https://doi.org/10.32405/2411-1309-2023-31-38-48
УДК 37.02

ШЛЯХИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРАКТИКО-ОРІЄНТОВАНОГО НАВЧАННЯ ГЕОМЕТРІЇ В ГІМНАЗІЇ ВІДПОВІДНО ДО ЕТАПІВ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ

Вікторія Волошена,
канд. педагогічних наук, старший науковий співробітник
відділу математичної та інформатичної освіти
Інституту педагогіки НАПН України
м. Київ, Україна
https://orcid.org/0000-0002-8279-6481
v.v.voloshena@gmail.com

У статті зроблена спроба розкрити проблему реалізації ідеї практико-орієнтованого навчання геометрії в гімназії відповідно до етапів вивчення математичних понять. Пропонується використовувати спеціальний підхід до вивчення математичних понять, заснований на поетапному засвоєнні змісту навчання з впровадженням комплексу практико-орієнтованих навчальних матеріалів, таких, як ілюстрації, завдання та вправи з різними дидактичними функціями згідно з етапами введення, засвоєння та закріплення понять, їх визначень, теорем. Запропоновано приклади такого навчання, в яких зазначені взаємозв'язки між етапами вивчення понять та їх застосувань засобами комплексу практико-орієнтованих навчальних матеріалів та прикладними математичними вміннями школярів, виокремленими відповідно до етапів методу математичного моделювання.

Ключові слова: геометрія; методика навчання; математичні поняття, математичне моделювання; практико-орієнтовані задачі, практико-орієнтоване навчання.

Постановка проблеми. Однією з актуальних освітніх проблем сучасної освіти є розробка та впровадження таких методів навчання, які дозволяють підвищити інтенсивність та результативність навчального процесу, пізнавальний інтерес школярів.

Ця проблема є актуальною і для системи загальної математичної освіти. Зокрема, у дослідженнях провідних учених процесу навчання геометрії у середній школі зазначається, що цей предмет найважчий для засвоєння школярами, а однією з проблем є те, що учні не усвідомлюють мету вивчення геометрії, тому що форми навчання геометрії і досі носять декларативний характер, а методи та зміст навчання орієнтовані на запам'ятовування геометричних фактів без зв'язку з їх застосуванням. Очевидно, що ці проблеми потребують системного підходу з переглядом освітніх стандартів, змісту самих підручників, особливостей організації освітнього процесу, застосування загально прийнятих методів навчання. Проте вже зараз є можливість запропонувати інструмент, який допоможе зробити навчання школярів продуктивнішим, а самих школярів мотивувати до усвідомленого засвоєння навчального матеріалу. Таким інструментом може виступати практико-орієнтоване навчання математики.

Аналіз останніх досліджень. Аналізуючи результати розгляду нормативних документів, що регламентують шкільну математичну освіту низки країн з високим рівнем навчання математики в середній школі відповідно до різних рейтингів (TIMSS-2015 та PISA-2018), було встановлено, що положення про необхідність навчання школярів практичним застосуванням математики закріплено в нормативних документах цих країн, також зазначимо, що в кожному з них приділено особливу увагу навчанню математичного моделювання.

Математичне моделювання виступає основним змістовним компонентом практико-орієнтованого навчання математики у школі. Аналіз наукових досліджень низки країн показав доцільність навчання математичного моделювання на уроках математики, і геометрії зокрема.

Аналіз сучасних вітчизняних шкільних підручників показав, що наші автори різною мірою використовують практичне застосування геометрії у навчанні, і ці застосування носять фрагментарний характер, тому становище з використанням практико-орієнтованих задач у геометрії у школі не можна визнати задовільним.

Мета статті – розкрити шляхи реалізації практико-орієнтованого навчання геометрії в гімназії відповідно до етапів вивчення математичних понять.

Виклад основного матеріалу дослідження. Аналіз сучасних тенденцій розвитку шкільної математичного освіти показує, що вивчення геометричних об'єктів, їх властивостей, геометричних відповідностей, які відображають реально існуючі геометричні форми, розвиває просторову уяву і уявлення, дитячу інтуїцію. Набуті при цьому знання, вміння і навички допомагають учням сприймати геометричні форми навколишнього середовища, освоювати фізичний простір.

