УДК 37.013.3
https://doi.org/10.32405/2411-1309-2021-26-33-42

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ В ПІДРУЧНИКУ З ПЛАНІМЕТРІЇ МЕТОДОМ ДОПОМІЖНОГО ТРИКУТНИКА

***Михайло Бурда**,*
доктор педагогічних наук, професор,
дійсний член НАПН України,
завідувач відділу математичної та інформатичної освіти
Інституту педагогіки НАПН України,
м. Київ, Україна,
e-mail: mibur5@ukr.net,
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-0330-9866

Обґрунтовано, що розв'язування задач на побудову дасть змогу глибше засвоїти навчальний матеріал, посилити прикладну його спрямованість, а отже, й ефективно формувати математичну та інші ключові компетентності. Розв'язання цих задач покращується, якщо учні оволодівають загальними методами знаходження планів побудов. Рекомендовано загальний метод побудови трикутників і чотирикутників – метод допоміжного трикутника. Розкрито його суть і особливості застосування. Наведено відповідні зразки задач та способи їх розв'язання.

Ключові слова: геометрія; побудови; допоміжний трикутник.

Постановка проблеми. Важливість задач на побудову зумовлюється особливістю змісту планіметрії, провідним компонентом якого є конструктивізм: геометричні поняття означуються конструктивно (означення спирається або на малюнок, або на побудову відповідної геометричної фігури, або на життєву ситуацію), доведення теорем передбачає використання фігур, існування яких можна підтвердити побудовою. Ці задачі пов'язані із задачами на доведення, дослідження й обчислення. У розв'язуванні задач на побудову використовуються елементи доведення, дослідження, обчислення і, навпаки, розв'язування більшості геометричних задач передбачає елементи побудови. Особливістю задач на побудову є знаходження ланцюга операцій (певного алгоритму) – елементарних чи основних побудов, виконання яких приводить до побудови шуканої фігури. Тому ці задачі – ефективний засіб підвищення алгоритмічної культури як складової інформаційно-комунікативної компетентності учнів, оволодіння планами, стратегіями пошуку розв'язання різних проблемних ситуацій.

Отже, задачі на побудову розвивають в учнів конструктивний підхід до осмислення всього комплексу геометричних знань, сприяють ґрунтовному засвоєнню навчального матеріалу, виробленню вмінь застосовувати його в різних сферах діяльності. Проте ці задачі традиційно складні для учнів.Вироблення вмінь їх розв'язувати покращується, якщо учні оволодіваютьзагальними, наскрізними підходами до знаходження планів побудов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методиці навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії присвячено дослідження І. Ленчука [1]. У дослідженнях М. Бурди [2], Г. Кирилецької, М. Бортнік [3] визначено особливості використання допоміжних елементів у розв'язуванні геометричних задач. Методи та ідеї щодо створення правил – орієнтирів розв'язування задач на побудову викладено у посібнику А. Боравльова, І. Ленчука [4]. У роботі О. Чашечникової [5] обґрунтовано, що використання задач на побудову з метою розвитку творчого мислення ефективне, якщо враховувати особливості навчання математики учнів різних груп. С. Бурчак, В. Кашуба [6] дійшли висновку, що ці задачі – ефективний засіб формування графічної компетентності учнів. У дослідженні В. Прошкіна, М. Астаф'єва, С. Радченко [7]задачі на побудову представлено як клас геометричних задач, розв'язання яких сприяє формуванню ряду навичок XXI ст. Обґрунтовано, що застосування ППЗ GRAN–2D у процесі розв'язування задач на побудову дає змогу реалізувати дослідницький підхід у навчанні, формувати творчі якості (Н. Бугаєць [8]). У посібнику І. Кушніра [9]розглянуто побудови трикутника за трьома елементами та наведено задачі, які не мають розв'язків.

Результати досліджень спрямовані на важливі аспекти використання конструктивного підходу в навчанні геометрії. Актуальною проблемою залишається вироблення вмінь учнів застосовувати загальні методи розв'язання задач на побудову, зокрема метод допоміжного трикутника.

Мета статті – розкрити можливості змісту підручника з геометрії в навчанні застосовувати метод допоміжного трикутника під час розв'язування задач на побудову трикутників і чотирикутників.

