

М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй

**Про зв'язок ймовірнісних моделей
з деякими іншими моделями реального світу**

1. Вступ. Відомий американський математик Уільям Феллер вважав, [1, с. 11-12], що, завдяки створеній видатним російським математиком Андрієм Миколайовичем Колмогоровим аксіоматичній теорії ймовірностей, ця теорія перейшла від етапу напівмістичних міркувань, які переважали ще у 20-х роках ХХ століття, до сучасного етапу її розвитку як суто математичної теорії, що має чисельні застосування у різних галузях діяльності людей.

Ілюстрації таких застосувань у процесі навчання і самонавчання теорії ймовірностей і учнів середніх шкіл, і студентів університетів, і працюючих учителів відіграють важливу (а можливо, й вирішальну) роль, оскільки саме завдяки їм можна отримати відповідь на питання: «Навіщо це вивчати?», що суттєво підвищує мотивацію навчально-пізнавальної діяльності.

В даній статті розглядаються зв'язки ймовірнісних моделей з деякими іншими моделями реального світу: математичними, фізичними, біологічними, медичними, економічними, соціологічними.

2. Ймовірнісні моделі і комбінаторика. У роботі [2] підкреслено, що часто навчання теорії ймовірностей спрямоване на вивчення моделей лише таких випадкових експериментів, елементарні події яких рівноможливі. Таке навчання призводить до формування в учнів хибного уявлення про випадкові події та їх ймовірності. Формуванню такого хибного уявлення сприяє і підпорядкування ймовірнісних задач комбінаториці. Краще робити навпаки: вводити комбінаторні поняття і знаходити («відкривати») комбінаторні формули за допомогою побудови ймовірнісних моделей спеціального виду – лише одного із величезної кількості різноманітних видів таких моделей.

2.1. Добуток ймовірнісних моделей. На практиці часто складні стохастичні експерименти ε можна тлумачити як добуток деяких простіших експериментів ε_i , $i = 1, 2, \dots$.

Нехай експерименту ε_i відповідає ймовірнісна модель (Ω_i, S_i, P_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Експеримент ε називають *добутком експериментів* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ і позначають $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \dots \times \varepsilon_n$, якщо кожне випробування експерименту ε є впорядкованою сукупністю випробувань, перше з яких пов'язане з експериментом ε_1 , друге – з експериментом ε_2 і так далі, останнє – з експериментом ε_n . При цьому кожен результат e експерименту ε є впорядкованою сукупністю результатів e_i експериментів ε_i , тобто $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ і ці результати складають простір $\Omega \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Іноді простір Ω елементарних подій e , пов'язаний з експериментом $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2 \times \dots \times \varepsilon_n$, співпадає з *декартовим добутком* просторів $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$, тобто $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$.

Наприклад, нехай експеримент ε_1 пов'язаний з підкиданням однокопійчаної монети, а експеримент ε_2 – з підкиданням двохкопійчаної монети і фіксацією для кожного з цих експериментів виду верхньої грані. Тоді експеримент $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ полягає у тому, що спочатку підкидають однокопійчану монету, а потім – двохкопійчану і фіксують вид верхньої грані для кожного з двох підкидань. Отже, кожен результат e експерименту ε має вигляд $e = (e_1, e_2)$, де $e_1 \in \{\Gamma_1, \Pi_1\} = \Omega_1$, $e_2 \in \{\Gamma_2, \Pi_2\} = \Omega_2$. Тому простір Ω елементарних подій, пов'язаний з експериментом $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$, має вигляд $\Omega = \{(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_1, \Pi_2), (\Pi_1, \Gamma_2), (\Pi_1, \Pi_2)\} = \Omega_1 \times \Omega_2$.

У найпростішому випадку, коли усі простори Ω_i скінченні (або зчисленні), а простори подій $S_i = S_i^*$ – найширші із можливих, такими самими є і простір Ω елементарних подій та простір подій $S = S^*$. При цьому ймовірність P на просторі подій S вводять за допомогою рівності:

$$P(\{(e)\}) = P(\{(e_1, e_2, \dots, e_n)\}) = P_1(\{e_1\}) \cdot P_2(\{e_2\}) \cdot \dots \cdot P_n(\{e_n\}).$$

За вказаних умов ймовірнісний простір (Ω, S, P) називають *добутком ймовірнісних просторів* (Ω_i, S_i, P_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Наприклад, нехай для експериментів ε_1 , ε_2 з підкиданням одно- і двохкопійчаної монет відповідні ймовірнісні простри мають вигляд (Ω_1, S_1, P_1) і (Ω_2, S_2, P_2) , де $\Omega_1 = \{\Gamma_1, \Pi_1\}$,

$\Omega_2 = \{\Gamma_2, \Upsilon_2\}$, $S_1 = S_1^*$, $S_2 = S_2^*$, $P_1(\{\Gamma_1\}) = p_1$, $P_1(\{\Upsilon_1\}) = 1 - p_1$, $P_2(\{\Gamma_2\}) = p_2$ і $P_2(\{\Upsilon_2\}) = 1 - p_2$. Тоді, якщо (Ω, S, P) – добуток цих ймовірнісних просторів, то

$$\Omega = \{(\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_1, \Upsilon_2), (\Upsilon_1, \Gamma_2), (\Upsilon_1, \Upsilon_2)\}, S = S^*,$$

а P визначається рівностями

$$\begin{aligned} P(\{\Gamma_1, \Gamma_2\}) &= P_1(\{\Gamma_1\}) \cdot P_2(\{\Gamma_2\}) = p_1 \cdot p_2, \\ P(\{\Gamma_1, \Upsilon_2\}) &= P_1(\{\Gamma_1\}) \cdot P_2(\{\Upsilon_2\}) = p_1(1 - p_2), \\ P(\{\Upsilon_1, \Gamma_2\}) &= P_1(\{\Upsilon_1\}) \cdot P_2(\{\Gamma_2\}) = p_2(1 - p_1), \\ P(\{\Upsilon_1, \Upsilon_2\}) &= P_1(\{\Upsilon_1\}) \cdot P_2(\{\Upsilon_2\}) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2). \end{aligned}$$

2.2. Розміщення, перестановки та сполучення та їх кількість. Майже завжди (а особливо у школі) вивчення нового математичного поняття доцільно розпочинати з конкретної задачі, розв'язання якої вимагає введення цього поняття. Наприклад, вивчення елементів комбінаторики можна розпочати з розв'язання такої задачі. *Припустимо, що учневі треба зателефонувати другові, але він забув r останніх цифр (нехай, $r=3$) потрібного номера, проте пам'ятає, що забуті цифри непарні і попарно різні. Знайти ймовірність того, що учень правильно набере потрібний номер телефону.*

За умовою задачі $r=3$ останніх цифр телефонного номера утворюють впорядкований набір (x_1, x_2, x_3) попарно різних елементів $x_i \in \{1, 3, 5, 7\}$, $i=1, 2, 3$. У зв'язку з цим природно ввести наступне означення: розміщенням з n даних попарно різних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів називають упорядкований набір (x_1, x_2, \dots, x_r) попарно різних елементів $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $i=1, 2, \dots, r$.

За умовою даної задачі останні три цифри номера телефону утворюють розміщення з $n=5$ елементів 1, 3, 5, 7, 9 по $r=3$ елементи. Прикладами таких розміщень є: (1, 3, 5), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 3, 1), (5, 1, 3), (1, 5, 3), (1, 3, 7) і так далі. Кількість усіх таких розміщень позначають A_5^3 (в загальному випадку A_n^r). Тому, вважаючи, що ці розміщення утворюють простір Ω рівно можливих елементарних подій, серед яких лише одне розміщення забезпечує правильний набір номера телефону, приходимо до висновку, що у рамках побудованої ймовірнісної моделі шукана ймовірність $p = \frac{1}{A_5^3}$.

