенно изменяться, что приводит к необходимости количественного описания этого процесса. В зависимости от специфики изучаемого вида и задачи исследования целесообразно использование дискретной или непрерывной формы описания динамики возрастного состава.

Для описания происходящего со временем изменения численности популяции удобно рассматривать популяцию по возрастным группам (в первую группу попадают все особи в возрасте до года, во вторую - все те не попавшие в первую группу особи, возраст которых меньше двух лет и т.д.). Пусть в первую возрастную группу входит  $p(1)$  особей, во вторую -  $p(2)$  особей и т.д. Смертность весьма упрощенно можно учесть, положив, что все особи вымирают, находясь в  $n$ -й возрастной группе, где  $n$  - некоторое фиксированное натуральное число. Ясно, что общее число особей в популяции есть  $p(1) + p(2) + \dots + p(n)$ .

Для каждой возрастной группы имеется свой коэффициент рождаемости  $b(i)$ . Если коэффициенты рождаемости для рассматриваемых возрастных групп соответственно равны  $b(1), b(2), \dots, b(n)$ , то годовой приплод, обусловленный присутствием в популяции  $i$ -ой возрастной группы с численностью  $p(i)$ , есть  $b(i)p(i)$ . Таким образом, годовой приплод по всей популяции есть

$$b(1)p(1) + b(2)p(2) + \dots + b(n)p(n).$$

В то же время, особи, принадлежащие  $i$ -й возрастной группе, через год перейдут в  $(i+1)$ -ю возрастную группу ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ), а особи, принадлежащие  $n$ -й группе, вымрут в течении года.

Модель становится значительно более точной в результате введения кроме коэффициентов рождаемости еще и коэффициентов выживания  $s(1), s(2), \dots, s(n)$  ( $0 < s < 1, i=1, \dots, n$ ). Считается, что если в текущем году  $i$ -я возрастная группа имеет численность  $p(i)$ , то в будущем году  $(i+1)$ -я возрастная группа будет иметь численность, равную  $s(i)p(i)$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ). При этом  $s(n)=0$  (мы по-прежнему считаем, что возраст особи не превосходит  $n$  лет). Годовой приплод за счет  $i$ -й группы в этом варианте модели по-прежнему считается равным  $b(i)p(i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), а распределение популяции по возрастным группам через год - имеющим вид

$$b(1)p(1) + b(2)p(2) + \dots + b(n)p(n) + \\ [ s(1)p(1) + s(2)p(2) + \dots + s(n)p(n) ].$$

Коэффициенты выживания, также как и коэффициенты рождаемости, выводятся на основе многолетних наблюдений за популяциями данного вида.

Таким образом, данная модель позволяет в любой момент времени получить возрастной срез популяции. Выполняя суммирование по всем группам, можно рассматривать динамику популяции в целом.

## МОДЕЛЬ ХИЩНИК - ЖЕРТВА

Ранее рассмотренные модели рассматривали идеализированные случаи, когда одна единственная популяция занимает всю отведенную ей экологическую нишу, в то время как в живой природе никакой организм не может жить в полной изоляции от других, а, сущес-

твоя в одной экологической нише, особи часто конкурируют. Конкуренция происходит из-за таких ограниченных ресурсов, как пища, пространство, вода и т.д., и в некоторых случаях один вид может уничтожить другой скорее с целью защиты, а не для использования в качестве источника пищи. Своеобразные проявления межвидовых взаимодействий иллюстрируются системами хищник - жертва и паразит - хозяин, когда один вид служит пищей другому. Действительно, некоторые хищники и паразиты могут использовать в качестве пищи только один вид, чтобы поддерживать свою жизнь и размножаться.

Научную основу изучения межвидовых отношений в природных сообществах заложил Ч.Дарвин, дальнейшее же развитие этой области биологической науки связано с именами Э.Геккеля, К.Мебиуса, Ф.Клементса, В.Шелфорда, Ч.Элтона. Крупным вкладом в разработку учения о межвидовых взаимодействиях в биоценозах явились труды Г.Ф.Морозова (1912), В.Н.Сукачева (1915, 1953), Л.Г.Раменского (1938), Д.Н.Кашкарова (1938), В.Н.Беклемишева (1951), Г.А.Новикова (1959), А.Г.Воронова (1963, 1985), Н.Н.Дроздова (1978, 1985). Особо следует отметить работы последних двух авторов, касающиеся биогеографических аспектов экологии и биоценологии.