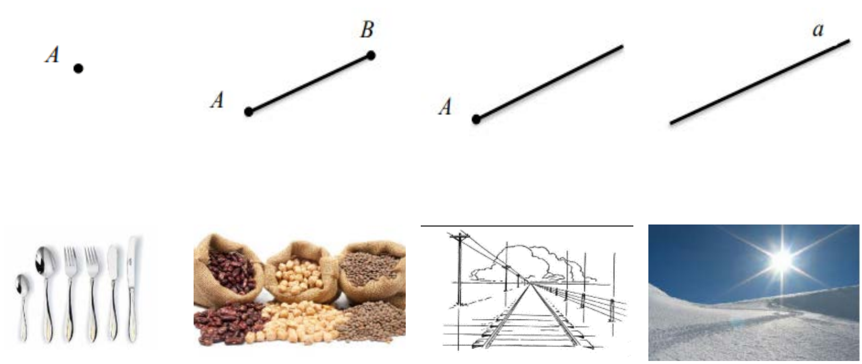
Під практико-орієнтованим навчанням геометрії в школі розумітимемо спеціально організований пізнавальний процес, спрямований на формування в учнів уявлень про геометрію як про метод пізнання дійсності, що дозволяє описувати та вивчати реальні об'єкти, а також на розвиток умінь застосовувати вивчені геометричні поняття, результати, методи для дослідження найпростіших об'єктів дійсності, для розв'язання практико-орієнтованих задач. Цей процес розглядатимемо як включення в сформовану методичну систему навчання геометрії в школі на основі складових практико-орієнтованого навчання, а саме практичне застосування геометрії, представлене комплексом навчальних матеріалів, метод математичного моделювання як метод вирішення практико-орієнтованих задач та як метод навчання, спрямований на формування у школярів відповідних прикладних умінь.

У теорії та методиці навчання математики розроблено закономірності вивчення математики школярами, зокрема, виділено відповідні етапи вивчення математичних понять. Традиційно виділяється три етапи: уведення, засвоєння та закріплення означень, понять, теорем, які мають місце і при навчанні геометрії.

1. Уведення понять. На етапі введення поняття на уроці геометрії навчання організується у такий спосіб, що учні з допомогою відповідних завдань і вправ підводяться вчителем до появи нового поняття. Учні у процесі «відкриття» поняття формулюють його визначення. На цьому етапі використовуються завдання, що сприяють актуалізації знань та вмінь, необхідних для засвоєння поняття; мотивації вивчення поняття та його розпізнавання.

Завдання 1.1. *Встановлення відповідності між набором реальних об'єктів та набором геометричних понять (відповідність: реальні об'єкти – моделі).*

Приклад. Встановіть відповідність, з'єднавши стрілками геометричні фігури та реальні об'єкти. Одній фігурі може відповідати лише один об'єкт (мал. 1.)



Мал. 1.

Виконання цієї вправи передбачає як узагальнення і абстрагування, так і порівняння реального об'єкта з його можливим математичним еквівалентом (математичної моделлю), у ролі якого цьому прикладі виступає геометрична фігура. Можливе й інше уявлення цього завдання. Наприклад, у першому стовпці подати інформацію не в графічній, а текстовій формі. Аналогічний прийом можна використовувати і в інших вправах. Математичні об'єкти в першому стовпці (або реальні об'єкти другого стовпця) можуть бути надані з надлишком або з нестачею. Одному реальному об'єкту можна співвіднести кілька математичних і навпаки. Це підвищує рівень складності запропонованих вправ.

Отже, схема для складання цієї вправи може бути подана так:

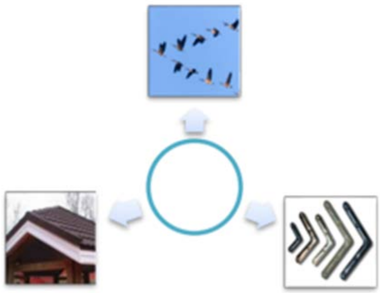
Математичне поняття (термін/поняття/означення/зображення	Реальний об'єкт
…	…
Математичне поняття (термін/поняття/означення/зображення	Реальний об'єкт

Мал. 2.