Виклад основного матеріалу. Розв'язання геометричної задачі нерідко залежить від уміння скористатися допоміжними трикутниками (заданими опосередковано). Залежно від типу і складності задачі використовують один допоміжний трикутник (або кілька нерівних між собою), рівні або подібні трикутники [2].Допоміжний трикутник застосовується у процесі розв'язування задач на побудову трикутників (7-й клас) і чотирикутників (8-й клас). Розв'язання цих задач полягає не стільки в побудові фігури циркулем і лінійкою, скільки у знаходженні плану побудови на основі проведеного аналізу та доведенні, що в результаті виконання побудов одержимо фігуру, яка відповідає вимогам задачі.

Пропонується така послідовність навчального матеріалу: геометричне місце точок, основні та найпростіші побудови, складніші задачі на побудову трикутників, задачі на побудову чотирикутників.

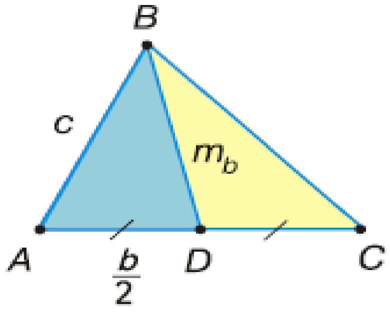
Під час ознайомлення учнів з геометричним місцем точок увага звертається на ті геометричні місця, які будуть використовуватись при розв'язанні складніших задач на побудову трикутників. Це геометричні місця точок рівновіддалених: від даної точки, від двох даних точок, від сторін кута, від двох паралельних прямих; геометричне місце точок віддалених від прямої на дану відстань. Під час розв'язування основних та найпростіших задач на побудову учні використовують відповідні геометричні місця точок та ознайомлюються з етапами розв'язання (аналіз, побудова, доведення).

Приклад. Побудуйте ΔABC з даними сторонами ВС = a, АС = b, АВ = c.

Розв'язок. Аналіз. Припустивши, що ΔABC побудовано, зображаємо його на малюнку. Відклавши відрізок $BC = a$, знаходимо вершини B і C ΔABC. Як знайти вершину A? Вершина A лежить на відстані b від точки C, тобто на колі з центром у точці C і радіусом b. Так само встановлюємо, що вершина A лежить на колі з центром B і радіусом c. Отже, вершина A є точкою перетину цих кіл.

Записуємо план побудови і будуємо шукану фігуру. Доводимо, що побудований ΔABC відповідає вимогам задачі (за побудовою $BC = a,$ $AB = c$, АС = b).

Розв'язуючи основні та найпростіші задачі на побудову, учні роблять висновок: щоб побудувати трикутник, дотатньо побудувати його вершини. Дві вершини будуть побудованими, якщо відкласти на прямій даний відрізок. Третя вершина – шукана. Розв'язання задачі зводиться до її побудови.



Вони також ознайомлюються з етапами розв'язання. *Аналіз*– це міркування, під час якого знаходимо план побудови: припускаємо, що шукану фігуру побудовано; зображаємо її на малюнку, який можна виконати «від руки»; з'ясовуємо зв'язок шуканої фігури з даними задачі; встановлюємо послідовність побудов, яка приведе до розв'язку задачі. *Побудова.* Стисло записуємо план побудови і будуємо шукану фігуру. *Доведення.* Обґрунтовуємо, що побудована фігура відповідає вимогам задачі.

Допоміжний трикутник використовуємо в процесі розв'язання складніших задач на побудову трикутників за даними основними елементами, серед яких є й основні лінії (висота, бісектриса, медіана). Спочатку знаходимо на малюнку трикутник, який є частиною шуканого трикутника і спосіб побудови якого відомий. Такий трикутник називають допоміжним. Потім з'ясовуємо, як добудувати допоміжний трикутник до шуканого. Такий метод розв'язання називають методом допоміжного трикутника. Допоміжний трикутник може міститися на малюнку або його потрібно утворити, доповнивши малюнок певними лініями.

Застосовуючи цей метод, учні повинні вміти: знаходити на малюнку трикутник, спосіб побудови якого відомий, або виконувати додаткові побудови, щоб його утворити; встановлювати кількість побудованих вершин шуканої фігури внаслідок побудови допоміжного трикутника; визначати за допомогою даних умови решту вершин шуканої фігури, припустивши, що допоміжний трикутник побудовано [10].

Спочатку розв'язуються задачі, дедопоміжний трикутник є на малюнку, та виділяється спосіб знаходження плану побудови у вигляді вказівки.