У зв'язку з цим природно виникає питання: «А як знайти A_5^3 і взагалі A_n^r ?».

Знайти відповідь на це питання можна різними способами.

Перший спосіб можна пов'язати з подіями B_i – « i -та з трьох забутих цифр набрана правильно». Тоді за домовленістю:

- $P(B_1) = \frac{1}{5}$, оскільки e_1 – перша із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\}$;
- $P(B_2 \setminus B_1) = \frac{1}{4}$, оскільки e_2 – друга із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{e_1\}$;
- $P(B_3 \setminus B_1 B_2) = \frac{1}{3}$, оскільки e_3 – третя із забутих цифр є однією з множини $\{1, 3, 5, 7, 9\} \setminus \{e_1, e_2\}$.

Оскільки подія $B = B_1 B_2 B_3$ означає, що три забуті цифри набрано правильно, то за формулою ймовірності добутку подій маємо:

$$P(B) = P(B_1) \cdot P(B_2 \setminus B_1) \cdot P(B_3 \setminus B_1 B_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{60}.$$

Враховуючи, що $P(B) = p = \frac{1}{A_5^3}$, дістаємо, що $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, після чого неважко

переконатися, що $A_n^r = n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$, $0 \leq r \leq n$.

Другий спосіб знаходження шуканої ймовірності і формули для обчислення A_n^r можна пов'язати з добутком випадкових експериментів та ймовірнісних просторів.

Щоб знайти кількість усіляких розміщень з n даних елементів по r елементів подивимося на

довільне фіксоване розміщення (e_1, e_2, \dots, e_r) як на результат експерименту ε , що є добутком експериментів $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$, де:

- експеримент ε_1 полягає у виборі навмання елемента x_1 з множини $\Omega_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, причому $P(x_1 = e_1) = P(\{e\}) = \frac{1}{n}$ для будь-якого $e \in \Omega_1$;
- експеримент ε_2 полягає у виборі навмання елемента x_2 з множини $\Omega_2 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{e_1\}$, причому $P(x_2 = e_2 | x_1 = e_1) = P_2(\{e\}) = \frac{1}{n-1}$ для будь-якого $e \in \Omega_2$ і так далі;
- останній експеримент ε_r полягає у виборі навмання елемента x_r з множини $\Omega_r = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_{r-1}\}$ причому $P(x_r = e_r | x_1 = e_1, \dots, x_{r-1} = e_{r-1}) = P_r(\{e\}) = \frac{1}{n-r+1}$ для будь-якого $e \in \Omega_r$.

Таким чином, усілякі розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) утворюють множину Ω , а для довільного фіксованого елемента $(e_1, e_2, \dots, e_r) \in \Omega$ експеримент ε по суті полягає у виборі навмання розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з множини Ω і перевірки рівностей $x_i = e_i, i = 1, 2, \dots, r$. При цьому

$$\begin{aligned} P(\{(e_1, e_2, \dots, e_r)\}) &= P(x_1 = e_1, x_2 = e_2, \dots, x_r = e_r) = \\ &= P(x_1 = e_1)P(x_2 = e_2 | x_1 = e_1) = \dots = P(x_r = e_r | x_1 = e_1, \dots, x_{r-1} = e_{r-1}) = \\ &= P_1(\{e_1\}) \cdot P_2(\{e_2\}) \cdot \dots \cdot P_r(\{e_r\}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n-r+1}. \end{aligned}$$

Остання рівність означає, що усі елементарні події (розміщення з n елементів по r елементів) простору Ω є рівноможливими. Тому, якщо кількість таких розміщень (елементарних подій) позначити A_n^r , то дістанемо, що

$$P(\{(x_1, x_2, \dots, x_r)\}) = \frac{1}{A_n^r} = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1)},$$

звідки

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

де r та n цілі числа і $0 \leq r \leq n$. При цьому за означенням $0! = 1$ і $A_n^0 = 1$.

Після вивчення розміщень з n елементів по r елементів природно розглянути перестановки даних n елементів, як частинний випадок розміщень (це розміщення з n елементів по n елементів) і дістати як наслідок з формули (2) формулу для обчислення кількості P_n усіляких перестановок даних n елементів:

$$P_n = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Сильнішим учням доцільно запропонувати пов'язати утворення перестановок з певним стохастичним експериментом і довести формулу (3) за допомогою цього експерименту.

Так само, за допомогою конкретної практичної задачі можна ввести поняття сполучення (комбінації) з n елементів по r елементів, розкрити зв'язок сполучень з відповідними розміщеннями та знайти і довести формулу для обчислення кількості C_n^r усіляких сполучень з n елементів по r елементів:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (4)$$

Зрозуміло, що це також можна пов'язати з певним стохастичним експериментом та побудовою відповідної ймовірнісної моделі.

Для визначення кількості \bar{A}_n^r усіляких розміщень з повторенням з n даних елементів по r елементів доведено, що довільне звичайне розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) можна вважати результатом експерименту ε , що є добутком експериментів $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, r$, кожне з яких полягає у виборі навмання без повернення елемента x_i з множини $\Omega_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}\}, i = 1, 2, \dots, r$,

$$\Omega_1 = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Можна вважати довільне розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з повторенням результатом експерименту ε , що є добутком експериментів ε_i , $i = 1, 2, \dots, r$, кожен з яких полягає у *виборі намання з поверненням* елемента x_i з однієї і тієї самої множини $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

З такими експериментами ε_i природно пов'язати ймовірнісні простори (Ω_i, S_i, P_i) , де $\Omega_i = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $S_i = S_i^*$, $P_i(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, r$, $e_i \in \{e_1, e_2, \dots, a_n\}$.

Добуток цих ймовірнісних просторів дає ймовірнісний простір (Ω, S, P) , де $\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) : x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, i = 1, 2, \dots, r\}$, (тобто елементами Ω є усілякі розміщення з повторенням з n елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів), $S_i = S_i^*$ і $P(\{e\}) = P(\{(x_1, x_2, \dots, x_r)\}) = P_1(\{x_1\}) \cdot P_2(\{x_2\}) \cdot \dots \cdot P_r(\{x_r\}) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^r}$.

Отже, елементарні події простору Ω є рівноможливими, а тому, якщо \bar{A}_n^r – кількість таких елементарних подій (розміщень з повтореннями з n даних елементів по r елементів), то $P(\{e\}) = \frac{1}{\bar{A}_n^r} = \frac{1}{n^r}$, звідки

$$\bar{A}_n^r = n^r, \quad (5)$$

де r і n фіксовані цілі невід'ємні числа.

Серед усіх розміщень з повтореннями виділяють такі, що відрізняються від певного фіксованого розміщення (x_1, x_2, \dots, x_r) з повторенням з n даних попарно різних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів лише порядком елементів. Кожне таке розміщення називають *перестановкою з повторенням, породженою даним розміщенням з повторенням*. Для таких перестановок кожен елемент a_i зустрічається r_i разів, причому $r_i \geq 0$ і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Позначимо $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ – кількість попарно різних перестановок з повторенням, породжених розміщенням (x_1, x_2, \dots, x_r) .