При виконанні цієї вправи формується прикладне вміння етапу математизування методу математичного моделювання: Замінювати вихідні об’єкти та відношення їх математичними еквівалентами. Описувати ці об’єкти та відношення мовою математики.

Завдання 1.2. *Підбір математичного еквіваленту (математичної моделі) до набору реальних об’єктів (відповідність: модель – реальні об’єкти).*

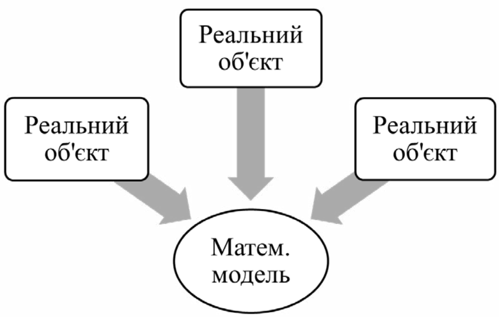
Приклад. Вкажіть, якою геометричною моделлю можуть бути реальні об’єкти на малюнку (мал. 3.)



Мал. 3.

Центральним елементом наведеної схеми є поняття кута – математична (геометрична) модель реальних об’єктів. Ця модель може бути виражена словесно та (або) графічно.

Схема для складання цієї вправи може бути подана у такому вигляді (мал. 4.)



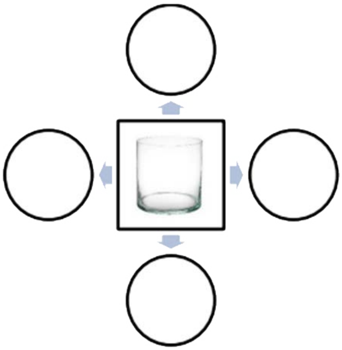
Мал. 4.

У наведеному прикладі показано, що одна математична модель (кут) може бути зіставлена реальним об’єктам різної природи. Тут же можна запропонувати і вправи, де реальні об’єкти підібрані з однієї галузі знань або сфери діяльності (одного контексту, слідуючи термінології дослідження PISA). Цей прийом обліку контексту під час підбору реальних об’єктів і ситуацій доцільно використовувати й інших вправах і завданнях на формування цілісного уявлення про застосування математики у світі.

При виконанні цієї вправи формується прикладне вміння етапу формалізації методу математичного моделювання «Співвідносити реальні об'єкти різної природи з однією математичною моделлю».

Завдання 1.3. *Підбір кількох математичних еквівалентів (математичних моделей) для одного реальному об'єкту (відповідність: моделі – реальний об'єкт).*

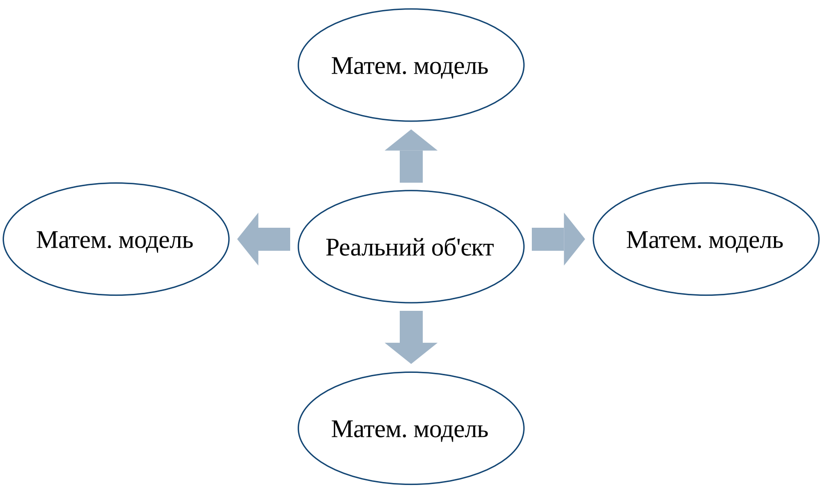
Приклад. Вкажіть, якими геометричними моделями може бути представлений реальний об'єкт (склянка) на малюнку (мал. 5.)



Мал. 5.

