


ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР НА ПРАКТИЦІ

Михайло Бурда,

доктор педагогічних наук, професор,
дійсний член НАПН України,
завідувач відділу математичної та інформатичної освіти
Інституту педагогіки НАПН України,
м. Київ, Україна,

 <https://orcid.org/0000-0003-0330-9866>

 mibur5@ukr.net

Вироблення вмінь застосовувати властивості геометричних фігур на практиці передбачає забезпечення оптимального співвідношення між прикладним і теоретичним компонентами в змісті навчання. Обґрунтовується необхідність збільшення в навчальному матеріалі підручника питомої ваги прикладного компонента, який сприятиме виробленню в учнів не лише суто геометричних умінь, а й умінь застосовувати знання в реальних практичних ситуаціях, під час вивчення інших шкільних предметів. Наводяться окремі особливості вироблення вмінь розв'язувати задачі практичного змісту, які ґрунтуються на врахуванні в навчанні етапів застосування математики на практиці.

Ключові слова: математика; методика; геометричні фігури; задачі практичного змісту.

Постановка проблеми. Зміст математичної освіти, зокрема геометричної, передбачає два компоненти – теоретичний (емпірична та логічна організація матеріалу: аксіоми, поняття, властивості, ознаки, доведення) і прикладний (застосування математики до розв'язання практичних проблем: кодування та декодування інформації, моделювання, інтерпретація результату). Реформи змісту стосувалися пріоритету цих компонентів, питомої їх ваги у навчанні, що суттєво впливало на результати навчання. Традиційно акцент робився на теоретичному компоненті, що сприяло виробленню суто математичних умінь і уповні не забезпечувало вирішення сучасних завдань математичної освіти. Загальна вимога на сьогодні – збільшення у змісті освіти питомої ваги прикладного компонента, який дасть змогу учню успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях, провадити майбутню професійну діяльність. Значно більше уваги звертається на діяльнису і ціннісну складові (розпізнавати проблеми, які можна розв'язати засобами математики, будувати та досліджувати простіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, критично оцінювати отримані результати, робити правильні висновки тощо). Відтак збільшення питомої ваги прикладного ком-

понента у змісті підручника та посилення його зв'язку з теоретичним сприятиме якісній математичній, зокрема геометричній, підготовці учнів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У роботі Бурди М., Тарасенкової Н., Васильєвої Д. і Вашуленко О. (Бурда, Тарасенкова, Васильєва, Вашуленко, 2018) серед важливих пріоритетів розвитку шкільної математичної освіти виділяється прикладна і практична спрямованість навчання – орієнтація змісту, форм, методів і засобів навчання на застосування математики в техніці, технологіях, під час вивчення інших предметів, у майбутній професійній діяльності та побуті. Заслужують на увагу результати аналізу завдань практичного змісту зовнішнього незалежного оцінювання з математики, проведеного Яковлевою О. і Каплун В. (Яковлева, Каплун, 2019), де пропонуються прийоми вироблення вмінь застосовувати математичні знання на практиці, зокрема: подавати завдання у вигляді проблем на відпрацювання або закріплення знань, на міжпредметні зв'язки або практичні завдання, де необхідно самостійно знайти додаткову інформацію та зробити певні розрахунки. Волошеною В. (Волошена, 2021) встановлено, що застосування компетентнісно-орієнтованих задач сприяє якісному засвоєнню математики та запропоновано рівні їх складності. Обґрунтовано (Бурда, 2020), що успішна реалізація прикладної спрямованості шкільної математичної освіти передбачає цілісну переорієнтацію змісту навчання з урахуванням етапів застосування математики на практиці. Теоретичні відомості і практичні матеріали щодо реалізації прикладної спрямованості геометрії в старшій школі містяться у посібнику Прус А. і Швеця В. (Прус, Швець, 2007). Авторами запропоновано систему прикладних задач природничого змісту та методику навчання їх розв'язувати. Васильєва Д. (Васильєва, 2018) рекомендує у підручниках поруч з абстрактними задачами на формування традиційних обчислювальних та інших навичок значну увагу приділяти практико-орієнтованим задачам, спрямованим на формування ключових і предметних компетентностей. Дослідниками Вашуленко О. і Сердюк Е. (Вашуленко, Сердюк, 2019) з'ясовано, що вимоги до системи завдань у підручнику з геометрії мають ґрунтуватися на дидактичних принципах, цілях навчання та особливостях навчальної діяльності учнів. Встановлено (Насадюк, 2017), що використання практико-орієнтованих проєктів дозволяє сформувати в учнів уміння застосовувати математичні знання в життєвих ситуаціях, здійснювати пошукову, дослідницьку роботу.