У цих перестановках елемент a_1 можна розмістити $C_r^{r_1}$ способами, для кожного з яких елемент a_2 можна розмістити $C_{r-r_1}^{r_2}$ способами, і взагалі кожен елемент a_k можна розмістити

$C_{r-(r_1+\dots+r_{k-1})}^{r_k}$ способами $k = 1, 2, \dots, r$, $r_0 = 0$. Тому

$$\begin{aligned} P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) &= C_r^{r_1} \cdot C_{r-r_1}^{r_2} \cdot C_{r-(r_1+r_2)}^{r_3} \cdot \dots \cdot C_{r-(r_1+\dots+r_{n-1})}^{r_n} = \\ &= \frac{r!}{r_1!(r-r_1)!} \cdot \frac{(r-r_1)!}{r_2!(r-r_1-r_2)!} \cdot \frac{(r-r_1-r_2)!}{r_3!(r-r_1-r_2-r_3)!} \cdot \dots \cdot \frac{(r-r_1-\dots-r_{n-1})!}{r_n!(r-r_1-r_2-\dots-r_n)!} = \\ &= \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}. \end{aligned}$$

Отже,

$$P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}, \quad (5)$$

де цілі числа $r_i \geq 0$ і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

Сильнішим учням можна повідомити, що числа $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$, визначені рівністю (5), називають *поліноміальними коефіцієнтами*, оскільки вони є коефіцієнтами полінома (многочлена):

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)^r = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_n=r} P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) \cdot \alpha_1^{r_1} \cdot \alpha_2^{r_2} \cdot \dots \cdot \alpha_n^{r_n}.$$

Звідси випливає, що сума поліноміальних коефіцієнтів $P_r(r_1, r_2, \dots, r_n)$ при фіксованому r дорівнює n^r .

$$\text{Зокрема у випадку } n=2 \text{ поліноміальні коефіцієнти } P_r(r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1!r_2!} = \frac{r!}{r_1!(r-r_2)!}$$

перетворюється у біноміальні коефіцієнти $C_r^{r_1} = C_r^{r_2}$, а $\sum_{r_1=0}^r C_r^{r_1} = 2^r$

Якщо у перестановках з повторенням, породжених розміщенням (x_1, x_2, \dots, x_r) , нехтувати порядком елементів, то замість всіх таких перестановок дістанемо невпорядкований набір елементів (x_1, x_2, \dots, x_r) , у якому кожен елемент $x_i \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $i = 1, 2, \dots, r$, причому кожен елемент a_i зустрічається серед елементів x_1, x_2, \dots, x_r , $r_i \geq 0$ разів і $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$. Тоді кожен такий невпорядкований набір (x_1, x_2, \dots, x_r) називають сполученням з повторенням з n даних попарно різних a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів.

Отже, кожне сполучення з повторенням $(x_1, x_2, \dots, x_r) = x$ цілком визначається набором чисел $r_1(x), r_2(x), \dots, r_n(x)$. Тому, два сполучення з повторенням: $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ та $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ є рівними тоді і тільки тоді, коли $Y_1(x) = Y_1(y), Y_2(x) = Y_2(y), \dots, Y_n(x) = Y_n(y)$.

Враховуючи цей факт, кожне сполучення з повторенням з n даних елементів a_1, a_2, \dots, a_n по r елементів можна тлумачити як результат випадкового експерименту, коли:

1) r елементів сполучення зображується r зірочками (*), які розподілено по n скриньках, зображених $(n+1)$ -єю вертикальною рисою. Наприклад, чотири вертикальні риси $|||$ зображують три скриньки. Скриньки, утворені $(n+1)$ -єю вертикальними рисками, занумеровано номерами і від 1 до n зліва направо. При цьому у першій скриньці знаходиться r_1 елементів a_1 , у другій – r_2 елементів a_2 , ..., у n -ій – r_n елементів a_n ;

2) якщо $r_i \geq 0$ – кількість елементів сполучення, що співпадають з a_i , тобто знаходяться у i -ій скриньці, то ці елементи зображуються r_i зірочками (*), що лежать між відповідною парою вертикальних рисок. Наприклад, зображення виду $||**$ $||**$ означає, що відповідне сполучення з повторенням з трьох елементів a_1, a_2, a_3 по чотири елементи має вигляд (a_1, a_1, a_3, a_3) , тобто по два елементи містяться у першій і третій скриньці, а у другій скриньці елементів сполучення нема.

Бачимо, що кожне сполучення з повторенням з n елементів по r елементів взаємно однозначно визначається відповідним зображенням $(n+1)$ -єї риси і r –зірочок. При цьому перший і останній знак зображення обов'язково є вертикальними рисками, а інші $(n+r-1)$ знаків на r місцях є зірочками, а на інших місцях – рисками.

Таким чином, утворення кожного сполучення з повторенням полягає у виборі r місць серед $(n+r-1)$ -го місця. Тому кількість \bar{C}_n^r усіляких сполучень з повтореннями з n елементів по r елементів обчислюється за формулою

$$\bar{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}. \quad (6)$$

Наведені комбінаторні формули відіграють важливу роль у статистичній фізиці. Розкриття цієї ролі є важливішим за розв'язування величезної кількості стандартних задач на обчислення ймовірностей за допомогою комбінаторних формул.

3. Ймовірнісні моделі розподілу мікрочастинок в комірках фазового простору. У статистичній фізиці досліджують властивості макроскопічних тіл(гази, рідини, тверді тіла, атомні ядра тощо) на основі властивостей і законів руху мікрочастинок (молекули, атоми, елементарні частинки(протони, електрони, нейтрони тощо)). Величезна кількість фізичних моделей реального світу виходить з того, що кожна мікрочастинка у будь-який момент часу знаходиться у певній комірці так званого *фазового простору*. Вчені виявили, що розподіл мікрочастинок по комірках фазового простору не є детермінованим, а має випадковий характер, який розкривається певними ймовірнісними моделями, залежними від виду мікрочастинок.

3.1. Статистика Максвелла-Больцмана. Розглянемо r мікрочастинок, що знаходяться у фазовому просторі, який складається з n комірок. На початку створення статистичної фізики вчені вважали, що і мікрочастинки і комірки фазового простору є *розрізнюваними об'єктами*, тобто кожній мікрочастинці можна приписати свій номер від 1 до r , а кожній комірці – свій номер від 1 до n . Окрім цього вважали, що у кожній комірці фазового простору може міститися будь-яка кількість від 0 до r мікрочастинок з номером від 1 до r . Отже якщо r_k – кількість мікрочастинок у k -ій комірці, то $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$.

При цьому, кожний i -й мікрочастинці відповідає єдиний номер n_i комірки, проте різні мікрочастинки (за номерами) можуть міститися у одній комірці, тобто різним номером мікрочастинки можуть відповідати один і той самий номер комірки. Тому маємо розміщення з повторенням n комірок по r мікрочастинках. Кожне таке розміщення називатимемо *розподілом r мікрочастинки по n комірках фазового простору*.

Оскільки у фіксований момент часу кожна мікрочастинка може знаходитися у будь-якій з n комірок, то для цього моменту часу можливим є n^r розподілів r мікрочастинки по n комірках.

Виходячи з інтуїтивного розуміння випадковості, вчені на початку вважали, що усі ці n^r розподіли є рівноймовірними, а тому відповідна ймовірнісна модель (Ω, S, P) визначається умовами:

- простір елементарних подій Ω є сукупністю усіляких розміщень з повторенням n комірок по r мікрочастинках; кількість таких розміщень дорівнює n^r ;
- кожне розміщення $e \in \Omega$ визначає подію $E=\{e\}$, ймовірність якої $P(E)=\frac{1}{n^r}$, тобто простір подій S є найширшим з можливих, а ймовірність P рівномірно розподілена по подіях $E=\{e\}, e \in \Omega$.

У таблиці 1 наведено ілюстрації елементарних подій простору Ω для випадків $r=3, n=2$ та $r=2, n=3$, коли мікрочастинки позначено a_i , а кожна комірка зображена парою сусідніх вертикальних рисок.

Окрім цього вказано відповідне розміщення з повторенням з n номерів 1, 2, ..., n комірок по r номерам мікрочастинки.