Зазначимо, що математичною моделлю можуть виступати не тільки геометричні фігури, але поняття рівності або подібності фігур.

Схема для складання цієї вправи може бути представлена в такому вигляді (мал. 6.)



Мал. 6.

Наведені типи вправ спрямовані на формування понять (етап введення), а також сприяють навчанню методу математичного моделювання та формуванню прикладних умінь етапу формалізації «Встановлювати відповідність між змістовною та математичною моделлю об'єкта відповідно до заданих умов» та «Описувати реальний об'єкт кількома математичними моделями».

Наведені приклади вправ можуть бути перетворені і на ілюстративний матеріал, якщо учням важко при їх виконанні. Наприклад, вправа, в якій необхідно підібрати математичні моделі до реального об'єкта «Склянка» має рівень вище базового і може спричинити труднощі в учнів при самостійному виконанні.

Тому доцільно виділити тип практико-орієнтованих завдань для першого етапу – мотивація введення поняття.

Для складання такого завдання підбирається відповідний приклад з навколишнього світу і формулюється питання, що дозволяє зробити висновок про наявність певної математичної закономірності, прояви властивостей і ознак математичного поняття тощо. Ці завдання сприяють формуванню прикладного вміння етапу математизації: «Виділяти реальні об'єкти, які можна описати засобами шкільного курсу математики».

2. Засвоєння понять. На етапі засвоєння понять, математичних речень школярі навчаються застосовувати вивчені на попередньому етапі визначення, аксіоми, теореми. Завдання на розпізнавання та застосування поняття сприяють первинному закріпленню введеного поняття, адже для їх розв'язання достатньо використовувати щойно вивчений матеріал. Такі завдання, зазвичай, не ускладнені необхідністю застосування інших нововведених фактів.

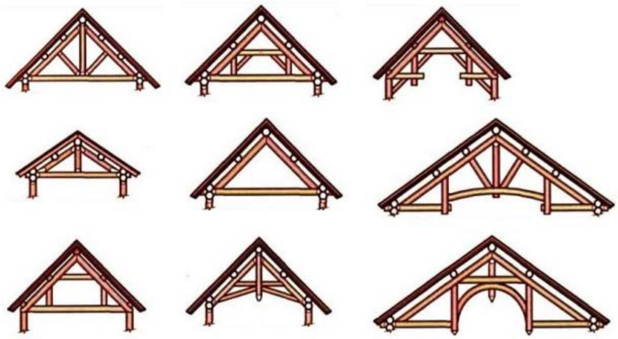
Вважаємо за доцільне на цьому етапі запропонувати школярам вправи на класифікацію понять. Відомі два види класифікації понять: за видозміненою ознакою та дихотомічна, які можна проілюструвати в курсі геометрії для гімназії.

Прикладами класифікацій за видозміненою ознакою є класифікації трикутників за величинами внутрішніх кутів, за кількістю рівних кутів, за кількістю рівних сторін. Як бачимо, поняття може мати кілька видозмінених ознак, які можуть бути обрані як основа класифікації. Також є можливості навчання школярів класифікувати об'єкти за дихотомічною ознакою. Наприклад, застосувати дихотомію можна для класифікації чотирикутників на опуклі та невипуклі. Покажемо, які практико-орієнтовані задачі на класифікацію можна запропонувати школярам, виділивши відповідний тип вправ.

Завдання 2.1. *Виявлення основи класифікації поняття (за видозміненою ознакою або за дихотомічною ознакою), (класифікація понять: основа).*

Приклад. На малюнку (мал. 7.) показані різні види крокв'яних систем, що використовуються для влаштування дахів малоповерхових будинків. Підберіть одну математичну модель, якій відповідають усі представлені крокв'яні системи та вкажіть ознаку, за якою обрано саме цю модель.

Наведемо можливий перебіг міркувань школярів. Математичною моделлю, що підходить до всіх пропонованих об'єктів, можна вибрати кут. Тепер потрібно знайти потрібну ознаку. Кути можуть бути прямими, гострими та тупими. На малюнку представлені об'єкти, математичними моделями яких можуть бути прямі кути та тупі кути. У завданні потрібно підібрати одну модель (це кут) і вказати відповідну ознаку (величина кута).



