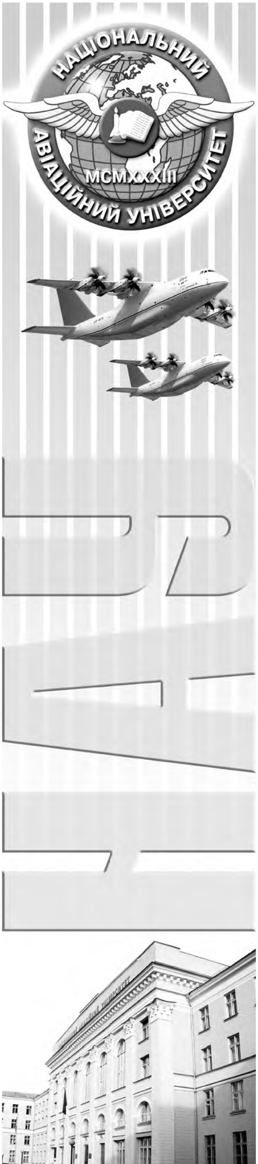


VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Н. П. Муранова, М. М. Логвин,
Л. І. Нестеренко, О. С. Муранов

ГЕОМЕТРІЯ

Підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання

Навчальний посібник

Київ 2010

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Н. П. Муранова, М. М. Логвин,
Л. І. Нестеренко, О. С. Муранов

ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2010

УДК 514(075.8)
ББК В15я7
Г 363

Рецензенти:

Ю. Б. Гнучій — д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Навчально-науковий інститут енергетики і автоматики)

П. П. Баришовець — канд. фіз.-мат. наук, доц.
(Національний авіаційний університет)

О. О. Гайова — вчитель математики вищої категорії
(Авіакосмічний ліцей Національного авіаційного університету)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 8/09 від 17.12.2009).

Г 363 **Геометрія** : навч. посіб. / Н. П. Муранова, М. М. Логвин, Л. І. Нестеренко, О. С. Муранов. — К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2010. — 212 с.

ISBN 978-966-598-636-2

Наведено основні теоретичні відомості, тестові вправи, приклади розв'язування задач різних рівнів складності. Подано довідковий матеріал, основні тригонометричні формули і співвідношення, які найчастіше використовуються для розв'язування геометричних рівнянь.

Для слухачів підготовчих курсів, учнів загальноосвітніх навчальних закладів, закладів з поглибленим вивченням математики та самостійної підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання.

УДК 514(075.8)
ББК В15я7

ISBN 978-966-598-636-2

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник підготовлено відповідно до програми з математики для слухачів підготовчих курсів у системі доуніверситетської підготовки, програми з математики для загальноосвітніх закладів та вимог державного стандарту з математики.

Мета – допомогти учням старших класів і слухачам підготовчих курсів при вищих навчальних закладах систематизувати та поглибити знання про основні властивості геометричних фігур, оволодіти методами розв'язування геометричних задач та підготуватися до зовнішнього незалежного оцінювання.

У навчальному посібнику кожний розділ починається з повторення основних теоретичних відомостей, понять, формул і теорем. Далі подаються зразки розв'язання типових задач та задач підвищеної складності.

Для контролю знань наводяться задачі для самостійної роботи і тематичні тестові завдання різних рівнів складності. До всіх задач і тестових завдань подаються відповіді, що сприяє формуванню позитивного ставлення школярів, абітурієнтів до процесу тестування.

Значну увагу приділено задачам на комбінацію тіл та побудову перерізів багатогранників. Такі задачі відіграють важливу роль у формуванні просторової уяви, математичної культури і навичок свідомого застосування властивостей об'єктів, що вивчаються.

Довідковий матеріал, що міститься в посібнику, робить його самодостатнім і не потребує додаткового пошуку інших джерел. Подано основні тригонометричні формули і співвідношення, які найчастіше використовуються під час розв'язування геометричних задач.

Навчальний посібник може бути використаний у системі доуніверситетської підготовки, школах, ліцеях та гімназіях природничо-математичного профілю, для самостійної підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень випускників.

ПОЗНАЧЕННЯ

$A \in a$	— точка A належить прямій a
$A \notin a$	— точка A не належить прямій a
$\{A, B\} \subset a$	— точки A, B належать прямій a
$\{A, B\} \not\subset a$	— точки A, B не належать прямій a
$\Rightarrow$	— знак логічного слідування
$a \cap b = C$	— прямі a і b перетинаються у точці C
$\angle(a, b); \left(\widehat{a, b}\right)$	— кут між прямими a і b
$\angle B;\ \widehat{B}$	— кут B
$\stackrel{def}{=}$, $\stackrel{\Delta}{=}$	— рівність за означенням
$d(A; n)$	— відстань від точки A до прямої n
$d(a; b)$	— відстань між прямими a і b
AB	— відрізок AB
$\lvert AB \rvert$	— довжина відрізка
$[AB)$	— промінь AB з початком в точці A
$\cup AB;\ \overset{\cup}{AB}$	— дуга AB
$a \parallel b$	— прямі a і b паралельні
$a \perp b$	— прямі a і b перпендикулярні
$\text{Пр}_{AB} MN$	— проекція відрізка MN на пряму AB
$\vec{a}$	— вектор $\vec{a}$

Частина І. ПЛАНІМЕТРІЯ

1. ТРИКУТНИКИ

1.1. Теоретичні відомості

Позначення (рис. 1.1):

1. $a = BC,\ b = AC,\ c = AB$ – сторони.

2. α, β, γ — внутрішні кути.

3. $\angle A_1AB,\ \angle A_2AC,\ \angle B_1BA,\ \angle B_2BC,\ \angle C_1CA, \angle C_2CB$ — зовнішні кути.

4. h_a, h_b, h_c — висоти, опущені до сторін a, b, c.