Таблиця 1

e_i	$r=3, n=2$	$r=2, n=3$
e_1	$ a_1 a_2 a_3 $ (1, 1, 1)	$ a_1 a_2 $ (1,1)
e_2	$ a_1 a_2 a_3 $ (2,2,2)	$ a_1 a_2 $ (2,2)
e_3	$ a_1 a_2 a_3$ (1,1,2)	$ a_1 a_2 $ (3,3)
e_4	$ a_1 a_3 a_2$ (1,2,1)	$ a_1 a_2 $ (1,2)
e_5	$ a_2 a_3 a_1$ (2,1,1)	$ a_2 a_1 $ (2,1)
e_6	$ a_1 a_2 a_3$ (1,2,2)	$ a_1 a_2$ (1,3)
e_7	$ a_2 a_1 a_3$ (2,1,2)	$ a_2 a_1$ (3,1)
e_8	$ a_3 a_1 a_2$ (2,2,1)	$ a_1 a_2 $ (2,3)
e_9		$ a_2 a_1 $ (3,2)

У випадку $r=3, n=2$ маємо $P(\{e_i\})=\frac{1}{8}, i=1,2,\dots,8$, а у випадку $r=2, n=3$ маємо

$$P(\{e_i\})=\frac{1}{9}, i=1,2,\dots,9.$$

Наведену ймовірнісну модель називають *статистикою Максвелла-Больцмана*, а відповідний розподіл ймовірностей – *розподілом Максвелла-Больцмана*. Згідно з цією статистикою ймовірність події $A=A(r_1, r_2, \dots, r_n)$, яка складається з усіляких перестановок фіксованого розміщення з повторенням $(x_1, x_2, \dots, x_\gamma)$ визначається рівністю

$$P(A) = \frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!n^r}, \quad (8)$$

оскільки кількість таких перестановок дорівнює $\frac{r!}{r_1!r_2!\dots r_n!}$, де $r_i \geq 0$ – кількість мікрочастинок у i -й комірці, $i = 1, 2, \dots, n$, причому $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$ – загальна кількість мікрочастинок.

Зокрема, якщо $r=3$, $n=2$, то подія $A = A(2,1) = \{e_3, e_4, e_5\}$ і тому $P(A) = P(\{e_3, e_4, e_5\}) = \frac{3}{8} = \frac{3!}{2!1!2^3} = P(\{e_6, e_7, e_8\})$, а якщо $r=2$, $n=3$, то подія $A = A(1,1,0) = \{e_4, e_5\}$ і тому $P(A) = P(\{e_4, e_5\}) = \frac{2}{9} = \frac{2!}{1!1!0!3^2} = P(\{e_6, e_7\}) = P(\{e_8, e_9\})$ (див. таблицю 1).

3.2. Статистика Бозе-Ейнштейна. Априорі (тобто до проведення дослідів) статистика Максвелла-Больцмана не викликала у вчених ніяких заперечень, проте на практиці виявилось, що для багатьох видів мікрочастинок ймовірностями подій $A = A(r_1, r_2, \dots, r_n)$ доцільно вважати зовсім інші числа:

$$P(A) = P(A(r_1, r_2, \dots, r_n)) = \frac{1}{C_{n+r-1}^r} \quad (9)$$

При цьому також виявилось, що не для кожної елементарної події $e \in \Omega$ можна знайти статистичну ймовірність події $E = \{e\}$, тобто *не доцільно вважати простір подій S найширшим з можливих*. Замість цього слід вважати, що простір подій S породжений попарно несумісними подіями $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Причина цього виявилася у тому, що на практиці можна фіксувати лише кількість мікрочастинок у кожній комірці фазового простору. Тому усі елементарні події, що утворюють подію $A = A(r_1, r_2, \dots, r_n)$, тобто є перестановками з повторенням фіксованого розміщення з повторенням, на практиці сприймаються як одне сполучення з повторенням з n елементів по r елементів. Оскільки кількість таких сполучень з повторенням дорівнює C_{n+r-1}^r , то можна вважати, що ймовірнісна модель визначається рівністю (2). Таку ймовірнісну модель називають *статистикою Бозе-Ейнштейна*, а рівномірний розподіл ймовірності по подіях $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$, що визначається рівністю (2), називають *розподілом Бозе-Ейнштейна*.

У статистиці Бозе-Ейнштейна можна вважати, що елементарними подіями є усілякі розміщення з повторенням з n елементів по r елементів (і тоді простір подій S породжується подіями $A(r_1, r_2, \dots, r_n)$), або ж вважати, що елементарними подіями є усілякі сполучення з повторенням з n елементів по r елементів і тоді простір подій S є найширшим з можливих.

Наприклад, для другого підходу і випадків $r=3$, $n=2$ та $r=2$, $n=3$ ілюстрації елементарних подій наведено у таблиці 2

Таблиця 2

e_i	$\gamma=3, n=2$	$\gamma=2, n=3$
e_1	$\begin{array}{ c c c } \hline *** & & \\ \hline \end{array}$ (1,1,1) (3,0)	$\begin{array}{ c c c } \hline ** & & \\ \hline \end{array}$ (1,1) (2,0,0)
e_2	$\begin{array}{ c c c } \hline & *** & \\ \hline \end{array}$ (2,2,2) (0,3)	$\begin{array}{ c c c } \hline & ** & \\ \hline \end{array}$ (2,2) (0,2,0)
e_3	$\begin{array}{ c c c } \hline ** & * & \\ \hline \end{array}$ (1,1,2) (2,1)	$\begin{array}{ c c c } \hline & & ** \\ \hline \end{array}$ (3,3) (0,0,2)
e_4	$\begin{array}{ c c c } \hline & * & ** \\ \hline \end{array}$ (1,2,2) (1,2)	$\begin{array}{ c c c } \hline & * & * \\ \hline \end{array}$ (1,2) (1,1,0)
e_5	$\begin{array}{ c c c } \hline & & & * & \\ \hline \end{array}$ (1,3) (1,0,1)	$\begin{array}{ c c c } \hline & * & * & \\ \hline \end{array}$ (1,3) (1,0,1)
e_6	$\begin{array}{ c c c } \hline & & & * & * & \\ \hline \end{array}$ (2,3) (0,1,1)	$\begin{array}{ c c c } \hline & & * & * & \\ \hline \end{array}$ (2,3) (0,1,1)

У таблиці 2 кожна мікрочастинка позначена одним і тим самим символом “*”, оскільки мікрочастинки вважаються *нерозрізнаними*.

3.3. Статистика Фермі-Дірака. Статистика Бозе-Ейнштейна ефективно застосовна до багатьох мікрочастинок, які називають *бозонами*. Наприклад, бозонами є фотони, π -мезони, α -частинки, атомні ядра з парною кількістю нуклонів.

Разом з тим виявилось, що для багатьох мікрочастинок статистика Бозе-Ейнштейна не є ефективною, тобто не всі мікрочастинки є бозонами. Наприклад, протони, електрони, нейтрони не є бозонами. Для таких видів мікрочастинок була запропонована інша ймовірнісна модель (Ω, S, P) , яку називають *статистикою Фермі-Дірака*, а такі мікрочастинки називають *ферміонами*.

Сутність цієї моделі полягає у тому, що можливими є лише такі розподіли r нерозрізнаних мікрочастинок по n комірках фазового простору, коли у кожній комірці міститься не більше однієї мікрочастинки. Тому обов'язково $r \leq n$ і кожен такий розподіл є сполученням з n елементів по r елементів. Отже, елементарними подіями простору Ω можна вважати усілякі сполучення з n елементів по r елементів. Оскільки кількість таких сполучень дорівнює C_n^r , то було запропоновано вважати, що

$$P(\{e\}) = \frac{1}{C_n^r}, \quad e \in \Omega. \quad (10)$$

Розподіл ймовірностей за формулою (10) називають *розподілом Фермі-Дірака*.