*Приклад***.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.Рис. 1

Аналіз(рис. 1). Припустимо, що побудовано ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BD = m_b$. Допоміжний ΔABD є частиною ΔABC, його можна побудувати за трьома сторонами

($AB = c$, $BD = m_b$, $AD = \frac{b}{2}$). Побудувавши ΔABD, знайдемо вершини A і Bшуканого ΔABC. Щоб знайти вершину C, відкладаємо на промені AD відрізок $AC = b$.

Побудова. Будуємо допоміжний ΔABD ($AB = c$, $BD = m_b$, $AD = \frac{b}{2}$). Відкладаємо відрізок $AC = b$ на промені AD.Проводимо відрізок BC.

Вказівка. *Щоб знайти план побудови трикутника:1) відшукайте на малюнку допоміжний трикутник, побудова якого відома;2) установіть, скільки побудовано вершин шуканого трикутника внаслідок побудови допоміжного;3) з'ясуйте, як побудувати решту вершин шуканого трикутника.*

Уточнюємо: щоб побудувати шукану вершину трикутника, з'ясовуємо дві умови, яким вона задовольняє. Знаходимо фігуру $Ф_1$ – геометричне місце точок, що задовольняє першій умові, та фігуру $Ф_2$ – геометричне місце точок, яке задовольняє другій умові. Шукана вершина трикутника є точкою перетину цих фігур.

Приклад. Побудуйте трикутник за стороною a, проведеною до неї медіаною m та висотою h, проведеною до другої сторони.

Аналіз(рис. 2). Нехай ΔABC – шуканий і $BC = a$, $AD = m$, $BK = h$.

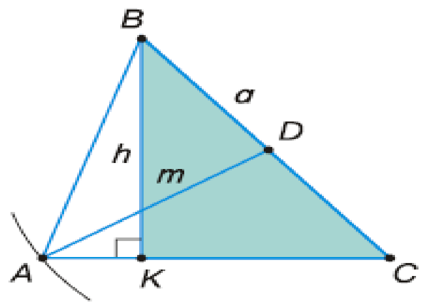


Рис. 2

Побудувавши допоміжний ΔBKC ($BK = h$, $BC = a$, $\angle BKC = 90°$), знайдемо вершини B і C ΔABC. Вершина A – шукана. Вона задовольняє дві умови: лежить на промені CK; лежить на відстані m від точки D, тобто на колі з центром у точці D і радіусом m.

Далі можна запропонувати задачі, де потрібно виконати додаткові побудови, щоб утворити допоміжний трикутник (наприклад, побудуйте трикутник за сторонами b і c та медіаною m, проведеною до третьої сторони), задачі, де потрібно утворити кілька допоміжних трикутників (наприклад, побудуйте ΔABC за $\angle A = \alpha$, h_a, h_b).

Метод допоміжного трикутника узагальнюється і використовується при побудові чотирикутників (8-й клас). Щоб побудувати паралелограм або трапецію, так само, як і при побудові трикутників, спочатку будуємо допоміжний трикутник, а потім добудовуємо його до відповідного чотирикутника. Тому перед побудовою того чи іншого чотирикутника потрібно повторити побудову відповідного трикутника. Наприклад, перед розв'язуванням задачі «Побудуйте паралелограм за основою, висотою і діагоналлю» повторюємо побудову трикутника за двома сторонами й висотою, опущеною на одну з них. Побудувавши допоміжний трикутник, ми, тим самим, побудуємо дві або три вершини чотирикутника. Решту вершин знаходимо використовуючи умови, яким вони задовольняють.

Розглядається спочатку побудова довільного чотирикутника, коли допоміжний трикутник міститься на малюнку. ***Наприклад.***

1. На рис. 3 побудовано чотирикутник $ABCD$ за чотирма його сторонами a, b, c, d і діагоналлю d_1.

За даними на малюнку дайте відповіді на запитання: 1) який трикутник допоміжний; 2) скільки побудовано вершин чотирикутника, внаслідок побудови допоміжного трикутника; 3) назвіть шукану вершину чотирикутника та умови яким вона задовольняє? Складіть план побудови.