5. m_a, m_b, m_c — медіани, які ділять сторони a, b, c навпіл.

6. l_a, l_b, l_c — бісектриси кутів α, β, γ.

7. R і r — відповідно радіуси описаного навколо трикутника кола і вписаного в трикутник кола.

8. r_a, r_b, r_c — радіуси зовні вписаних кіл.

9. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ півпериметр.

10. S — площа трикутника.

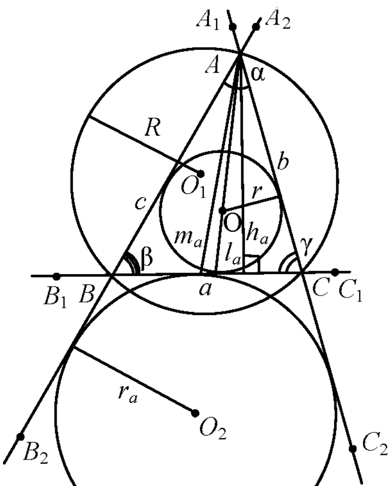


Рис. 1.1

Кути трикутника

1. $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

2. $\begin{cases} \angle A_1AB = \angle A_2AC = \beta + \gamma; \\ \angle B_1BA = \angle B_2BC = \alpha + \gamma; \\ \angle C_1CA = \angle C_2CB = \alpha + \beta. \end{cases}$

3. Теорема половинних кутів:

а) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ аналогічно для $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ аналогічно для $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\gamma}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ аналогічно для $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Доведення формул наведено в підрозділі 1.4. Задача 1 (*а*, *б*, *в*).

4. Теорема синусів $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$.

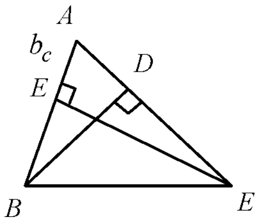


Рис. 1.2

5. Теорема косинусів

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ аналогічно для кутів β і γ.

6. Для довільного трикутника (рис. 1.2):

а) квадрат сторони, яка лежить проти гострого кута, дорівнює:

$$a^2=b^2+c^2-2bc_b=b^2+c^2-2cb_c;$$

б) квадрат сторони, яка лежить проти тупого кута, дорівнює:

$$a^2=b^2+c^2+2bc_b=b^2+c^2+2cb_c,$$

де $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$,

$c_b=AD$ – проекція сторони c на сторону b;

$b_c=AE$ – проекція сторони b на сторону c.

Сума і різниця сторін трикутника

1. $a+b=4R\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; аналогічно для $(a+c)$, $(b+c)$.

2. $a-b=4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; аналогічно для $(a-c)$, $(b-c)$.

Доведення формул наведено в підрозділі 1.4. Задача 1 (г).

Основні нерівності сторін трикутника

1. $a<b+c$, $a>|b-c|$, $a<p$.
2. $b<a+c$, $b>|a-c|$, $b<p$.

3. $c < b + a,\ c > |a - b|,\ c < p$.

4. $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$.

Півпериметр трикутника

1. $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

2. $p = \frac{S}{r}$.

3. $p = S\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 1 (д).

4. $p = \frac{h_a \cdot a}{2r} = \frac{h_b \cdot b}{2r} = \frac{h_c \cdot c}{2r}$.

Описане, вписане і зовнівписане кола

1. $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$.

2. $R = \frac{a\,b\,c}{4S}$.

3. $R = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.

4. $R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{ac}{2h_b} = \frac{ab}{2h_c}$.

5. $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

6. $r = \frac{S}{p}$.

7. $r = \frac{abc}{4Rp}$.

8. $r_a = p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 2 (а).

9. $r_a = \frac{S}{p-a}$. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 2 (б).

10. Відстань (d) між центрами вписаного в трикутник кола і описаного навколо нього кола. Формула Ейлера:

$$d^2 = R^2 - 2R \cdot r$$

(див. підрозділ 1.2. Задача 8).

Ознаки рівності трикутників

Перша ознака. За двома сторонами та кутом між ними (рис. 1.3)

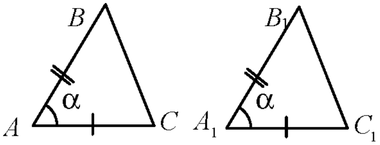


Рис. 1.3

$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$.

Друга ознака. За стороною та прилеглими до неї кутами (рис. 1.4)

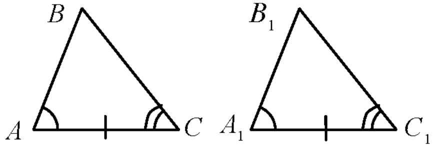


Рис. 1.4

$AB = A_1B_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$.

Третя ознака. За трьома сторонами (рис. 1.5)

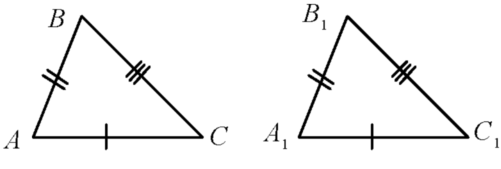


Рис. 1.5

$AB = A_1B_1$,
$BC = B_1C_1$,
$AC = A_1C_1$.

Два прямокутні трикутники рівні, якщо у них відповідно рівні:

а) два катети;
б) катет і прилеглий гострий кут;
в) гіпотенуза і гострий кут;
г) гіпотенуза і катет.

Ознаки подібності трикутників

1. За пропорційністю двох сторін та рівністю кута між ними (рис. 1.6):

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k; \ \angle A = \angle A_1$$

(k – коефіцієнт подібності).