Мал. 7.

Виберемо іншу модель – трикутник. Тоді вивчення форм представлених крокв'яних систем показує, що за ознаку варто вибрати рівність двох сторін трикутника. Отже, ще однією відповіддю на запитання буде така: математична модель – рівнобедрений трикутник, ознака – рівність двох сторін.

Отже, для конструювання такої задачі вибираються математичні поняття, класифікацію яких з обраної основи необхідно продемонструвати. До цих понять як до математичних моделей підбираються відповідні реальні об'єкти. Задача конструюється за такою словесною формулою: «На малюнку показано (або пераховано) реальні об'єкти. Підберіть одну математичну модель, якій відповідають усі представлені об'єкти та вкажіть ознаку, за якою обрано саме цю модель».

Завдання 2.2. *Розпізнавання введеного поняття чи математичної пропозиції під час опису реального об'єкта чи процесу (розпізнавання поняття/ математичної пропозиції).*

Суть конструювання вправ цього типу у тому, що наводиться опис (зображення) реального об'єкта чи явища та складаються питання, які дають можливість розпізнати та підібрати відповідну математичну модель – поняття чи математичну пропозицію.

Приклад. На малюнку (мал. 8.) показано форму для садової доріжки, виготовлену з поліпропілену. Форма встановлюється на попередньо розмічену та підготовлену ділянку землі, потім у неї заливається бетон або інший відповідний розчин. Потім форма виймається і поміщається у наступну частину доріжки.

Мал. 8.

1. Форма поділена на 9 багатокутників. Позначте їх цифрами на малюнку та запишіть номери опуклих та неопуклих багатокутників.

2. Чи можна вказати два багатокутники, які мають спільну сторону і утворюють разом опуклий/неопуклий багатокутник?

3. Вкажіть, який вид руху можна використовувати для опису процесу виготовлення доріжки під час переміщення форми? (Відповідь: паралельне перенесення на вектор, довжина якого дорівнює довжині форми.)

Звернемо увагу, що цю вправу можна використовувати у двох навчальних ситуаціях: при засвоєнні понять опуклий та неопуклий багатокутник (питання 1 та 2) та на етапі засвоєння поняття паралельного перенесення (питання 3). Такі вправи дозволяють перейти до розв'язання практико-орієнтованих задач, у яких для побудови математичної моделі необхідно вибрати відповідний до реальної ситуації математичний еквівалент або побудувати модель як сукупність математичних понять та відношень. Таким чином вправи сприяють формуванню прикладного вміння «Замінювати вихідні об'єкти та відношення їх математичними еквівалентами. Описувати ці об'єкти та відношення мовою математики».

Завдання 2.3. *Застосування введеного поняття чи математичної пропозиції для пояснення подій реального світу (застосування поняття/математичної пропозиції (чому?)*

Приклади

1. Чому тротуарну плитку часто виготовляють у формі правильних багатокутників, наприклад, шестикутників чи квадратів?

2. Якщо у вас немає креслярського косинця, то прямий кут можна отримати дворазовим перегинанням аркуша паперу довільної форми. Чому кут буде прямим?

3. Поясніть, чому що далі предмет від ока, то менших розмірів він нам здається? Проілюструйте своє пояснення малюнком.

Зазначимо, перші дві вправи – базового рівня. У їх зміст уже названо геометричне поняття, що допоможе у пошуку відповіді на поставлене запитання. У третій вправі такої підказки немає, математичні поняття у формулюванні не згадуються, отже, знайти відповідну математичну модель складніше.

Ці вправи спрямовані на формування прикладних умінь «Вибирати раціональні методи дослідження реальних об'єктів залежно від поставленого завдання» та «Аналізувати математичні методи рішення з точки зору їх раціональності для дослідження реального об'єкта».

Завдання 2.4. *Встановлення зв'язку між математичним поняттям та/або математичною пропозицією та практичними діями в реальному світі (зв'язок: модель – реальний об'єкт (як?)).*

1. Як використовується ознака паралельності площин при влаштуванні підлоги?

2. Як використовувати твердження «вписаний кут, що спирається на півколо, – прямий» для того, щоб знайти центр круглої тарілки?