Мета статті – розкрити особливості вироблення вмінь учнів застосовувати властивості геометричних фігур під час розв'язування задач практичного змісту.

Виклад основного матеріалу дослідження. Прикладна спрямованість навчання математики здебільшого реалізується під час розв'язування задач практичного змісту – задач, що виникають за межами математики та для розв'язання яких використовується математичний апарат. Ці задачі складні для учнів. Насамперед розв'язування практичних задач потребує вмінь розв'язувати відповідні математичні задачі. Окрім того, учні мають усвідомити, що застосування математики до розв'язування будь-яких задач, які виникають у людській практиці розчленовується на три етапи: кодування інформації (перехід від практичної ситуації, описаної у задачі, до математичної її моделі); формулювання і розв'язання математичної задачі (перехід від моделі до математичної за-

дачі); декодування (застосування результату розв'язаної математичної задачі до даної практичної). Вироблення вмінь виконувати ці етапи розв'язання – важливе завдання методики математики. Навчання має враховувати зміст і особливості етапів застосування математики на практиці, тобто включати такі взаємозв'язані складові: організація емпіричних узагальнень (аналіз предметних моделей, прикладів із довкілля, зі сфери майбутньої професійної діяльності, фактів з інших навчальних предметів), спрямована на самостійне «відкриття» учнями математичного факту, з'ясування його істотних ознак, властивостей і на основі цього – формулювання відповідного твердження; логічне упорядкування навчального матеріалу (доведення або спростування гіпотези, розв'язування базових задач, які дають змогу сконструювати і усвідомити відповідні способи діяльності); застосування математичного факту в навчальних і реальних практичних ситуаціях, під час вивчення інших шкільних предметів (Бурда, 2020, с. 16–17). Другий і третій складники методики мають бути максимально наближеними і розглядатися як взаємно обернена діяльність. У процесі такої діяльності учні приходять до розуміння того, що один і той же математичний факт може використовуватись як модель для розв'язання різних практичних задач. Так, функція $y = kx$ виражає залежність між різними величинами: шляхом і часом, масою і об'ємом тіла, довжиною кола і його діаметром тощо. Навпаки, різні за сюжетом практичні задачі можуть зводитись до однієї математичної моделі. Тому в підручниках важливо виділяти ті практичні ситуації, для розв'язання яких найчастіше використовується запропонована математична модель.

Геометричні задачі є моделями задач практичного змісту. Ці задачі взаємопов'язані, оскільки взаємопов'язаними є математична, зокрема геометрична, та інші ключові компетентності. Тому розв'язування геометричних і відповідних практичних задач не рекомендується віддаляти в навчальному часі. Для формування умінь застосовувати властивості геометричних фігур на практиці учням спочатку пропонуються пари таких задач: геометрична задача (Г) та відповідна задача практичного змісту (П). Розв'язок геометричної задачі використовується як модель для наступної практичної задачі. Потім, розв'язуючи різні задачі практичного змісту, учні виконують зворотню дію – переходять від запропонованої практичної задачі до геометричної, яка є її моделлю, розв'язують її та інтерпретують одержаний результат. Тобто, розв'язання геометричних задач і задач практичного змісту розглядається як взаємно обернена діяльність: (Г) ↔ (П). Наведемо деякі прийоми формування вмінь застосовувати властивості геометричних фігур під час розв'язування задач практичного змісту.

1. Інтерпретація на практиці елементарних фігур, їх властивостей та деяких способів діяльності. Наприклад, точки, прямі, відрізки (табл. 1).

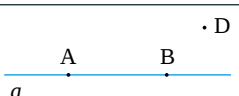

Пропонуються простіші вправи на використання властивостей елементарних фігур на практиці. Наприклад:

1. Назвіть предмети довкілля, які можна вважати точкою, прямою, відрізком, кутом.
2. Як провісити пряму за допомогою віх (кілків, загострених з одного боку)?
3. На місцевості кілочками позначено дві точки однієї прямої і дві точки другої прямої. Як знайти точку перетину цих прямих? Розгляньте два випадки розміщення точок.
4. Учень сформулював властивість прямої. Чи є правильним його твердження?

- А. Через будь-які два об'єкти можна провісити безліч прямих.
- Б. Через будь-які два об'єкти можна провісити тільки одну пряму.
- В. Якщо відомі три об'єкти, то через них завжди можна провісити пряму і тільки одну.