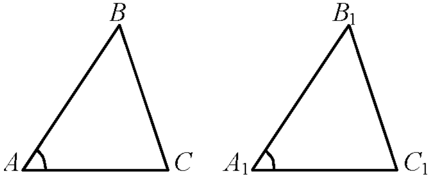


Рис. 1.6

2. Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника:

$$\angle A = \angle A_1; \quad \angle B = \angle B_1.$$

3. Якщо три сторони одного трикутника відповідно пропорційні трьом сторонам другого трикутника:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k.$$

4. Два трикутники подібні, якщо сторони одного відповідно паралельні або перпендикулярні до сторін другого трикутника.

5. Пряма, яка паралельна стороні трикутника і перетинає дві інші сторони, відтинає від нього трикутник, подібний до даного трикутника (рис. 1.7):

$$MN \parallel AC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MBN.$$

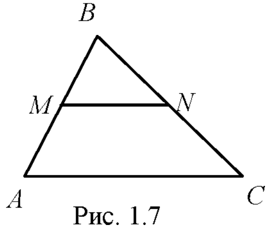


Рис. 1.7

6. Прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні, якщо (рис. 1.8):

а) $\angle A = \angle A_1$;

б) $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{b_1}{b} = k$;

в) $\dfrac{a_1}{a} = \dfrac{c_1}{c} = k$;

г) висота, опущена на гіпотенузу, ділить прямокутний трикутник на два прямокутні трикутники, подібні даному.

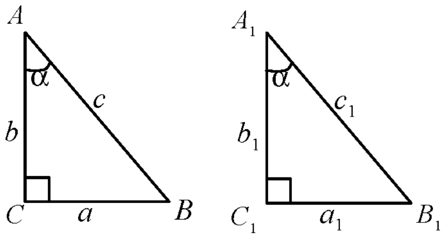


Рис. 1.8

7. Для подібних трикутників виконуються рівності:

а) $\frac{a}{a_1}=\frac{p}{p_1}=k$;   б) $\left(\frac{a}{a_1}\right)^2=\frac{S}{S_1}=k^2$.

Висоти трикутника

1) Висотою трикутника, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, опущений з цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника (рис. 1.9):

$BK \perp AC$; BK – висота ΔABC;

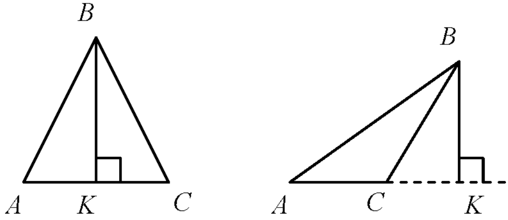


Рис. 1.9

2) $h_a = 2R\sin\beta\sin\gamma$;

$h_a = b\sin\gamma$;

$h_a = c\sin\beta$;

$h_a = \frac{2pr}{a}$;

$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; аналогічно для h_b, h_c;

3) $\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}=a:b:c$;

4) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 1 (д);

5) $h_a^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$. Доведення формул 3 і 5 наведено в підрозділі 1.4. Задача 2 (д).

Медіани трикутника

1. Медіаною трикутника називається відрізок, що з'єднує вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

2. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$; аналогічно для m_b, m_c. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 2 (в):

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}.$$

Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 3.

Аналогічно для m_b, m_c.

3. $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$. Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 4.

4. $2\left(m_a^2 + m_b^2\right) - m_c^2 = \frac{9}{4}c^2$;

$2\left(m_a^2 + m_c^2\right) - m_b^2 = \frac{9}{4}b^2$;

$2\left(m_c^2 + m_b^2\right) - m_a^2 = \frac{9}{4}a^2$.

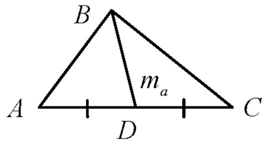


Рис. 1.10

5. Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники (рис. 1.10): $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC}$.

Бісектриси трикутника

1. Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута, що з'єднує вершину трикутника з точкою протилежної сторони.

2. $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$. Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 6.

3. $l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}$ або $l_a = \sqrt{\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}}$.

Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 6.

4. $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2}$. Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 5 (а).

5. $l_a = \sqrt{bc - b_1 c_1}$. Теорема Лагранжа. Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 5(б).

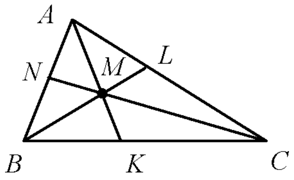


Рис. 1.11

6. Якщо AK, BL, CN — бісектриси ΔABC (рис. 1.11), то:

$$\left.\begin{aligned} \frac{CM}{NM} &= \frac{BC + AC}{AB}; \\ \frac{AM}{MK} &= \frac{AC + AB}{BC}; \\ \frac{BM}{LM} &= \frac{AB + BC}{AC}. \end{aligned}\right\}$$

Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 2(г).

7. Бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам (рис. 1.11):

$$\frac{BN}{AN} = \frac{BC}{AC}; \ \frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC}; \ \frac{AL}{CL} = \frac{AB}{BC}.$$

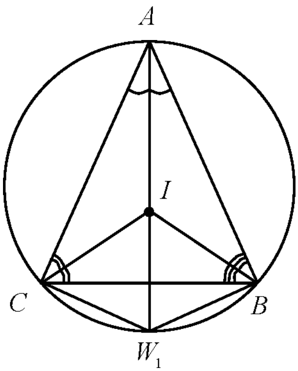


Рис. 1.12

8. Теорема про «трилисник» (рис. 1.12, де I — точка перетину бісектрис (інцентр); W_1 — точка перетину бісектриси з описаним навколо трикутника колом):

$$W_1 I = W_1 B = W_1 C .$$

Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 7 (а).

9. $\angle BMC = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$ (див. рис. 1.11). Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 7 (б).