Пусть плотность популяции жертвы обозначена через  $N_1$ , а хищника, живущего за ее счет, - через  $N_2$ . Предположим, что общая численность популяции как жертвы, так и хищника на рассматриваемой территории достаточно велика, так что можно пренебречь дискретностью числа особей. Считая все другие экологические факторы, отличные от плотностей  $N_1$  и  $N_2$ , постоянными, для описания скоростей размножения и гибели обеих популяций введем функции  $V(N_1, N_2, i)$  и  $D(N_1, N_2, i)$  ( $i=1, 2$ ). Если, кроме того предположить отсутствие миграции, то динамику двухвидовой системы  $(N(t,1), N(t,2))$  можно описать уравнениями:

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= V(N_1, N_2, 1) - D(N_1, N_2, 1) \\ dN_2/dt &= V(N_1, N_2, 2) - D(N_1, N_2, 2) \end{aligned}$$

Степень адекватности описания явления эксплуатации первого вида вторым с помощью уравнений будет зависеть от того, насколько правильно функции  $V(N_1, N_2, i)$  и  $D(N_1, N_2, i)$  выражают влияние плотностей  $N_1$  и  $N_2$  на размножение и отмирание в рассматриваемых популяциях.

Обозначив для краткости разность скоростей размножения и отмирания через  $f(N_1, N_2, i)$ , где

$$\begin{aligned} f(N_1, N_2, i) &= V(N_1, N_2, i) - D(N_1, N_2, i) \\ & \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

систему уравнений можно переписать в виде

$$\begin{aligned} dN_1/dt &= f(N_1, N_2, 1) \\ dN_2/dt &= f(N_1, N_2, 2). \end{aligned}$$

Из определения связи типа жертва - хищник вытекает, что функции  $f(N_1, N_2, 1)$  и  $f(N_1, N_2, 2)$  должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\begin{aligned} df_2/dN_1 &> 0 \quad (\text{жертва способствует размножению хищника}), \\ df_1/dN_2 &< 0 \quad (\text{хищник препятствует размножению жертвы}). \end{aligned}$$

Функции  $B(N_1, N_2, i)$  и  $D(N_1, N_2, i)$ , удовлетворяющие этим условиям и правдоподобно описывающие зависимость рождаемости и смертности жертвы и хищника от плотностей  $N_1$  и  $N_2$ , могут быть сконструированы следующим образом.

Предположим, что рождаемость жертвы зависит только от ее плотности, то есть  $b_1 = b_1(N_1)$ , так что абсолютная скорость размножения популяции жертвы равна:

$$B_1 = b_1(N_1)N_1.$$

Пусть, далее, в отсутствие хищника ( $N_2 = 0$ ) смертность жертвы задается функцией  $d_1 = d_1(N_1)$ , а при  $N_2 > 0$  количество особей жертвы, погибающее под влиянием хищника в расчете на каждую единицу хищника за единицу времени, зависит от текущей численности жертвы, и эта зависимость выражается функцией  $v(N_1)$ . Эта функция, называемая функцией выедания, обычно представляет собой ограниченную функцию, равную нулю при  $N_1 = 0$  и возрастающую до некоторого предельного значения  $v_{\max}$  при увеличении  $N_1$ .

Таким образом, абсолютная скорость смертности жертвы  $D(N_1, N_2, 1)$  представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$D(N_1, N_2, 1) = d_1(N_1)N_2 + v(N_1)N_2,$$

первое из которых описывает гибель от внутривидовой конкуренции, а второе – потери под влиянием давления эксплуататора, равные произведению функции выедания на плотность популяции хищника.