Таблиця 1

Простіша геометрія на практиці

Елементарні фігури в геометрії	Елементарні фігури на практиці
Точки і прямі	
 <p>Точки A, B, D.</p> <p>Пряма a або AB.</p> <p><i>Властивість прямої</i> Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.</p> <p><i>Властивість розміщення точок на прямій</i> З трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.</p>	<p><i>Точки</i>: кілочки, віхи, споруди, будівлі, рослини, міста, зображені на карті, розмірами яких можна знехтувати тощо.</p> <p><i>Прямі</i>: магістралі, канали, вулиці, залізничні колії, шириною яких можна знехтувати тощо.</p> <p><i>Властивість прямої</i> Через будь-які два об'єкти можна провісити пряму, і тільки одну.</p> <p><i>Властивість розміщення об'єктів на прямій</i> З трьох будь-яких об'єктів, що розміщені на прямій, один і тільки один лежить між двома іншими.</p>
Відрізки	
 <p>Відрізок AB.</p> <p><i>Властивості вимірювання відрізків</i> Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою.</p> <p><i>Способи діяльності</i></p> <ol style="list-style-type: none"> Щоб встановити, чи лежить точка C між точками A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $C = BA + AC$. 	<p><i>Відрізки</i>: довжини, висоти предметів, відстані між об'єктами на поверхні землі (населеними пунктами, спорудами, тощо).</p> <p><i>Властивості вимірювання відрізків</i> Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-яким об'єктом.</p> <p><i>Способи діяльності</i></p> <ol style="list-style-type: none"> Щоб встановити, чи лежить об'єкт C між об'єктами A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три об'єкти A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$.

2. **Перехід від задачі геометричної (Г) до задачі практичного змісту (П).** Пропонуються пари задач, де спочатку розв'язується задача геометрична, а потім вона використовується як модель під час розв'язання задачі практичного змісту. Наприклад:

1. (Г) Точки А, В, С лежать на прямій лінії. Відстань між точками А і В дорівнює 10 см, а між точками А і С – 6 см. Знайдіть відстань ВС. Розгляньте два випадки.

(П). Три школи розміщено по прямій лінії. Відстань між школами № 1 і № 2 дорівнює 5 км, а між школами № 1 і № 3–4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?

2. (Г). Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

(П). Як визначити центр металевої деталі, що має форму круга, скориставшись кутником і лінійкою з поділками.

3. (Г). Катет прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гострий кут – 45° . Знайдіть другий катет трикутника.

(П). Поясніть за малюнком 1, як можна знайти висоту дерева.



Мал. 1.

3. **Перехід від геометричної задачі (Г) до способу діяльності (СД) і від нього до практичної задачі (П).** У процесі навчання засвоюються не лише геометричні знання, а й способи діяльності – поради або вказівки щодо того, як діяти у тій чи іншій навчальній ситуації. Вони, з одного боку, є результатом засвоєння навчального матеріалу, а з другого – спрямовані на застосування понять або властивостей фігур на практиці. Спочатку способи діяльності відпрацьовуються в процесі розв'язування геометричних задач, а потім застосовуються до розв'язування задач практичного змісту. Наприклад, тема «Прямокутник».

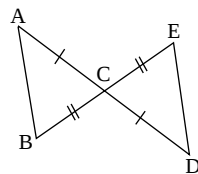
(Г). Доведіть, що коли в чотирикутнику діагоналі рівні і дві протилежні сторони рівні й паралельні, то такий чотирикутник – прямокутник.

(СД). Щоб встановити, що чотирикутник – паралелограм, доведіть, що у ньому: або протилежні сторони попарно паралельні (означення паралелограма); або протилежні сторони попарно рівні (ознака); або дві протилежні сторони рівні і паралельні (ознака); або діагоналі діляться точкою їх перетину навпіл (ознака). Щоб встановити, що запропонований паралелограм – прямокутник, доведіть, що у ньому: або всі кути прямі (означення прямокутника), або діагоналі рівні (ознака).

(П). Учень виготовив рамку прямокутної форми. Щоб перевірити правильність виготовлення рамки, він перевіряв рівність її діагоналей. Чи достатньо такої перевірки? Чому?

Успішне розв'язання задач на знаходження на місцевості відстаней до недоступного об'єкта залежить від уміння скористатися ознаками рівних допоміжних трикутників. Шукану відстань розглядаємо як невідому сторону одного з двох рівних трикутників, які на малюнку слід побудувати, провівши допоміжні лінії. Виділяється спосіб діяльності та застосовується до розв'язання задач практичного змісту. Наприклад:

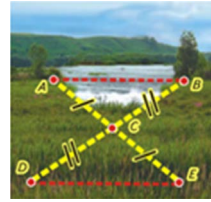
(Г). Дано: $AC = CD$, $BC = CE$ (мал. 2). Доведіть: $AB = DE$.