Особливі точки трикутника

1. Точка перетину медіан завжди міститься всередині трикутника, є центром його ваги і поділяє кожну медіану у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

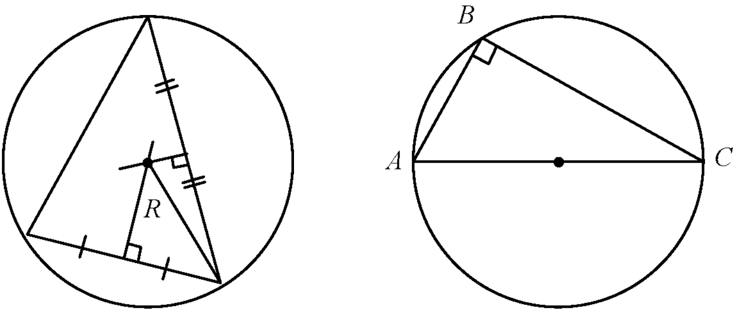
2. Точка перетину висот (або їх продовжень) є ортоцентром трикутника. Ортоцентр прямокутного трикутника збігається з вершиною прямого кута.

3. Точка перетину бісектрис (інцентр) рівновіддалена від сторін і є центром уписаного в трикутник кола.

4. Точка перетину бісектриси з протилежною стороною лежить між точками перетину з цією стороною медіани і висоти. Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 23.

5. Точка перетину перпендикулярів, проведених до сторін трикутника через їх середини, є центром описаного кола (центроїд). У прямокутному трикутнику центроїд — середина гіпотенузи (рис. 1.13, *а*, *б*).

6. Точка перетину медіан, точка перетину висот трикутника і центр описаного кола лежать на одній прямій (теорема Ейлера). Доведення наведено в підрозділі 1.2. Задача 2.



а *б*

Рис. 1.13

Прямокутний трикутник

($\gamma = 90^\circ$; a, b — катети; c — гіпотенуза)

1. Теорема Піфагора: $c^2 = a^2 + b^2$ (рис. 1.14).

2. $a = c \sin\alpha$;

$a = b \operatorname{tg}\alpha$;

$a = c \cos\beta$;

$a = b \operatorname{ctg}\beta$; аналогічно для b.

3. Теорема про середнє пропорційне (рис. 1.14):

$BA = c, BC = a, AC = b$;

$BD = a_c$, $DA = b_c$;

$\frac{h_c}{a_c} = \frac{b_c}{h_c} \Rightarrow h^2 = a_c\, b_c$;

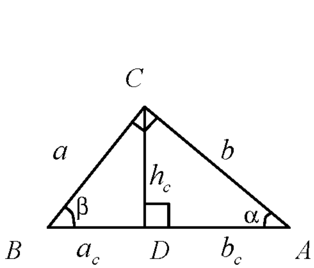


Рис. 1.14

$$\frac{a}{c}=\frac{a_c}{a}\Rightarrow a^2=c\,a_c\,;\;\; \frac{b}{c}=\frac{b_c}{b}\Rightarrow b^2=c\,b_c\,;\quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{a_c}{b_c}.$$

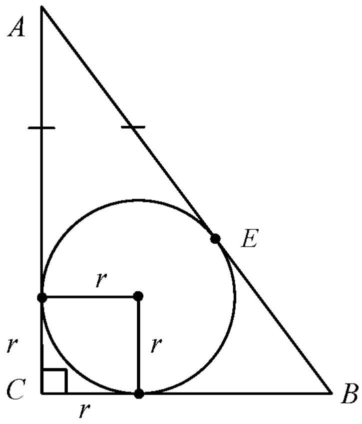


Рис. 1.15

4. $r+R=\dfrac{a+b}{2}$, де $R=\dfrac{1}{2}AB$ (рис. 1.15); $\angle C=90^\circ$;

$$r=p-c=\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}=$$

$$=\frac{a+b}{2}-R\Rightarrow r+R=\frac{a+b}{2}.$$

5. $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}$;

$m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$; $m_c=\dfrac{1}{2}c$;

$m_a^2+m_b^2=5m_c^2$. Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 3.

6. Площа прямокутного трикутника:

$$S=\frac{1}{2}ab;\;\; S=\frac{1}{2}a^2\mathrm{tg}\beta,\;(b=a\,\mathrm{tg}\beta);$$

$$S=\frac{1}{2}b^2\mathrm{ctg}\,\beta,\;(a=b\,\mathrm{ctg}\,\beta)\,;\quad S=\frac{1}{4}c^2\sin 2\beta\,;$$

$$S=p(p-c);\;\; S=BE\cdot AE\,,$$

де E — точка дотику вписаного кола у прямокутний трикутник з гіпотенузою (рис. 1.15). Доведення наведено в підрозділі 1.4. Задача 3 (в).

7. У прямокутному трикутнику кут між висотою і медіаною, проведеною з вершини прямого кута (кут φ) дорівнює модулю різниці гострих кутів (рис. 1.16): $\angle KCM=\left|\angle A-\angle B\right|$.

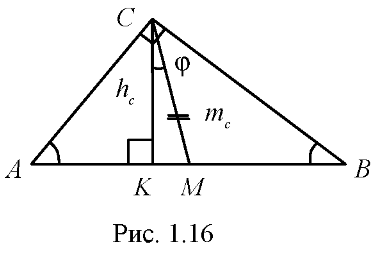


Рис. 1.16

Рівнобедрений трикутник
($a=b$ — бічні сторони, $\alpha=\beta$ — кути при основі)

1. $h_a = h_b = \dfrac{2S}{a}$.
2. $h_c = m_c = l_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$.
3. $S = \dfrac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$.
4. $R = \dfrac{a^2}{2h_c}$; $\left(\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}\text{ і } \sin\alpha = \dfrac{h_c}{a}\text{, тоді } R = \dfrac{a^2}{2h_c}\right)$.
5. $r = \dfrac{c\,h_c}{2p}$; $\left(\left.\begin{matrix} S = pr \\ S = \dfrac{c\,h_c}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow pr = \dfrac{c\,h_c}{2};\ r = \dfrac{c\,h_c}{2p}\right)$.