3. Як застосовується властивість жорсткості трикутника під час облаштування даху будинку?

Вправи цього типу спрямовані на формування прикладного вміння «Аналізувати математичні методи розв'язання погляду їх раціональності на дослідження реального об'єкта».

Перший тип практико-орієнтованих задач на цьому етапі – це задачі з одно-, двокроковим внутрішньомодельним розв'язанням для первинного закріплення вивченого. Ці задачі не ускладнені необхідністю застосувати інші нововведені поняття, математичні пропозиції тощо. Проте побудова математичної моделі ускладнена надлишком чи нестачею даних. У цьому полягає особливість прийому конструювання.

3. Закріплення понять.

Завдання 3.1. *Первинне закріплення вивченого поняття/математичної пропозиції.*

Приклад. У день літнього сонцестояння (21–22 червня) Сонце на широті Каїра піднімається над горизонтом на кут приблизно 83°. Знайдіть, якою довжиною буде ваша тінь у цей момент.

Бачимо, що розв'язання цієї задачі однокрокове. Вона може бути використана щодо поняття тангенса кута в прямокутному трикутнику. Звернемо увагу, це задача із прихованими даними. В умові не наведено зріст людини, учень повинен здогадатися, що необхідно використовувати дані про власний зріст під час розв'язання задачі.

Цей тип задач на етапі закріплення дозволяє формувати прикладні вміння школярів, відповідні етапу формалізації методу математичного моделювання, а саме: «Оцінювати повноту вихідних даних для побудови математичної моделі».

Завдання 3.2. *Включення нового поняття / математичної пропозиції до системи відомих.*

Цей тип задач сприяє осмисленому застосуванню та тривалому збереженню у пам'яті учнів змісту пройденого матеріалу. Особливість прийому конструювання задачі полягає у підборі такої реальної ситуації, для розв'язання якої використовується кілька понять та математичних пропозицій. При цьому певну складність при розв'язанні задачі представляють усі або окремі етапи методу математичного моделювання.

Типи вправ цьому етапі виділяти немає необхідності. Підготовча робота до закріплення та застосування вивченого завершена на етапах введення та засвоєння. На поточному етапі закріплення доцільно пропонувати практико-орієнтовані задачі, внутрішньо модельне розв'язання яких передбачає складнішу математичну діяльність, ніж на попередніх етапах. Встановлення відповідності між реальним світом та абстрактним світом геометрії на цьому етапі не є самоціллю, а потрібне для розв'язання задачі.

Приклад. На мотузці зав'язали п'ять вузликів. На скільки частин ці вузлики розділили мотузку? Скільки треба зав'язати вузликів, щоб поділити мотузку на сім частин? Сформулюйте правила для розв'язання цієї задачі.

Зазначимо, що вузлики можна зав'язувати 3 способами (мал. 9.).

Мал. 9.

Для того, щоб здогадатися до такого розташування вузликів, необхідно відповісти на питання, якими математичними еквівалентами можна уявити цей реальний об'єкт? Це пряма, промінь та відрізок (залежно від наявності або відсутності вузликів на кінці мотузки).

Виділені типи задач та вправ дозволяють сконструювати комплекс практико-орієнтованих навчальних матеріалів, що передбачають ілюстративні матеріали, завдання та вправи з різними дидактичними функціями згідно з етапами вивчення математичних пропозицій (введення, засвоєння та закріплення визначень понять, теорем) на заданому ступені навчання.

На основі загально дидактичних принципів доступності, послідовності та систематичності сформулюємо низку методичних принципів складання комплексу практико-орієнтованих навчальних матеріалів з геометрії.

1. У геометричних завданнях та ілюстративних матеріалах, що відображають практичне застосування математики насправді, використовуються математичні моделі тієї складності, що відповідає рівню підготовки учнів у галузі математики та інших навчальних предметів. (Принцип доступності.)

2. Практико-орієнтовані навчальні матеріали спрямовані на досягнення запланованих предметних результатів навчання геометрії у заданий відрізок навчального часу. (Принцип систематичності.)

3. Практико-орієнтовані навчальні матеріали є комплексом вправ, завдань та ілюстративних матеріалів, що забезпечують всі етапи вивчення математичних пропозицій та сприяють формуванню прикладних та математичних умінь школярів. (Принцип послідовності.)