Мал. 2.

(СД). Щоб довести рівність двох відрізків, один з яких шуканий: 1) утворить на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки; 2) доведіть, що трикутники рівні; 3) зробіть висновок: відрізки рівні як відповідні сторони рівних трикутників.

(П). На малюнку 3 показано, як виміряти відстань між пунктами А і В, між якими не можна пройти по прямій. Пояснить вимірювання.



Мал. 3.

4. Виділення практичних ситуацій, для розв'язання яких найчастіше використовується запропонована геометрична модель. Так, найпоширеніші практичні ситуації з теми «Коло і круг. Геометричне місце точок» можуть бути такими: 1) визначення центра предметів, що мають форму круга; 2) обчислення довжини кола і площі предметів, що мають форму круга за їх радіусом і діаметром (та обернена задача); 3) знаходження висоти, глибини, відстані; 4) облаштування предметів на місцевості (клуб, ділянок землі, ковзанок тощо), що мають форму круга; 5) знаходження місця для об'єкта (автобусної зупинки, залізничної станції, криниці, мосту, бази відпочинку тощо), де йдеться про рівність певних відстаней.

Наприклад, задача, що належить до практичної ситуації першого виду.

Ситуація. Визначення центра предмета, що має форму круга.

Опис ситуації. Виготовлена стільниця столу має форму круга. Потрібно зробити отвір в центрі стільниці столу, щоб прикріпити ніжку.

Завдання. 1) Знайдіть центр стільниці, якщо у вас є тільки кутник і лінійка з поділками. 2) Чи зможете виконати завдання, якщо у вас є тільки кутник і лінійка без поділок? 3) Як визначити радіус стільниці, скориставшись тільки рулеткою?

Отже, розв'язуючи задачі практичного змісту учні спочатку формулюють та розв'язують відповідні геометричні задачі, які є моделями практичних, потім інтерпретують отримані результати до вихідних практичних задач.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Обґрунтована необхідність збільшення в навчальному матеріалі підручника питомої ваги прикладного компонента, який забезпечуватиме вироблення в учнів не лише суто геометричних умінь, а й умінь застосовувати знання в реальних практичних ситуаціях, у майбутній професійній діяльності, під час вивчення інших шкільних предметів. Набуття цих умінь покращується, якщо методика включає три взаємозв'язані складові: організація емпіричних узагальнень, логічне упорядкування навчального матеріалу, застосування математичних фактів на практиці. Другий і третій складники методики рекомендується не віддаляти в навчальному часі та розглядати їх як взаємно обернену діяльність. Пропонуються спеціальні прийоми навчання розв'язувати задачі практичного змісту, зокрема: інтерпретація елементарних фігур на практиці; використання пар задач: геометричну та відповідну практичну задачу; перехід від способів геометричної діяльності до задач практичного змісту; використання ознак рівності допоміжних трикутників; орієнтація на практичні ситуації, для розв'язання яких найчастіше використовується запропонована геометрична модель.

Запропоновані прийоми вироблення вмінь застосовувати властивості геометричних фігур на практиці рекомендується враховувати при укладанні навчальних програм та підготовці підручників з геометрії. Пріоритетним напрямом подальших досліджень є розроблення методик використання математичних моделей під час вивчення інших шкільних предметів.

Використані джерела

- Бурда, М. І. (2020). Зміст підручників з математики у контексті результатів дослідження PISA-2018. *Проблеми сучасного підручника*, (24), 14–21. <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2020-24-14-21>.
- Бурда, М. І., Тарасенкова, Н. А., Васильєва, Д. В., & Вашуленко, О. П. (2018). Концепція математичної освіти 12-річної школи. *Математика в рідній школі*, (7–8), 2–8. <https://lib.iitta.gov.ua/711990/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%BF%D1%86%D1%96%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%97%20%D0%BE%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B8.pdf>.
- Васильєва, Д. В. (2018). Математичні задачі як засіб формування ключових компетентностей учнів. *Проблеми сучасного підручника*, (21), 83–91. <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2018-21-83-91>.
- Вашуленко, О. П., & Сердюк, Е. Г. (2019). Принципи добору системи вправ до підручника з геометрії для ліцею. *Проблеми сучасного підручника*, (23), 47–55. <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2019-23-47>.
- Волошена, В. В. (2021). Дидактичні вимоги до компетентнісно-орієнтованих задач в процесі навчання математики. *Проблеми сучасного підручника*, (27), 36–45. http://ipvid.org.ua/products/2021_2/Statti/5.pdf.
- Насадюк, Т. О. (2017). Особливості використання практико-орієнтованих проєктів під час навчання математики учнів 5-го класу. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова*, (3) 19, 51–57. https://fmf.npu.edu.ua/images/files/StorinkaVikladacha/Shkolnyi/1819/Chasopys_NPU_seria_3_vol_19.pdf.
- Прус, А., & Швец, В. (2007). Прикладна спрямованість стереометрії. 10–11 кл. Шкільний світ.
- Яковлева, О. М., & Каплун, В. М. (2019). Аналіз завдань практичного змісту ЗНО з математики 2017–2019 років. *Фізико-математична освіта*, (4) 22, 142–149. <http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/8514>.