Наприклад, дві мікрочастинки ($r=2$) можна розподілити по трьох комірках так:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline * & * & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline * & & * \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & * & * \\ \hline \end{array},$$

тобто $\Omega = \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ і тому

$$P(e) = \frac{1}{3} = \frac{1}{C_3^2} = \frac{2!!}{3!}.$$

Отже, до проведення змістовних досліджень вчені-фізики не мали підстав вважати, що розподіл мікрочастинок по комірках фазового простору не задовольняє розподіл Максвелла-Больцмана, а різні види мікрочастинок (наприклад, фотони і протони) підпорядковуються різним ймовірнісним законам. Таким чином, *інтуїтивні уявлення про випадковість та ймовірність, пов'язані з рівноможливістю усіх можливих результатів випадкового експеримента, на практиці часто виявляються хибними*.

4. Ймовірнісна модель успадкування ознак при випадковому схрещуванні. Теорема Харді. У сучасній біології *випадковим схрещуванням* називають експеримент, пов'язаний з випадковим вибором батьківської пари з множини усіляких можливих батьківських пар, результатом чого є наслідування ознак (від батька та від мати) *нащадками першого покоління* (та наступних поколінь). Точніше, батьківський і материнський гени (що відповідають за певні ознаки) вибирають випадково і незалежно з множини генів-гамет чоловічих і жіночих осіб *батьківської популяції*. Ці гамети утворюються шляхом розщеплення половых клітин, що мають один з генотипів AA, Aa чи aa .

Фактично експеримент ε з випадкового схрещування можна тлумачити як добуток експериментів: $\varepsilon = (\varepsilon_1 \times \varepsilon_2) \times (\varepsilon_3 \times \varepsilon_4)$, де:

- експеримент ε_1 (експеримент ε_3) полягає у випадковому виборі з множини $\Omega_1 = \{AA, Aa, aa\}$ генотипів можливого батька (мати). При цьому ймовірнісний простір (Ω_1, S_1, P_1) визначається рівностями $P_1(AA) = P_1(\{AA\}) = u$, $P_1(Aa) = P_1(\{Aa\}) = 2v$ і $P_1(aa) = P_1(\{aa\}) = w$, де $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ і $u + 2v + w = 1$;
- експеримент ε_2 (експеримент ε_4) полягає у виборі навмання першої або другої гамети, що є результатом розщеплення клітин певного генотипу. При цьому ймовірнісний простір (Ω_2, S_2, P_2) визначається умовами $\Omega_2 = \{1; 2\}$, $P_2(1) = P_2(\{1\}) = P_2(2) = P_2(\{2\}) = \frac{1}{2}$, тобто кожна з двох утворених гамет певного генотипу може бути вибраною з ймовірністю $\frac{1}{2}$;
- результати експерименту $\varepsilon_\delta = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$ утворюють простір $\Omega_\delta = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(AA,1), (AA,2),$

$(Aa,1), (Aa,2), (aa,1), (aa,2) = \{A_1, A_2, A, a, a_1, a_2\}$, де $A_1 = (AA,1)$ – результати вибору першої гамети, пов'язаної з генотипом AA і аналогічне тлумачення для позначень A_2, a_1 і a_2 ; $A = (Aa,1)$ – результат вибору першої гамети, пов'язаної з генотипом Aa , і аналогічне тлумачення для позначення $a = (Aa,2)$.

З експериментом ε_δ пов'язаний імовірнісний простір $(\Omega_\delta, S_\delta, P_\delta)$, що є добутком імовірнісних просторів (Ω_1, S_1, P_1) і (Ω_2, S_2, P_2) . Тому

$$P_\delta(A_1) = P_\delta((AA,1)) = P_1(AA) \cdot P_2(1) = u \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{2};$$

$$P_\delta(A_2) = P_\delta((AA,2)) = P_1(AA) \cdot P_2(2) = u \cdot \frac{1}{2} = \frac{u}{2};$$

$$P_\delta(A) = P_\delta((Aa,1)) = P_1(Aa) \cdot P_2(1) = 2v \cdot \frac{1}{2} = v;$$

$$P_\delta(a) = P_\delta((Aa,2)) = P_1(Aa) \cdot P_2(2) - 2v \cdot \frac{1}{2} = v;$$

$$P_\delta(a_1) = P_\delta((aa,1)) = P_1(aa) \cdot P_2(1) = w \cdot \frac{1}{2} = \frac{w}{2};$$

$$P_\delta(a_2) = P_\delta((aa,2)) = P_1(aa) \cdot P_2(2) = w \cdot \frac{1}{2} = \frac{w}{2}.$$

Розглянемо події:

$A_\delta = \{A_1, A_2, A\}$ – «нащадок успадкував від батька ген-гамет A »;

$a_\delta = \{a_1, a_2, a\}$ – «нащадок успадкував від батька ген-гамет a ».

Легко бачити, що

$$p = P_\delta(A_\delta) = P_\delta(A_1) + P_\delta(A_2) + P_\delta(A) = \frac{u}{2} + \frac{u}{2} + v = u + v \geq 0,$$

а

$$q = P_\delta(a_\delta) = P_\delta(a_1) + P_\delta(a_2) + P_\delta(a) = \frac{w}{2} + \frac{w}{2} + v = w + v \geq 0,$$

причому $p + q = u + 2v + w = 1$.

У зв'язку з цим можна вважати, що з експериментом ε_δ пов'язаний імовірнісний простір $(\Omega_\delta^*, S_\delta^*, P_\delta^*)$, де $\Omega_\delta^* = \{A_\delta, a_\delta\}$ і $P_\delta^*(A_\delta) = p = u + v$, а $P_\delta^*(a_\delta) = q = w + v$.

Аналогічно можна дістати експеримент $\varepsilon_m = (\varepsilon_3 \times \varepsilon_4)$, пов'язаний з випадковим наслідуванням нащадком від матері генів-гаметів A чи a , і переконатися, що випадково вибраний нащадок першого покоління успадковує від матері ген-гамет A з ймовірністю $P_m(A_m) = p = u + v$, або ген-гамет a – з ймовірністю $P_m(a) = q = w + v$.

Оскільки експеримент ε з випадкового схрещування є добутком експериментів ε_δ і ε_m , то відповідний йому імовірнісний простір (Ω, S, P) є добутком імовірнісних просторів $(\Omega_\delta^*, S_\delta^*, P_\delta^*)$ та (Ω_m^*, S_m^*, P_m) .

Тому

$$\Omega = \Omega_\delta^* \times \Omega_m^* = \{A_\delta, a_\delta\} \times \{A_m, a_m\} = \{(A_\delta, A_m), (A_\delta, a_m), (A_m, a_\delta), (a_\delta, a_m)\},$$

$$P(A_\delta, A_m) = P_\delta(A_\delta) \cdot P_m(A_m) = p \cdot p = p^2,$$

$$P(A_\delta, a_m) = P_\delta(A_\delta) \cdot P_m(a_m) = pq,$$

$$P(A_m, a_\delta) = P_m(A_m) \cdot P_\delta(a_\delta) = pq,$$

$$P(a_\delta, a_m) = P_\delta(a_\delta) P_m(a_m) = q^2.$$

Звідси випливає, що при випадковому схрещуванні ймовірність наслідування нащадком першого покоління генотипу AA , Aa чи aa дорівнює відповідно

- $P(AA) = P((A_\delta, A_m)) = p^2$;
- $P(Aa) = P(\{(A_\delta, a_m), (A_m, a_\delta)\}) = P((A_\delta, a_m)) + P((A_m, a_\delta)) = pq + pq = 2pq$;

- $P(aa) = P((a_\delta, a_m)) = q^2$,

де $p = u + v, q = w + v$, причому для популяції батьків генотип AA, Aa і aa розподілено у відношенні $u : 2v : w$, де $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ і $u + 2v + w = 1 = p + q$.