Рівносторонній трикутник
$\left(a=b=c;\ \alpha=\beta=\gamma=60^\circ\right)$

1. $h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = l_a = l_b = l_c = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
2. $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.
3. $R = 2r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
4. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Площа трикутника

1. $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$.
2. $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$.
3. $S = \dfrac{abc}{4R}$.

4. $S = pr, \left(S = S_1 + S_2 + S_3 = = \frac{1}{2} r\, a + \frac{1}{2} r\, b + \frac{1}{2} r\, c = \right.$

$\left. = \frac{1}{2} r(a+b+c) = pr\right),$

де $S_1 = S_{\Delta BOC}$, $S_2 = S_{\Delta AOC}$, $S_3 = S_{\Delta AOB}$ (рис. 1.17).

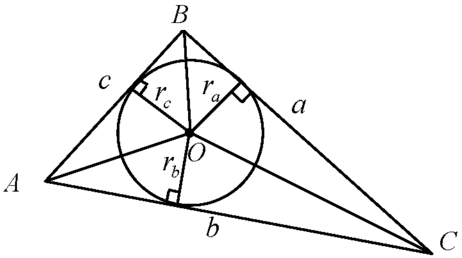


Рис. 1.17

5. $S = R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$. Доведемо:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma; \qquad (1)$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha; \qquad (2)$$

$$S = \frac{1}{2} ac \sin\beta. \qquad (3)$$

Помножимо вирази (1), (2), (3) почленно:

$S^3 = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma;\ \ S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 4SR = abc;$

$S^3 = \frac{1}{8} \cdot 16 \cdot S^2 R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma; \quad S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$

6. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — формула Герона.

Середня лінія трикутника

1. Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

2. Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині (рис. 1.18):

$$MN \parallel AC;\ \ MN = \frac{1}{2} AC.$$

3. Якщо MN, KN, MK – середні лінії ΔABC (рис. 1.19), тоді $P_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} P_{\Delta ABC}$.

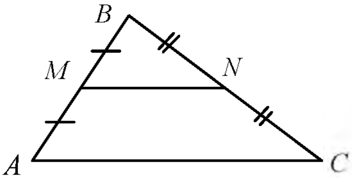


Рис. 1.18

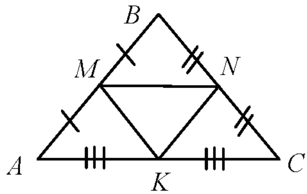


Рис. 1.19

1.2. Зразки розв'язування задач

Задача 1. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить медіану, проведену до основи, на відрізки 5 і 3 см.

Обчисліть периметр трикутника.

Розв'язання. Нехай в трикутнику ABC (рис. 1.20) $AB = BC$, $\angle ACN = \ = \angle NCB$, BH медіана; $OH = 3$ см, $BO = 5$ см.

Використавши властивість бісектриси, у трикутнику BHC дістаємо: $\frac{BC}{CH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}$, звідки $BC = \frac{5}{3} CH$.

Але $BH \perp HC$.

Тому $BC^2 = BH^2 + HC^2$, або

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 CH^2 = 8^2 + CH^2;$$

$$\left(\frac{16}{9}\right) CH^2 = 64; \quad CH = 6 \text{ см}.$$

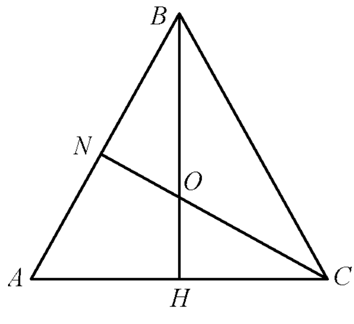


Рис. 1.20

Тоді $AB = BC = \left(\frac{5}{3}\right) CH = 10$ см; $AC = 12$ см і периметр трикутника ABC дорівнює 32 см.

Задача 2. Доведіть, що у трикутнику центр описаного кола O, центроїд X і ортоцентр H належать одній прямій (прямій Ейлера), причому $2OM_1 = AH$.

Доведення. Нехай M_1 і M_2 відповідно середини сторін CB і AC; $OM_1 \perp BC$. (рис. 1.21). Трикутники OM_1M_2 і AHB подібні, оскільки $AH \perp CB; OM_1 \perp CB; BH \perp AC; OM_2 \perp AC$.

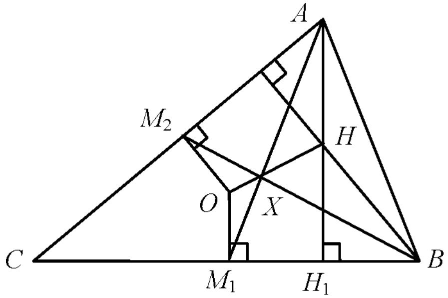


Рис. 1.21

$\dfrac{OM_1}{AH} = \dfrac{M_1M_2}{AB}$ і $M_1M_2 = \dfrac{1}{2}AB$, тоді $OM_1 = \dfrac{1}{2}AH$. Медіана AM_1 перетинає відрізок OH у точці X, такій, що $\dfrac{M_1X}{XA} = \dfrac{OM_1}{AH} = \dfrac{1}{2}$, а це означає, що точка X — центроїд.

Задача 3. Доведіть формулу $m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$ (m_a — медіана AM_1).

Доведення. Нехай задано трикутник ABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тоді в трикутнику ABC (рис. 1.22) продовжимо медіану AM_1 і відкладемо на її продовженні відрізок $M_1D = AM_1$.