References

- Burda, M. I. (2020). Zmist pidruchnykiv z matematyky u konteksti rezultativ doslidzhennia PISA-2018. *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (24), 14–21. <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2020-24-14-21>. (in Ukrainian).
- Burda, M. I., Tarasenkova, N. A., Vasyliieva, D. V., & Vashulenko, O. P. (2018). Kontseptsiia matematychnoi osvity 12-richnoi shkoly. *Matematyka v ridnii shkoli*, (7–8), 2–8. <https://lib.iitta.gov.ua/711990/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%BF%D1%86%D1%96%D1%8F%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%BE%D1%97%20%D0%BE%D1%81%D0%B2%D1%96%D1%82%D0%B8.pdf>. (in Ukrainian).
- Vasyliieva, D. V. (2018). Matematychni zadachi yak zasib formuvannia kliuchovykh kompetentnostiie uchniv. *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (21), 83–91. <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2018-21-83-91>. (in Ukrainian).

- Vashulenko, O. P., & Serdiuk, E. H. (2019). Pryntsypy doboru systemy vprav do pidruchnyka z heometrii dlia litseiu. *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (23), 47–55, <https://doi.org/10.32405/2411-1309-2019-23-47>. (in Ukrainian).
- Voloshena, V. V. (2021). Dydaktychni vymohy do kompetentnisno-orientovanykh zadach v protsesi navchannia matematyky. *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, (27), 36–45, http://ipvid.org.ua/products/2021_2/Statti/5.pdf. (in Ukrainian).
- Nasadiuk, T. O. (2017). Osoblyvosti vykorystannia praktyko-orientovanykh proektiv pid chas navchannia matematyky uchniv 5-ho klasu. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Drahomanova*, (3) 19, 51–57. https://mf.npu.edu.ua/images/files/StorinkaVikladacha/Shkolnyi/1819/Chasopys_NPU_seria_3_vol_19.pdf. (in Ukrainian).
- Prus, A., & Shvets, V. (2007). Prykladna spriamovanist stereometrii. 10–11 kl. *Shkilnyi svit*. (in Ukrainian).
- Yakovlieva, O. M., & Kaplun, V. M. (2019). Analiz zavdan praktychnoho zmistu ZNO z matematyky 2017–2019 rokov. *Fyzyko-matematychna osvita*, (4) 22, 142–149. <http://repository.sspu.edu.ua/handle/123456789/8514>. (in Ukrainian).

Mykhailo Burda, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Full Member of the NAES of Ukraine, Head of the Department of Mathematical and Information Education of the Institute of Pedagogy of the NAES of Ukraine, Kyiv, Ukraine

PECULIARITIES OF APPLICATION OF GEOMETRIC FIGURES IN PRACTICE

Developing the ability to apply the properties of geometric figures in practice involves the optimal relationship between applied and theoretical components of learning content. The necessity of increasing the value of the applied component in the textbook is substantiated. This component will provide students with not only purely geometric skills, but also the ability to apply knowledge in real practical situations, while studying other school subjects.

The basis of the proposed methodology is to take into account in teaching the content and features of the stages of application of mathematics in practice, i.e. the method should include three interrelated components: organization of empirical generalizations (aimed at “discovering” mathematical fact) based on this – the formulation of the statement); logical organization of educational material (proving or refuting a hypothesis, solving basic problems that allow you to design appropriate methods of activity); application of mathematical fact in practice (in educational and real practical situations, while studying other school subjects). The second and third components of the methodology are recommended not to be removed in the study time, but to be as close as possible and considered as a mutually inverse activity. Some methods of developing the ability to solve problems of practical content, in particular: interpretation in practice of elementary figures, their properties and some ways of functioning; use of pairs of problems: geometric and corresponding practical problem; transition from the method of mathematical activity to problems of practical content; use of signs of equality of auxiliary triangles; focus on practical situations for which this geometric model is most often used.

Keywords: mathematics; methodology; geometric shapes; applied tasks.