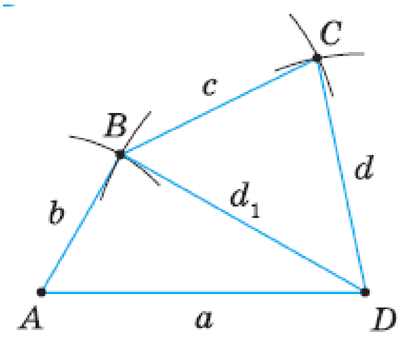


Рис. 3

2. Побудуйте чотирикутник: 1) за сторонами a, b, c, d і кутом α; 2) за сторонами a, b, c та діагоналями d_1 і d_2.

Пропонуються задачі на побудову окремих видів паралелограмів та трапецій.

Приклад

1. Складіть план побудови паралелограма: 1) за сторонами a, b і кутом α (рис. 4); 2) за стороною a та діагоналями d_1 і d_2 (рис. 5).

Вказівка. *Щоб побудувати паралелограм (ромб, прямокутник, квадрат), спочатку побудуйте допоміжний трикутник (*ΔADC *на рис. 4 або* ΔAOD *на рис. 5). Потім добудуйте цей трикутник до паралелограма (ромба, прямокутника, квадрата), спираючись на його властивості.*

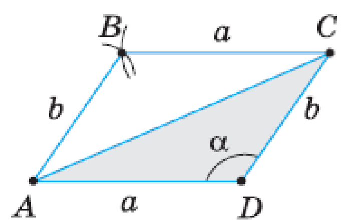


Рис. 4

Звертається увага на те, що у першому випадку, побудувавши допоміжний трикутник, ми, тим самим, побудували три вершини паралелограма, у другому випадку – дві його вершин. Інші вершини – шукані. Їх знаходимо за умовами, яким вони задовольняють.

2. Побудуйте паралелограм: 1) за сторонами a і b та діагоналлю d; 2) за діагоналями d_1 і d_2 та кутом α між ними; 3) за стороною a, діагоналлю d і кутом α, який лежить проти цієї діагоналі; 4) за стороною a, діагоналлю d і кутом α між ними.

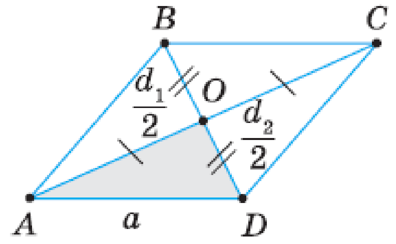


Рис. 5

3. Побудуйте ромб: 1) за діагоналями d_1 і d_2; 2) за стороною a й діагоналлю d; 3) за стороною a й кутом α.

4. Побудуйте прямокутник: 1) за діагоналлю d і кутом α між діагоналлю та стороною; 2) за діагоналлю d і кутом α між діагоналями.

У наведених задачах допоміжний трикутник містився на малюнку. Його потрібно лише виділити, використовуючи наведені умови. Далі розглядаються задачі, під час розв'язання яких для допоміжного трикутника потрібно провести певні лінії.

1.За рис. 6 складіть план побудови трапеції за основами a і b ($a > b$) та бічними сторонами c і d.

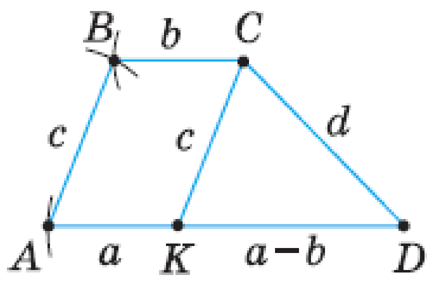


Рис. 6

Вказівка.*Щоб побудувати трапецію, як і паралелограм, спочатку побудуйте допоміжний трикутник (наприклад, ΔKCD на рис. 6), а потім добудуйте його до трапеції.*

2. Побудуйте трапецію: 1) за основами a і b ($a > b$) та діагоналями d_1 і d_2; 2) за основою a, висотою h і двома діагоналями d_1 і d_2.