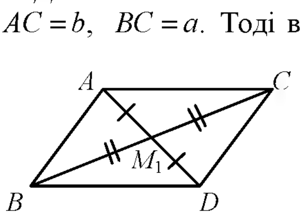


Рис. 1.22

За ознакою паралелограма чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, отже:

$$2\left(AB^2 + AC^2\right) = AD^2 + BC^2,$$

або $4m_a^2 + a^2 = 2\left(b^2 + c^2\right)$;

$$m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \text{ або } m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Задача 4. Доведіть, що в трикутнику ABC

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Доведення:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} + \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Задача 5. Доведіть формули:

$$\text{а) } l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}\text{; б) } l_a^2 = bc - b_1c_1,$$

де $l_a = AL_1$ — бісектриса кута A.

Доведення. а) Нехай S_1 і S_2 — площі трикутників ABL_1 і ACL_1 (рис. 1.23).

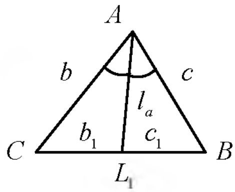


Рис. 1.23

Тоді $S = \frac{1}{2}bc\sin A$; $S_1 = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2}$; $S_2 = \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}$. Але $S = S_1 + S_2$, тоді

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2};$$

$$bc\sin A = l_a\sin\frac{A}{2}(b+c),\text{ звідки } l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}.$$

б) Для доведення формули використаємо теорему косинусів:

$$b_1^2 = b^2 + l_a^2 - 2bl_a\cos\frac{A}{2},\quad c_1^2 = c^2 + l_a^2 - 2cl_a\cos\frac{A}{2}.$$

Звідки: $\dfrac{b^2 + l_a^2 - b_1^2}{b} = \dfrac{c^2 + l_a^2 - c_1^2}{c}$

або $l_a^2(b-c) = bc(b-c) - \left(cb_1^2 - c_1^2b\right)$.

Ураховуючи властивість бісектриси внутрішнього кута трикутника, маємо:

$\dfrac{b}{c} = \dfrac{b_1}{c_1}$, або $bc_1 = b_1c$. Звідки $cb_1^2 - c_1^2b = b_1bc_1 - c_1b_1c = \ = b_1c_1(b-c)$.

Нехай $b \neq c$, тоді $l_a^2 = bc - b_1c_1$. Якщо $b = c$ — формула очевидна.

Задача 6. Дано три сторони a, b, c трикутника ABC. Доведіть, що бісектриса l_a цього трикутника визначається за формулами:

а) $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$; б) $l_a = \dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

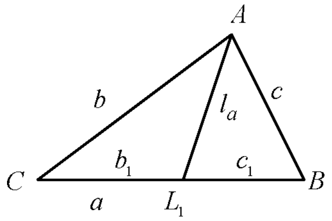


Рис. 1.24

Доведення. а) За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника ABC (рис. 1.24):

$$\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1};\ \frac{b}{c} = \frac{b_1}{a-b_1};$$

$$(a-b_1)b = b_1c;$$
$$cb_1 + b_1b = ba;$$
$$b_1(c+b) = ba;\ b_1 = \frac{ba}{c+b}.$$

Аналогічно $c_1 = \dfrac{ac}{b+c}$. Використаємо формулу $l_a^2 = bc - b_1c_1$;

$$l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc}{(b+c)^2}\left((b+c)^2 - a^2\right) = \frac{bc2p(2p-2a)}{(b+c)^2}.$$

Звідси $l_a = \dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$.

б) Запишемо співвідношення із властивості $l_a^2 = bc - b_1c_1$ (рис. 1.24) або $l_a^2 = bc - b_1(a-b_1)$. Далі використовуємо властивість $\dfrac{b}{c} = \dfrac{b_1}{a-b_1}$, тобто $b_1 = \dfrac{ab}{c+b}$. Тоді $l_a^2 = bc - \dfrac{ab}{b+c}\left(a - \dfrac{ab}{b+c}\right)$;

$$l_a^2 = bc - \frac{a^2b}{b+c} + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} = \frac{bc(b+c)^2 - a^2b(b+c) + a^2b^2}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc(b+c)^2 - \cancel{a^2b^2} - a^2bc + \cancel{a^2b^2}}{(b+c)^2} = \frac{bc\left((b+c)^2 - a^2\right)}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2};\quad l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}.$$

Задача 7. а) Доведіть:

а) що $W_1I = W_1B = W_1C$ (теорема про «трилисник») (рис. 1.25);

б) що $\angle CIB = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$;

W_1 — точка перетину бісектриси кута A трикутника ABC з описаним навколо цього трикутника колом. Точка I — інцентр.

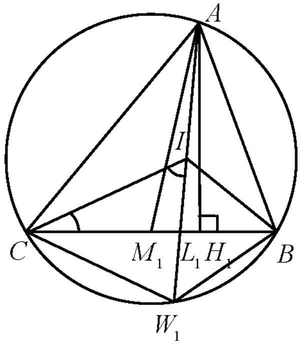


Рис. 1.25

Доведення.

а) Маємо $\angle ICW_1 = \frac{1}{2}\angle C + \angle BCW_1 =$

$= \frac{1}{2}(\angle C + \angle A)$. Але $\angle W_1IC = \angle ICA + \angle CAI = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A)$.

Тоді $\angle W_1IC = \angle ICW_1$, отже, $CW_1 = IW_1$. Аналогічно доводимо, що $W_1B = W_1I$. Маємо $W_1I = W_1B = W_1C$.

б) Розглянемо

$$\Delta CIB:\ \angle CIB = 180^\circ - \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle B}{2} = 180^\circ - \frac{\angle C + \angle B}{2} =$$

$$= 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

Задача 8. Доведіть, що $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (формула Ейлера). O — центр описаного навколо трикутника ABC кола. Точка I — інцентр.

Доведення. Через точки O і I проводимо діаметр T_1T_2 (рис. 1.26). Позначимо: $OI = d$. Тоді $T_1I = R + d$, $IT_2 = R - d$. Маємо: $T_1I \cdot IT_2 = AI \cdot IW_1$;

$$(R + d)(R - d) = AI \cdot IW_1\ . \qquad (1)$$

Проведемо $IK \perp AB$; $IK = r$.