Рождаемость в популяции вида хищника примем пропорциональной удельной скорости потребления им пищи  $d_2 = gv(N_1)$ , где  $g$  коэффициент эффективности, показывающий, на сколько увеличивается рождаемость в популяции хищника при увеличении скорости потребления им пищи на единицу. После этого абсолютную скорость размножения хищника можно представить в виде

$$B(N_1, N_2) = gv(N_1)N_2$$

Наконец, предполагая, что в популяции хищника нет внутривидовой конкуренции и его смертность есть известная функция от количества пищи  $d_2 = d_2(N_2)$ , получаем значение абсолютной скорости смертности хищника:

$$D(N_1, N_2) = d(N_1)N_2.$$

Данная модель построена таким образом, что функция изменения числа жертв в момент времени  $t + dt$  зависит от числа жертв и хищников в момент времени  $t$ , а функция изменения числа хищников в этот же момент времени также зависит от числа жертв и хищников в момент времени  $t$ , только по другому закону.

Из математического уравнения, описывающего численность популяции жертв, следует, что в отсутствие хищников наблюдается рост этой популяции по закону Мальтуса. Аналогично популяция хищников в отсутствие жертв убывает по закону Мальтуса. Учет взаимодействия двух видов приводит к тому, что хищники способствуют сокращению роста жертв, а жертвы своим присутствием способствуют увеличению количества хищников. Такой характер развития каждого из видов отражается математическим уравнением их динамики.

Отличительной чертой модели хищник-жертва является колебательный характер ее решения. Кроме того, обращает на себя вни-



вание взаимное смещение графиков численности видов. Это смещение выражается в запаздывании колебаний численности хищников.

Таким образом, воспроизводится реальная ситуация, когда рост хищников наблюдается только после увеличения запасов пищи, т.е. жертв (с помощью аналогичной модели было описано поведение численности популяций зайцев и рысей в Канаде). Период колебаний зависит от способности воспроизводства жертв и коэффициента их поедания хищниками. В модели это регулируется изменением соответствующих коэффициентов.

## СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Все описанные выше модели представляли собой, по сути, одно или несколько дифференциальных уравнений первого порядка, которые имели аналитическое решение, легко преобразуемое в разностную схему для компьютерного расчета. Однако на практике не имеющему специального математического образования экологу редко приходится составлять, а тем более решать подобные уравнения: реальные ситуации моделировать на бумаге тяжело и малоэффективно. В большинстве случаев мы можем возложить построение экологических моделей на сам компьютер.

Рассмотрим задачу, максимально приближенную к реальности нашего региона:

При рекультивации отвалов на начальном этапе нам необходимо закрепить склон травянистыми растениями. На участке  $N \times M$  квадратных метров было высажено несколько видов растений, своей корневой системой препятствующих осыпанию склона, причем некоторые из этих растений - антагонисты. Способ высадки - прямоугольные участки фиксированного размера. В течение  $K$  недель за склоном проводились наблюдения, в результате которых обнаружилось, что некоторые растения исчезли, в то время как другие распространились на соседние участки. На отдельных участках началась ветровая эрозия; появились новые виды растений.

По имеющимся данным необходимо выяснить:

а) как зависит распространение растения от способа его высадки, высаживаемого количества и взаимодействия с другими растениями;

б) какова степень закрепления склона на различных участках;

в) какова доля привнесенных растений среди высаженных и их роль в закреплении склона.

Естественно, на все эти вопросы необходимо дать ответ в любой момент времени, то есть необходимо дать прогноз.