Звідси випливає, що для популяції нащадків першого покоління генотип AA, Aa і aa розподілено у відношенні $u_1 : 2v_1 : w_1$, де $u_1 = p^2, v_1 = pq, w_1 = q^2$, а тому $p_1 = u_1 + v_1 = p^2 + pq = p(p + q) = p$, $q_1 = w_1 + v_1 = q^2 + pq = q(q + p) = q$.

За доведеним для популяції нащадків другого покоління генотипи AA, Aa і aa розподілено у відношенні $p^2 : 2pq : q^2$. Такий саме розподіл дістаємо для популяції нащадків третього, четвертого і взагалі i -го покоління $i \geq 1$.

Отже, правильна наступна **теорема Харді**: за умов випадкового схрещування для популяції нащадків i -го покоління, $i=1,2,3,\dots$, розподіл генотипів AA, Aa і aa є стаціонарним, тобто ймовірність цих генотипів розподілено у відношенні $p^2 : 2pq : q^2$, де $p = u + v, q = w + v$, а числа $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0$ довільні і задають розподіл генотипів AA, Aa і aa у нульовій батьківській популяції у відношенні $u : 2v : w$.

Англійський математик Г. Харді, який довів це твердження, підкреслював, що на практиці розподіл генотипів AA, Aa і aa для нащадків i -го покоління, $i=1,2,3,\dots$, насправді є приблизно стаціонарним, оскільки при переході від покоління до покоління генетична структура хоч і повільно проте змінюється. Це ще одне підтвердження того, що будь-яка математична модель, зокрема ймовірнісна, надає лише наближені відомості про досліджувані об'єкти. Якщо точність наближення задовольняє дослідника, модель вважають ефективною та продовжують застосовувати її. В іншому разі модель вважають неефективною та її уточнюють або будують принципово нову модель.

5. Ймовірнісна модель пришвидшення аналізу крові у великій групі людей.

Припустимо, що в якійсь надзвичайній ситуації (епідемія, стихійне лихо, бойові дії) необхідно зробити аналіз крові у великій групі людей, яка нараховує $m=kn$ осіб.

Якщо досліджувати кров кожної людини окремо, то слід провести m аналізів, а m – дуже велике і тому на це потрібно багато часу, якого може не бути.

Чи можна пришвидшити потрібний аналіз? Виявляється, що так. Для цього можна розподілити наявні m осіб на n груп по k осіб у кожній. Кров k осіб кожної групи змішують і аналізують суміш.

Якщо результат цього аналізу негативний, тобто серед k осіб нема хворих, то для k осіб достатньо проведення одного аналізу.

Якщо ж результат аналізу суміші позитивний, тобто серед k осіб принаймні один хворий, то потрібно додатково провести аналіз крові кожної з k осіб даної групи і тому у цьому випадку необхідно провести $(k + 1)$ аналіз.

Припустимо, що для кожної з m осіб ймовірність позитивного аналізу дорівнює $p \in (0;1)$. Тоді, якщо кожна група з k осіб утворюється навмання, то, згадуючи біноміальні ймовірності, дістанемо: ймовірність того, що у цій групі буде принаймні один хворий, дорівнює $1 - (1 - p)^k = p_1$.

Отже, для кожної групи можна побудувати ймовірнісну модель (Ω, S, P) , для якої $(\Omega = \{1;0\})$, де 1 означає, що у групі є принаймні один хворий, а 0 – означає, що хворих у групі нема; $S = \{\emptyset, (\Omega, \{1\}, \{0\})\}$; $P(\{1\}) = p_1 = 1 - (1 - p)^k$ і $P(\{0\}) = (1 - p)^k = 1 - p_1$.

Введемо випадкову величину $X(e), e \in \Omega$; $X(1) = k + 1, X(0) = 1$ – кількість відповідних аналізів крові для даної групи осіб. Математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює $M[X] = (k + 1)p_1 + 1 \cdot (1 - p_1) = k + 1 - k(1 - p)^k$.

Оскільки треба дослідити n груп по k осіб у кожній групі, то, здійснюючи повторні незалежні випробування, дістанемо незалежні випадкові величини $X_i(e), e \in \Omega^n = \{e = (e_1, \dots, e_n) : e_i \in \{1;0\}, i \in \overline{1, n}\}$, де $X_i(e) = X_i(e_1, \dots, e_n) = X(e_i)$. Тому

$$X_i(e) = X_i(e_1, \dots, e_n) = \begin{cases} k + 1, & \text{коли } e_i = 1, \\ 1, & \text{коли } e_i = 0. \end{cases}$$

Оскільки для кожного i -го випробування ймовірність

$P_n(\{e = (e_1, \dots, e_n) : e_i = 1\}) = p_1 = 1 - (1 - p)^k$, то $M[X_i] = M[X] = k + 1 - k(1 - p)^k, i \in \overline{1, n}$.

Зрозуміло, що випадкова величина $X(e) = \sum_{i=1}^n X_i(e), e \in \Omega^n$, набуває значень $n + ik, i \in \overline{0, n}$, де i – кількість тих координат елементарної події $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, що дорівнюють 1. Ці значення характеризують можливі кількості аналізів крові. Згідно із законом великих чисел спостережені значення випадкової величини X , скоріше за все, мало відрізняється від математичного сподівання $M[X]$, де

$$M[X] = M[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n M[X_i] = n(k + 1 - k(1 - p)^k) = nk(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k}) = m(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k}).$$

Виявляється, що коли k близьке до $\frac{1}{\sqrt{p}}$, то $M[X] = m(1 - (1 - p)^k + \frac{1}{k})$ близьке до $2m\sqrt{p}$, а

тому для малих p кількість аналізів крові за розглянутою методикою може бути суттєво меншим за m . Так, наприклад, під час другої світової війни використання цієї методики дозволяло скоротити кількість аналізів на 80%.

6. Ймовірнісна модель оцінки якості великої кількості виробів та прогнозування результатів виборів. Нехай деяке підприємство виготовило велику кількість n виробів, серед яких є певна невідома кількість m бракованих. Припустимо, що перевірка якості кожного з n виробів є економічно недоцільною. Тоді здійснюють так званий *вибірковий контроль*: навмання вибирають n_0 виробів (n_0 значно менше за n) і серед них знаходять усі браковані – нехай їх кількість буде m_0 .

Наскільки добре число $\frac{m_0}{n_0} = p^*$ – вибіркова ймовірність наближає фактичну ймовірність

браку $p = \frac{m}{n}$? Щоб відповісти на поставлене питання, побудуємо ймовірнісну модель (Ω, S, P) , де

$\Omega = \{1; 0\}$, $S = S^* = \{?, (\Omega, \{1\}, \{0\})\}$, а $P(\{1\}) = \frac{m}{n} = p$, $P(\{0\}) = 1 - p$, тобто експеримент полягає у виборі навмання виробу і фіксації бракований він чи ні. Результатом кожного випробування є 1, коли виріб виявився бракованим, і 0 в іншому разі.