$\Delta CDW_1 \sim \Delta AIK$ (за двома кутами $\angle A = \angle D, \angle C = \angle K = 90^\circ$).

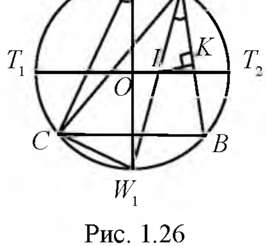


Рис. 1.26

$$\frac{DW_1}{AI}=\frac{CW_1}{IK};\ \frac{2R}{AI}=\frac{CW_1}{r};$$

$$2Rr = AI\cdot CW_1. \qquad (2)$$

(використаємо теорему «про трилисник»).

Підставимо рівняння (2) у рівність (1):

$$(R+d)(R-d)=2Rr;\ R^2-d^2=2Rr;$$

$$d^2=R^2-2Rr;\ OI^2=R^2-2Rr.$$

Задача 9. Доведіть формули:

$$\text{а)}\ r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2};\ \text{б)}\ r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Доведення. а) Формулу дістаємо, розглянувши трикутник AIK (рис. 1.27):

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{AK};\ r=AK\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

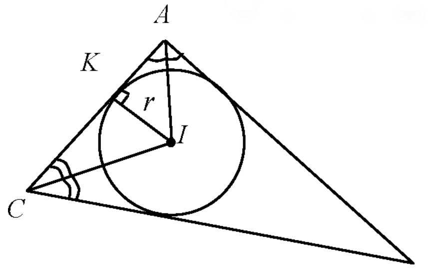


Рис. 1.27

Доведемо формулу б):

$$r=\frac{S}{p}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{R(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{2R^2\sin A\sin B\sin C}{4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Задача 10. Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, проходить через середину сторони BC і перетинає сторону AB у точці D

так, що $AD = \frac{1}{3}AB$. Обчисліть площу трикутника ABC, якщо $AC = 1$.

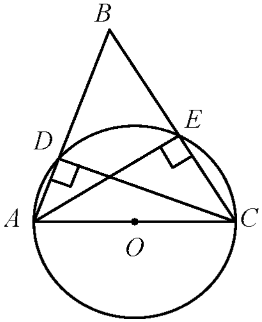


Рис. 1.28

Розв'язання. Нехай точка E — середина сторони BC (рис. 1.28). Оскільки кут, який спирається на діаметр, прямий, то $CD \perp AB$, $AE \perp BC$, тобто CD і AE — висоти трикутника ABC. Але AE є також медіаною трикутника ABC. Тому ABC — рівнобедрений трикутник; $AB = AC = 1$.

Площа трикутника ABC дорівнює $S = \frac{1}{2}CD \cdot AB.$

За умовою задачі $AD = \frac{1}{3}AB$, тому

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{AB^2 - \frac{1}{9}AB^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}AB,$$

отже, $S = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}}{3}AB^2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Задача 11. У рівнобедрений трикутник ABC $(AB = BC)$ вписано коло. Через точку M, яка лежить на стороні AB, проведено дотичну до кола, що перетинає пряму AC у точці N. Знайдіть бічну сторону трикутника ABC, якщо $AC = CN = a, MB = \frac{1}{8}AB.$

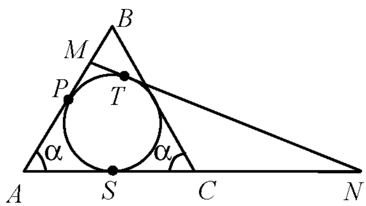


Рис. 1.29

Розв'язання. Нехай коло дотикається AB; AC і MN відповідно в точках P, S і T (рис. 1.29).

Позначимо $AB = x$, $\angle BAC = \alpha$, тоді $BM = \frac{1}{8}x.$

За властивістю дотичних $AP = AS = \frac{a}{2}$;

$$MP = MT = AB - (AP + BM) = x - \left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{7}{8}x - \frac{a}{2};$$

$$NT = NS = NC + CS = a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a;$$

$$MN = NT + MT = \frac{3}{2}a + \frac{7}{8}x - \frac{a}{2} = a + \frac{7}{8}x.$$

За теоремою косинусів $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos\alpha$,

$\left(a + \frac{7}{8}x\right)^2 = \left(\frac{7}{8}x\right)^2 + 4a^2 - 2\frac{7}{8}x2a\cos\alpha$, або $\frac{7}{4}x = 3a - \frac{7}{2}x\cos\alpha$,

де $\cos\alpha = \frac{AS}{AB} = \frac{a}{2x}$. Тоді $\frac{7}{4}x = 3a - \frac{7}{2}x \cdot \frac{a}{2x}$; $x = \frac{5}{7}a$.

Відповідь: $\frac{5}{7}a$.

Задача 12. Відрізок AD є бісектрисою гострого кута прямокутного трикутника $ABC\ (\angle C = 90°)$. Коло, радіус якого дорівнює $\sqrt{15}$, проходить через точки A, C, D і перетинає сторону AB у точці E так, що $AE : AB = 3 : 5$. Обчисліть площу трикутника ABC.

Розв'язання. За умовою задачі в трикутнику $\angle ACD = \frac{\pi}{2}$, отже, AD — діаметр кола, тоді $\angle AED = \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.30). Оскільки AD — бісектриса, то $\angle CAD = \angle EAD \Rightarrow \Delta ACD = \Delta AED$ рівні. Нехай $AE = 3x$, $AB = 5x$.

Тоді $AC = 3x$, $EB = 2x$, $CB = 4x$ $(EB = AB - AE)$.