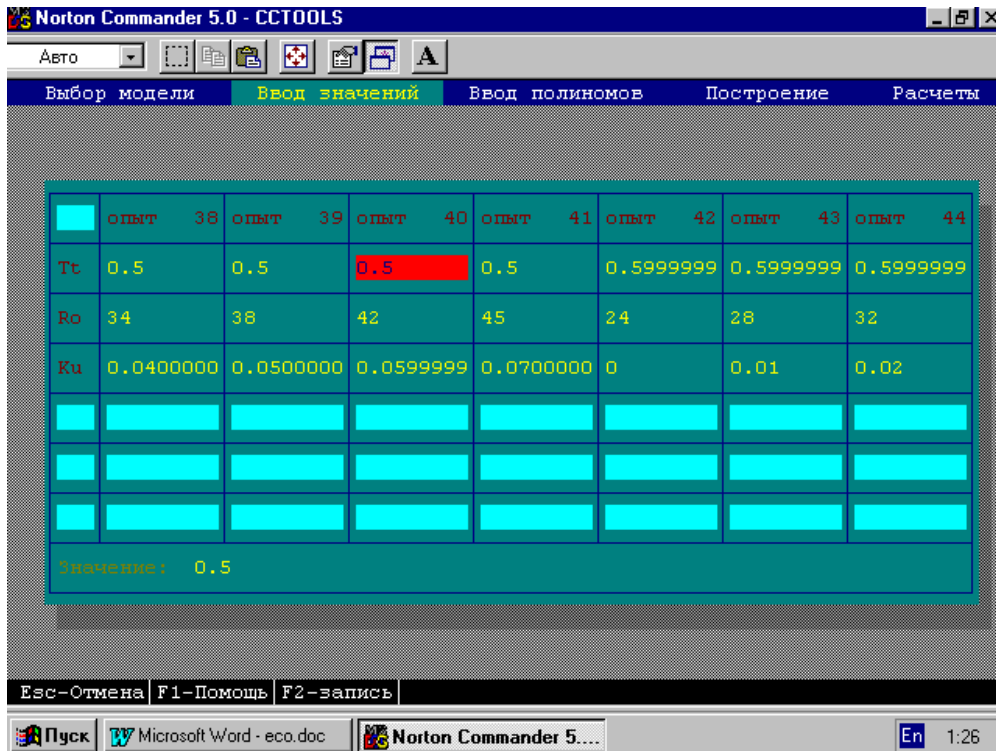
Пусть в начале опыта у нас было высажено  $v$  видов растений:  $R(1), R(2), \dots, R(v)$ . В процессе опыта обнаружилось, что было привнесено еще  $t$  растений:  $R(v+1), R(v+2), \dots, R(v+t)$ . Будем исходить из допущения (с целью уменьшения количества вычислений), что один квадратный метр у нас может занимать только одно растение. Тогда состояние исследуемого склона в  $i$ -ю неделю ( $i=1, 2, \dots, K$ ) можно представить в виде матрицы размером  $N \times M$ :

			R(b)	R(f) ... R(f)	R(g)	R(e)		
		R(c)	R(c)	R(f) ... R(a)	R(f)	R(d)	R(f)	
R(a)	R(b)	R(c)	R(f) ... R(a)	R(a)	R(c)	R(c)		
...	...	...	...	...	...	...	...	...
	R(e)	R(e)		R(f) ... R( )	R(a)			
	R(d)	R(d)	R(d)	R(d) ... R(a)	R(a)	R(b)		
	R(e)	R(d)	R(d)	R(d) ... R(b)	R(b)	R(b)		