У результаті розв'язання задач на побудову трикутників і чотирикутників, учні оволодівають загальним способом знаходження плану їх побудови:*Щоб побудувати трикутник або чотирикутник: 1) знайдіть на малюнку допоміжний трикутник або проведіть певні лінії, щоб його утворити; 2) встановіть кількість побудованих* *вершин трикутника або чотирикутника, побудувавши допоміжний трикутник; 3) знайдіть решту вершин шуканої фігури, використавши умови, яким вони задовольняють.*

Аналогічно при побудові методом подібності використовуємо допоміжний трикутник, подібний шуканому. Учні мають дійти висновку,щоб розв'язати задачу на побудову трикутника методом подібності потрібно: виділити з умови задачі ті дані, які визначають форму шуканого трикутника; побудувати за цими даними допоміжний трикутник, подібний шуканому; побудувати шуканий трикутник, використавши ті дані умови, які визначають його розміри.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Розв'язуючи задачі на побудову, учні оволодівають алгоритмічною культурою як складовою інформаційно-комунікативної компетентності, культурою розумової праці – вмінням планувати роботу, раціонально її виконувати, проводити ретроспективний аналіз одержаного результату. Розв'язування задач на побудову трикутників і чотирикутників покращується, якщо учні оволодівають загальними методами знаходження планів побудов. Рекомендується один із таких методів – метод допоміжного трикутника. Вироблення відповідних умінь передбачає етапи: виокремлення операцій, які утворюють зміст методу; закріплення та узагальнення операцій дібраними вправами; оформлення операцій у вигляді способу діяльності. Перспективна тема подальшого дослідження стосується розроблення методики застосовування в процесі розв'язування геометричних задач допоміжних елементів – геометричних фігур (трикутник, рівні та подібні трикутники, коло) і параметрів (довжина відрізка, величина кута, площа, об'єм).

Використані джерела

[1]І.Г. Ленчук, *Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії.* Житомир, Україна: ЖДУ імені І. Франка, 2011.

[2] М. І. Бурда, "Застосування допоміжних елементів у розв'язуванні задач підручника з геометрії", *Проблеми сучасного підручника,* Інститут педагогіки НАПН України: Педагогічна думка, Вип. 22, с. 30–37, 2019.

[3]Г. Кирилецька, та М. Бортнік, "Формування в учнів умінь застосовувати допоміжні елементи при розв'зуванні задач", *Нова педагогічна думка,* № 2, с. 80-83, 2015.

[4] А.П. Боравльов, та І.Г. Ленчук, *Аналіз у розв'язуванні задач на побудову.* Київ, Україна: Вища школа, 2002.

[5] О. С. Чашечникова, “Розв’язування задач на побудову як один із шляхів залучення учнів різних груп до творчої діяльності з математики”, *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.Фізика і математика у вищій і середній школі,* Вип. 6, с. 139-148, 2010.

[6] С. Бурчак, та В. Кашуба, “Задачі на побудову як засіб формування графічної компетентності учнів основної школи”,*Молодь і ринок,* № 2, с. 38-43, 2015.

[7]В. В Прошкін, М. М Астаф’єва, та С. С. Радченко, “Геометричні задачі на побудову як дієвий інструментарій формування навичок XXI століття”, *Освітологічний дискурс,*Київський університет імені Бориса Грінченка, Вип. 3-4, с. 122-136, 2017.

[8] Н. О. Бугаєць, “Використання педагогічного програмного засобу GRAN-2D під час розв’язування задач на побудову в шкільному курсі планіметрії”, *Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова.Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання,* № 7(14), с. 97-102, 2009.

[9]І. А.Кушнір, *Побудова трикутника. Енциклопедія розв’язування задач*. Київ, Україна: Либідь, 1994.

[10]М.І. Бурда, *Розв'язування задач на побудову в 6-8 класах*. Київ, Україна: Радянська школа, 1986.

References

[1]I. H. Lenchuk, Systema navchannia maibutnoho vchytelia konstruktyvnoi heometrii. Zhytomyr, Ukraine CZHU imeni Franka, 2011.

[2] M. I. Burda, “Zastosuvannia dopomizhny khelementiv u rozviazuvanni zadach pidruchnyka z heometrii”, *Problemy suchasnoho pidruchnyka*, Instytut pedahohiky NAPN Ukrainy: Pedahohichna dumka, Vyp. 22, s. 30–37, 2019.

[3]H. Kyryletska, taM. Bortnik, “Formuvannia v uchniv umin zastosovuvaty dopomizhni elementy pry rozvzuvanni zadach”, Nova pedahohichna dumka, № 2, s. 80-83, 2015.

[4] A. P. Boravlov, ta I.H. Lenchuk, Analiz u rozviazuvanni zadach na pobudovu. Kyiv, Ukraina: Vyshcha shkola, 2002.