Добре організований вибірковий контроль повинен забезпечувати умову, що у кожному з n послідовних випробувань (вибору навмання виробу) ймовірність даної події A (вибраний виріб є бракованим) залишається приблизно однією і тією самою. Тоді, як відомо, ймовірність того, що

$|p^* - p| = |p^*(A) - p(A)| < \varepsilon = \beta \sqrt{\frac{p(p-1)}{n_0}}$, досить мало відрізняється від числа $2\Phi(\beta)$. Зокрема,

якщо $\beta = 3$, то ця ймовірність мало відрізняється від 0,9974. Таким чином, теорія стверджує, що з ймовірністю $2\Phi(\beta)$ можна вважати, що

$$|p - p^*| = \left| \frac{m}{n} - \frac{m_0}{n_0} \right| < \beta \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_0}} \Leftrightarrow (p - p^*)^2 n_0 < \beta^2 p(1-p) \Leftrightarrow (p^2 - 2pp^* + p^{*2})n_0 - \beta^2 p + \beta^2 p^2 < 0 \Leftrightarrow (\beta^2 + n_0)p^2 - (2n_0p^* + p^2)p + n_0p^{*2} < 0.$$

Розв'язавши останню нерівність, дістанемо, що з ймовірністю $2\Phi(\beta)$ $p \in (a_1(n_0, \beta); a_2(n_0, \beta))$, де

$$\begin{aligned} a_{1,2}(n_0, \beta) &= \frac{(2n_0p^* + \beta^2) \pm \sqrt{(2n_0p^* + \beta^2)^2 - 4(\beta^2 + n_0)n_0p^{*2}}}{2(\beta^2 + n_0)} = \\ &= \frac{(2n_0p^* + \beta^2) \pm \sqrt{4n_0^2 p^{*2} + 4n_0p^* \beta^2 + \beta^4 - 4\beta^2 n_0 p^{*2} - 4n_0^2 p^{*2}}}{2(p^2 + n_0)} = \\ &= \frac{2n_0p^* + \beta^2 \pm \sqrt{4n_0\beta^2 p^*(1-p^*) + \beta^4}}{2(\beta^2 + n_0)}. \end{aligned}$$

Наприклад, якщо підприємство виготовило декілька мільйонів виробів, серед яких

перевірено $n_0 = 10000$ і при вибірковому контролі виявлено $m_0 = 300$ бракованих виробів, то з ймовірністю $0,9974 = 2\Phi(3)$ можна вважати, що $\beta \in (a_1(10000,3); a_2(10000,3))$, де

$$a_{1,2}(10000,3) = \frac{600 + 9 \pm \sqrt{36 \cdot 300(1 - \frac{3}{100} + 81)}}{2(9 + 10000)} = \frac{609 \pm \sqrt{36 \cdot 291 + 81}}{20018} \approx 0,0304 \pm \frac{6 \cdot 17}{20018} \approx 0,0304 \pm 0,005.$$

Тобто з ймовірністю $0,9974$ можна стверджувати, що $p \approx 0,030$ і абсолютна похибка цього наближення не перевищує $0,005$.

Інтервал $(a; b)$, якому належить невідома ймовірність p , називають *довірчим інтервалом*, а ймовірність того, що p належить довірчому інтервалу називають *рівнем довіри*.

Для розглянутого прикладу довірчим інтервалом є $(0,0254; 0,0354)$, а рівень довіри дорівнює $0,9974$.

7. Математичне сподівання, теорема про середнє і обчислення об'ємів деяких фігур. Розкриваючи між предметні зв'язки теорії ймовірностей доцільно звернути увагу майбутніх вчителів математики на теорему про середнє для інтегралів довільної кратності:

$$\int_{\Omega_x} \psi(x)\varphi(x)dx = M[Z] \cdot \int_{\Omega_x} \varphi(x)dx \quad (1)$$

за умови інтегровності функцій ψ та φ на Ω_x , причому $\varphi(x) \geq 0$ на Ω . При цьому функцію φ називають *ваговою функцією*, а число

$$M[Z] = \frac{1}{\int_{\Omega_x} \varphi(x)dx} \cdot \int_{\Omega_x} \psi(x)\varphi(x)dx, \text{ де } Z = \psi(x), \quad (2)$$

за умови $\int_{\Omega} \varphi(x)dx > 0$ називають *інтегральним зваженим середнім функції f на множині Ω_x* .

Зокрема, якщо $\varphi(x) = 1$, коли $x \in G \subset \Omega_x$ і $\varphi(x) = 0$, коли $x \notin G \subset \Omega_x$, причому $\int_{\Omega_x} \varphi(x)dx = \int_G 1dx = m(G) \in (0; +\infty)$, то рівність (1) набуде вигляду $\int_G \psi(x)dx = M[Z] \cdot m(G)$, а тому рівність (2) перетвориться у рівність

$$M[Z] = \frac{1}{m(G)} \int_G \psi(x)dx \quad (2^*)$$

Тоді число $M[Z]$ називають *середнім інтегральним значенням функції ψ на множині G* . У випадку, коли G – компактна множина, а ψ неперервна на G , то $M[Z] = \psi(x^*)$ для деякої точки $x^* \in G$.

Зауважимо, що рівність (2) можна тлумачити як математичне сподівання випадкової величини $Z = \psi(X)$ за умови, що ймовірність P_X розподілено по множині Ω_x значень випадкової величини X з густиною $f_X(x) = \frac{\varphi(x)}{\int_{\Omega_x} \varphi(x)dx}$, $x \in \Omega_x$.

Зокрема, рівність (2) можна тлумачити як математичне сподівання випадкової величини $Z = \psi(X)$ за умови, що ймовірність P_X розподілено рівномірно по множині $G \subset \Omega_x$. Враховуючи це, маємо для подвійних інтегралів формулу

$$\iint_G \psi(x, y)dx dy = M[Z] \cdot m(G), \quad (3)$$

яка у випадку неперервної і невід'ємної функції $\psi(x, y)$, $(x, y) \in G$ пов'язує об'єм V циліндричного тіла, що задається функцією $\psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, з площею $m(G)$ основи цього тіла та з математичним сподіванням $M[Z]$ випадкової величини $Z = \Psi(X, Y)$, коли ймовірність P_{XY} рівномірно розподілена по множині $G \subset \Omega_{XY}$ значень двохвимірної випадкової величини (X, Y) .

Тому на основі формули (3) можна створити низку задач, спрямованих на формування професійної культури майбутнього вчителя математики.

Наведемо деякі приклади таких задач.

7.1. Об'єм прямого кругового конуса, площа його основи і математичне сподівання

$M[h - \frac{h}{R}\sqrt{X^2 + Y^2}]$ пов'язані рівністю

$$\iint_G (h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = M[Z] \cdot m(G), \quad (4)$$

де $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $mG = \pi R^2$, $Z = h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in G$. Для обчислення $M[Z]$

можна або обчислити $\iint_G (h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ або знайти функцію $F_X(z)$ розподілу ймовірностей

P_Z на множині $\Omega_Z = [0; h]$ випадкової величини Z . Здійснимо останнє, використовуючи те, що ймовірність P_{XY} розподілена рівномірно по множині $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$, що утворюють значення випадкового вектора (X, Y) . Маємо:

$$F_Z(z) = P_Z((-\infty; z)) = P(Z < z) = P(\{(x, y) \in G : h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} < z\}) = \{(x, y) \in G : \sqrt{x^2 + y^2} > R - \frac{Rz}{h}\}$$

Знайдемо окремо множину $A_z = \{(x, y) \in G : \sqrt{x^2 + y^2} > R - \frac{Rz}{h}\}$:

- $A_z = \emptyset$, коли $z \leq 0$, оскільки $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$, коли $(x, y) \in G$, і тому $F_Z(z) = P(\emptyset) = 0$;
- $A_z = \{(x, y) \in G : R^2(1 - \frac{z}{h})^2 < x^2 + y^2 \leq R^2\}$, коли $0 < z \leq h$, тобто A_z є кільцем, обмеженим

двома колами з центром у точці $(0, 0)$ і радіусами $r = R(1 - \frac{z}{h})$ та R , і тому

$$F_Z(z) = P(A_z) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{A_z} dx dy = \frac{m(A_z)}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} (\pi R^2 - \pi R^2(1 - \frac{z}{h})^2) = 1 - (1 - \frac{z}{h})^2;$$

- $A_z = \{(x, y) \in G : \sqrt{x^2 + y^2} > R - \frac{Rz}{h}\} = G$, коли $z > h$ і тому $F_Z(z) = P(A_z) = P(G) = 1$.