Висновки. Навчання з використанням практико-орієнтованих задач стає підосновою більш якісного засвоєння інформації, оскільки в учнів виникають асоціації з конкретними діями та подіями. Особливість цих задач у тому, що викликають підвищений інтерес учнів, сприяють розвитку допитливості, творчої активності. Такі задачі розвивають логічне та асоціативне мислення, забезпечують розвиток особистості учня, його спостережливість, уміння сприймати та засвоювати інформацію, робити висновки образного та аналітичного змісту; дають можливість застосовувати отримані знання для аналізу процесів, що спостерігаються; розвивають творчі здібності; увиразнюють роль математики у сучасному житті.

Використані джерела

Бурда, М. (2022). Особливості застосування геометричних фігур на практиці. *Проблеми сучасного підручника*, (28), 18–25.

Глобін, О. І., Бурда, М. І., Васильєва, Д. В., Волошена В. В., Вашуленко, О. П., Мацько, Н. Д., Хмара, Т. М. (2015) Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі. Методичний посібник.

Rellensmann J. et al. (2020) Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. ZDM Mathematics Education 52, 97–110.

Seto C. et al. (2012) Mathematical Modelling for Singapore Primary Classrooms: From a Teacher's Lens, Mathematics education: Expanding horizons: Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide: Mathematics Education Research Group of Australasia, 672–679.

References

Burda, M. (2022) Osoblyvosti zastosuvannia heometrychnykh fihur na praktytsi. Problemy suchasnoho pidruchnyka, (28), 18–25. (in Ukrainian).

Hlobin, O. I., Burda, M. I., Vasylieva, D.V. Voloshena, V. V., Vashulenko, O. P., Matsko, N. D., Khmara, T. M. (2015) Kompetentnisno oriientovana metodyka navchannia matematyky v osnovnii shkoli. Metodechnyi posibnyk. (in Ukrainian).

Rellensmann J. et al. (2020) Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. ZDM Mathematics Education 52, 97–110. (in English).

Seto C. et al. (2012) Mathematical Modelling for Singapore Primary Classrooms: From a Teacher's Lens, Mathematics education: Expanding horizons: Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Adelaide: Mathematics Education Research Group of Australasia, 672–679. (in English).

Victoriia Voloshena, *Ph.D. in Pedagogy, Senior Researcher of the Department of Mathematical and Information Education of the Institute of Pedagogy of the NAES of Ukraine, Kyiv, Ukraine.*

WAYS OF IMPLEMENTING PRACTICE-ORIENTED GEOMETRY TEACHING IN GYMNASIUM ACCORDING TO THE STAGES OF LEARNING MATHEMATICAL CONCEPTS

The article attempts to reveal the problem of implementing the idea of practice-oriented teaching of geometry in gymnasium according to the stages of learning mathematical concepts. Practice-oriented teaching of geometry is considered as a tool that will be able to solve the problem of productive learning of students, and to motivate the students themselves to conscious assimilation of educational material. It is proposed to use a special approach to the study of mathematical concepts, based on the step-by-step mastering of the learning content with the introduction of a complex of practice-oriented educational materials, which include illustrative materials, tasks and exercises with various didactic functions according to the stages of introduction, assimilation and consolidation of the definitions of concepts and theorems. A number of methodological principles have been formulated that were taken into account when compiling a set of practice-oriented educational materials: accessibility, systematicity and consistency. Examples of such training are presented, in which the relationships between the stages of learning concepts and their applications by means of a complex of practice-oriented educational materials and applied mathematical skills of schoolchildren, selected according to the stages of the mathematical modeling method, are indicated. It is shown that mathematical modeling in practice-oriented mathematics teaching at school is the theoretical basis for the formation of applied mathematical skills of schoolchildren in accordance with the step-by-step training in the method of mathematical modeling. The binary role of practical applications of mathematics is emphasized, which consists, on the one hand, in teaching the use of mathematical apparatus to study and describe reality, and on the other, in helping to improve the quality of subject results.

Keywords: geometry; teaching methodology; mathematical concepts, mathematical modeling; practice-oriented tasks, practice-oriented training.