[5] O. S. Chashechnykova, “Rozviazuvannia zadach na pobudovu yak odyn iz shliakhiv zaluchennia uchniv riznykh hrup do tvorchoi diialnosti z matematyky”, Naukovyi chasopys Natsionalnoho pedahohichnoho universytetu imeni M. P. Drahomanova. Fizyka i matematyka u vyshchii i serednii shkoli, Vyp. 6, s. 139-148, 2010

[6] S. Burchak, ta V. Kashuba, “Zadachi na pobudovu yak zasib formuvannia hrafichnoi kompetentnosti uchniv osnovnoi shkoly”, Molod i rynok, № 2, s. 38-43, 2015.

[7]V. V Proshkin, M. M Astafieva, ta S. S. Radchenko, “Heometrychni zadachi na pobudovu yak diievyi instrumentarii formuvannia navychok KhKhI stolittia”, Osvitolohichnyi dyskurs, Kyivskyi universytet imeni Borysa Hrinchenka, Vyp. 3-4, s. 122-136, 2017.

[8] N. O. Buhaiets, “Vykorystannia pedahohichnoho prohramnoho zasobu GRAN-2D pid chas rozviazuvannia zadach na pobudovu v shkilnomu kursi planimetrii”, Naukovyi chasopys NPU im. M.P. Drahomanova. Kompiuterno-oriientovani systemy navchannia, № 7(14), s. 97-102, 2009.

[9]I. A. Kushnir, Pobudova trykutnyka. Entsyklopediia rozviazuvannia zadach. Kyiv, Ukraina: Lybid, 1994.

[10]M. I. Burda, Rozviazuvannia zadach na pobudovu v 6-8 klasakh. Kyiv, Ukraina: Radianskashkola, 1986.

Михаил Бурда, *доктор педагогических наук, профессор, действительный член НАПН Украины, заведующий отделом математического и информационного образования Института педагогики НАПН Украины, г. Киев, Украина*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ В УЧЕБНИКЕ ПО ПЛАНИМЕТРИИ МЕТОДОМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Обосновано, что решение задач на построение позволит глубже усвоить учебный материал, усилить прикладную его направленность и, таким образом, эффективно формировать математическую и другие ключевые компетентности. Решение этих задач улучшается, если учащиеся овладевают общими методами нахождения планов построений. Рекомендован общий метод решения задач на построение треугольников и четырехугольников – метод вспомогательного треугольника. Раскрыты его суть и особенности применения при решении задач на построение. Приведены соответствующие образцы задач и способы их решения.

Ключевые слова: геометрия; построения; вспомогательный треугольник.

***Mykhailo Burda**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Full Member of the NAES of Ukraine, Head of the Department of Mathematical and Information Education Institute of Pedagogy of the NAES of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

SOLVING CONSTRUCTION PROBLEMS IN A TEXTBOOK OF PLANIMETRY BY THE AUXILIARY TRIANGLES METHOD

The importance of construction problems is due to the peculiarity of the content of geometry, the leading component of which is constructivism. That is, geometric concepts are defined constructively (the definition is often based on either a drawing, or the construction of a corresponding geometric figure, or consideration of a life situation), proving theorems involves the use of figures, the real existence of which can be confirmed by construction.

In the process of solving construction problems, an algorithmic culture is formed as a component of information and communication competence of students, the culture of mental work - the ability to plan their work, perform it rationally, to conduct a retrospective analysis of the problem.

It is substantiated that solving these problems allows to master the educational material more deeply, to strengthen its applied orientation, and, consequently, to effectively form mathematical and other key competencies.

The following sequence of educational material is offered: geometrical place of points, the basic and simplest construction problems, more difficult construction problems of triangles, construction problems of quadrilaterals.

If students master the general methods of finding construction plans, then solving problems to build triangles and quadrilaterals improves.

One of the following methods is recommended - the auxiliary triangle method. The solution to the construction problem can be found by forming an auxiliary triangle in the figure of the desired shape, the method of its construction of which is known, and to find out how to complete this triangle to the desired shape.

Peculiarities of application of this method to solving construction problems are revealed in the article. The development of relevant skills involves the following stages: selection of operations that makes up the content of the method; consolidation and generalization of operations with selected exercises; registration of these operations in the form of instructions. Relevant examples of problems and ways to solve them are given.

Keywords: geometry; constructions; auxiliary triangle