Таким чином,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z \leq 0, \\ 1 - (1 - \frac{z}{h})^2, & \text{коли } 0 < z \leq h, \\ 1, & \text{коли } z > h. \end{cases}$$

Звідси випливає, що розподіл ймовірностей P_Z на множині $[0; h]$ значень випадкової величини $Z = h - \frac{h}{R}\sqrt{X^2 + Y^2}$ є абсолютно неперервним з густиною

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{коли } z < 0 \text{ або } z > h, \\ \frac{2}{h}(1 - \frac{z}{h}), & \text{коли } 0 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Тому $M[Z] = \int_0^h z f_Z(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h (2z - \frac{2z^2}{h}) dz = \frac{1}{h} (z^2 - 2\frac{z^3}{3h}) \Big|_0^h = \frac{1}{3h}$ і за формулою (4)

$$\iint_G (h - \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

а це є об'ємом прямого кругового конуса з радіусом основи R та висотою h .

Зрозуміло, наведений спосіб виведення формули об'єму прямого кругового конуса для більшості майбутніх вчителів не є методично прийнятним. Красоту проведених міркувань може оцінити тільки той студент, який захоплюється математикою як наукою. Наведена задача є однією з тих, що допомагають виявляти таких математично обдарованих студентів.

7.2. Для всіх без винятку майбутніх учителів математики корисною буде інша задача,

пов'язана з попередньою: знайти математичне сподівання випадкової величини $Z = \Psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, за умови, що графік функції Ψ є конічною поверхнею з вершиною у точці $(0, 0, h)$, напрямною якої є межа фігури G , що є замкненою кривою Жордана, рівняння якої у полярних координатах має вигляд $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [0; 2\pi]$.

Основним співвідношенням для розв'язання цієї задачі є рівність (3), у якій $m(G) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta$ – площа основи заданого конуса, яку вважаємо відомою. Відома також і висота конуса – це $h > 0$.

Спробуємо знайти об'єм даного конуса. Для цього скористаємося формулою $V = \int_0^h S(t) dt$, де $S(t)$ – площа перерізу G_t цього конуса площиною $Z = t$, де $t \in (0; h)$ – фіксоване (див. рис. 1). Оскільки SM – це твірна конуса і $M_t \in [SM]$, то, коли точка M пробігає межу основи G , рівняння якої $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [0; 2\pi]$, тоді точка M_t пробігає межу перерізу G_t і рівняння цієї межі

$$\rho_t = \rho_t(\theta), \theta \in [0; 2\pi].$$

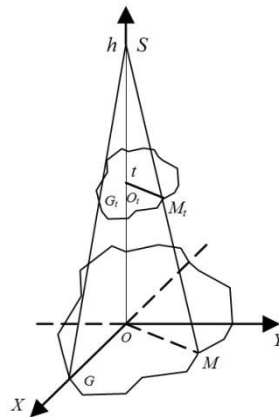


Рис. 1

При цьому $|OM| = \rho(\theta)$, $|OM_t| = \rho_t(\theta)$, $|OM|/|OM_t| = h/(h-z)$, тобто

$$\frac{\rho(\theta)}{\rho_t(\theta)} = \frac{h}{h-z} \Leftrightarrow \rho_t(\theta) = \frac{h-z}{h} \rho(\theta), \theta \in [0; 2\pi] \Rightarrow S(t) = m(G_t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho_t^2(\theta) d\theta =$$

$$= \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(\theta) d\theta = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 m(G) \Rightarrow V = \iint_G \Psi(x, y) dx dy = \int_0^h S(t) dt = \frac{m(G)}{h^2} \int_0^h (z-h)^2 dz =$$

$$= \frac{m(G)}{h^2} \cdot \frac{(z-h)^3}{3} \Big|_0^h = \frac{m(G)}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} m(G) \cdot h.$$

Отже, об'єм вказаного конуса дорівнює одній третій площі основи на висоту. Можна переконатися, що це має місце і для конусів, проекції вершини яких на площину основи лежать поза основою. Тому для всіх функцій $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in G$, графіки яких є вказаними конічними поверхнями (зокрема, бічними поверхнями звичайного конуса чи будь-якої піраміди) маємо, що математичне сподівання $M[Z]$ випадкової величини $Z = \Psi(X, Y)$ дорівнює $\frac{1}{3}h$, коли ймовірність

P_{XY} рівномірно розподілена по множині G – основі даного конуса.

Аналогічні задачі можна сформулювати для випадків, коли:

- $\psi(x, y) = h$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, і дістати формулу об'єму циліндра: $V = \pi R^2 h$ та $M[Z] = h$;
- $\psi(x, y) = h$, коли $x^2 + y^2 \leq r^2$, і $z = \psi(x, y)$ – бічна поверхня зрізаного конуса з висотою h , нижньою основою – $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ і верхньою основою – $G_h = \{(x, y, h) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, де $r < R$, та дістати формулу об'єму зрізаного конуса

$$V = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2), \text{ а також } M[Z] = \frac{h}{3} \left(1 + \frac{r}{R} + \frac{r^2}{R^2}\right);$$

• $\psi(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, і дістати формули об'єму півкулі: $V = \frac{2}{3}\pi R^3$, а отже і кулі: $2V = \frac{4}{3}\pi R^3$, та $M[Z] = \frac{2}{3}R$.

Таким чином, у процесі навчання теорії ймовірностей є можливість систематично звертатися до задач, що мають тісний зв'язок із шкільним курсом математики.

8. Висновки. 1. Не зважаючи на те, що ймовірнісні моделі з рівноможливими елементарними подіями відіграють на практиці важливу роль, *орієнтуватися лише на такі моделі у процесі навчання стохастичності студентів та учнів неприпустимо для будь-яких типів навчальних закладів*, оскільки це формує хибні уявлення про випадковість та її вимірювання.

2. *Не можна підпорядковувати навчання стохастичності вивченню елементів комбінаторики*, оскільки у стохастичності комбінаторні методи пов'язані переважно з рівноможливими елементарними подіями. Корисніше вводити найпростіші комбінаторні поняття і знаходити (відкривати) відповідні формули за допомогою певних стохастичних експериментів і побудови відповідних ймовірнісних моделей.

3. *Вивчення стохастичності на будь-якому рівні слід розпочинати з побудови статистичних моделей*, у яких ймовірність визначається за допомогою відносних частот (статистичних ймовірностей [3]-[6]), оскільки саме за допомогою статистичних ймовірностей можна перевірити ефективність будь-якої ймовірнісної моделі.

4. *Доцільно систематично підкреслювати, що будь-яка ймовірнісна модель дозволяє лише наближено прогнозувати, наскільки часто може відбуватися досліджувана реальна випадкова подія*. Будь-яка математична модель надає наближене уявлення про оточуючий світ, проте саме для ймовірнісних моделей властивим є те, що нехтування цією наближеністю призводить до грубих помилок, парадоксів і нівелювання випадковості до рівня детермінованості.

5. У процесі навчання теорії ймовірностей майбутніх вчителів є можливість розкривати глибокі зв'язки ймовірнісних моделей з багатьма математичними моделями, що вивчаються у шкільному курсі математики.

Література

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
2. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе // Математика в школе. – №7, 2009. – С. 14-31.
3. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастичності. Посібник для вчителів. – К.: Шкільний світ, 2006. – 120 с.
4. Жалдак М.І., Михалін Г.О. Елементи стохастичності. Збірник задач і вправ. Посібник для вчителів у 2-х частинах. – К.: Шкільний світ, 2008. – частина 1 – 124 с., частина 2 – 64 с.
5. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів. – Полтава: «Довкілля-К», 2009. – 500 с.
6. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Збірник задач і вправ з теорії ймовірностей і математичної статистики. – Полтава: «Довкілля-К», 2010. – 724 с.