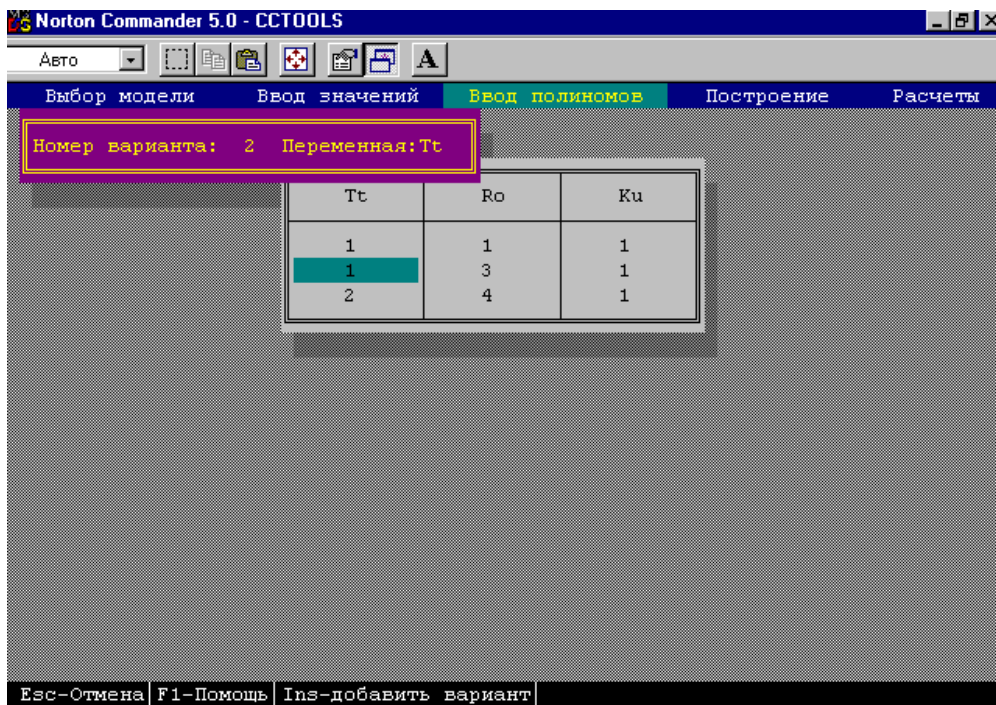
У исследователя есть  $K$  таких матриц (по одной матрице на каждую неделю). Общая задача теперь сводится к частной - найти такую матричную функцию, которая выполняла бы однозначное преобразование исходной матрицы к любой из следующих. Как правило, в этом случае применяют один из двух способов - либо строят интерполяционный полином от матрицы, либо пользуются методами регрессионного анализа (например, методом наименьших квадратов).

Выбор метода зависит от поставленной задачи - если нам необходимо получить точную карту склона в любую из недель эксперимента, то строится интерполяционный полином, если же нас интересует наилучшее приближение к реальному результату, позволяющее сделать корректный прогноз, то пользуются методом наименьших квадратов.

Несколько рисунков ниже иллюстрируют работу программы, призванной помочь в решении подобных задач. В таблицу были занесены данные 52 опытов (одно наблюдение в день), исследуемый участок имел размер  $10 \times 10$  метров, растений было 2 вида (обозначены шифрами  $Tt$  и  $Ku$ ),  $R_0$  - результат ранее проведенных расчетов (коэффициент эрозийности в процентном отношении).



По каждому значению мы высказываем гипотезу - какую степень должен иметь полином от этой переменной в процессе моделирования.



По имеющемуся набору наблюдений и высказанной гипотезе программа строит формулу расчета процента эрозийности.

The screenshot shows the Norton Commander 5.0 - CCTOOLS interface. The main window displays the following elements:

- Menu Bar:** Выбор модели, Ввод значений, Ввод полиномов, Построение, **Расчеты**
- Formula Field:**  $R_o = 95.45 * T_t - 50.43 * T_t^2 + 313.03 * K_u - 13.15$
- Table 1 (Observed Data):**

Tt	Ro	Ku
1	1	1
1	3	1
2	4	1
- Table 2 (Input Values):**

Tt	Ro	Ku
0.3	y	0.065
- Result Display:**

Значение: 0.065000  
 $R_o = 31.295420$   
 Номер варианта: 3
- Footer:** Esc-Отмена, F1-Помощь, Ins-Выбор, Enter-Конец выбора, F2-расчет, x-пер., y-рез.

Исследователя может потребоваться решение и обратной задачу - найти содержание одного из растений при известном проценте эрозийности и содержании другого. Для этого достаточно дать программе указание считать зависимой переменной (y) не  $R_o$ , а  $T_t$  или  $K_u$ . При этом, кроме конкретных вычислений, мы можем получить и графики зависимости по каждому растению, что позволяет сделать выводы о тенденциях изменения.

Именно так - автоматизированно - и должна проводиться обработка любых данных: ученый должен делать выводы и обобщать, а рутинные расчеты пусть проводит специально созданный для этого инструмент - компьютер. Поэтому, по мнению авторов, в образовании будущего биолога информатика должна занимать отнюдь не последнее место, особенно в том, что касается навыков составления моделей и статистической обработки экспериментальных данных.