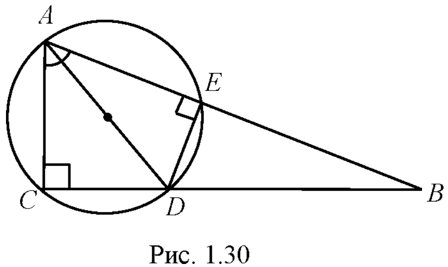


Рис. 1.30

З подібності трикутників ABC і EDB (за двома кутами) випливає $\frac{DB}{AB}=\frac{EB}{CB}$, звідки $DB=\frac{5}{2}x$, $CD=\frac{3}{2}x$;

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}$; $AD=\frac{3\sqrt{5}}{2}x=2\sqrt{15}$. Отже, $x=\frac{4}{\sqrt{3}}$.

$S=\frac{1}{2}AC\cdot BC$; $S=6x^2=6\cdot\frac{16}{3}=32$.

Відповідь: 32.

Задача 13. У гострокутному трикутнику ABC з вершин A і C проведено висоти AP і CQ на сторони BC і AB. Відомо, що площа трикутника ABC дорівнює 18, площа трикутника BPQ — 2, а довжина відрізка PQ — $2\sqrt{2}$. Обчисліть радіус кола, яке описано навколо трикутника ABC.

Розв'язання. З прямокутних трикутників ABP, BCQ (рис. 1.31) знаходимо:

$$\cos\angle B=\frac{BP}{AB};\ \cos\angle B=\frac{BQ}{BC},$$

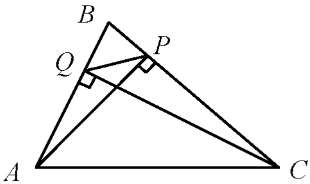


Рис. 1.31

тоді $\frac{BP}{AB}=\frac{BQ}{BC}$.

Із цього випливає, що $\Delta BPQ\sim$ $\sim\Delta ABC$.

Коефіцієнт подібності $k=\cos\angle B$,

тоді $\cos^2\angle B=\frac{S_{\Delta BPQ}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$. За умовою, трикутник ABC гострокутний, тоді $\cos\angle B>0$ і відповідно $\cos\angle B=\frac{1}{3}$.

З подібності трикутників ABC і BPQ випливає $\frac{PQ}{AC}=\cos\angle B=\frac{1}{3}$, звідси $AC=3PQ=6\sqrt{2}$.

Нехай R — радіус кола, яке описано навколо трикутника ABC.

За теоремою косинусів $2R=\frac{AC}{\sin\angle B}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{1-1/9}}=9$, $R=\frac{9}{2}$.

Відповідь: $\frac{9}{2}$.

Задача 14. У рівносторонній трикутник ABC, сторона якого дорівнює 3, вписано інший рівносторонній трикутник $A_1B_1C_1$, площа якого втричі менша від площі першого. Знайдіть AA_1 і A_1B $(A_1 \in AB)$.

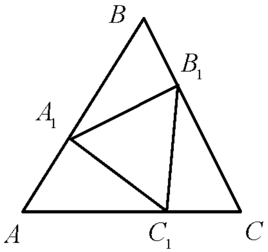


Рис. 1.32

Розв'язання. Нехай ABC — трикутник, у якого $AB = BC = AC = 3$ і $A_1B_1C_1$ вписаний в нього трикутник, причому $S_{\Delta ABC} = 3S_{\Delta A_1B_1C_1}$ (рис. 1.32).

Оскільки площі подібних трикутників відносяться, як квадрати відповідних сторін, то $\dfrac{A_1B_1^{\,2}}{AB^2} = \dfrac{1}{3}$, звідки $A_1B_1 = \sqrt{3}$.

Нехай $AA_1 = BB_1 = x$, тоді $A_1B = 3 - x$. Застосовуючи теорему косинусів до трикутника A_1BB_1, дістаємо:

$A_1B_1^{\,2} = A_1B^2 + BB_1^{\,2} - 2A_1B \cdot BB_1 \cos 60^\circ$, або

$A_1B_1^{\,2} = A_1B^2 + BB_1^{\,2} - A_1B \cdot BB_1$.

Ураховуючи, що $A_1B_1 = \sqrt{3}$, $A_1B = 3 - x$, $BB_1 = x$, дістаємо рівняння: $3 = (3 - x)^2 + x^2 - x(3 - x)$, звідки $x = 1$ або $x = 2$.

Відповідь: $AA_1 = 1$, $A_1B = 2$.

Задача 15. Доведіть, що діаметр, уписаного в прямокутний трикутник кола, дорівнює різниці між сумою катетів і гіпотенузою.

Доведення. Дано трикутник ACB (рис. 1.33), де $CA = a$, $CB = b$, $AB = c, \angle C = 90$.

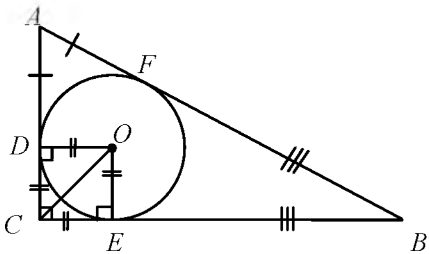


Рис. 1.33

Нехай $OE = r$; $CDOE$ — квадрат, тоді $DC = CE = r$.

$DO + OE = DC + CE;$
$2r = CD + CE = a - AD + b -$
$-BE = a - AF + b - BF = a + b - (AF + BF) = a + b - c.$

Отже, $2r = a + b - c$, $d = a + b - c$.

Задача 16. За двома сторонами a і b трикутника знайдіть третю сторону, якщо відомо, що медіани, проведені до цих сторін, перетинаються під прямим кутом.

Розв'язання. Нехай дано трикутник ABC, у якого $BC = a$; $AC = b$; $AB = c$ (рис. 1.34). Оскільки трикутники AOB, BOE і AOD — прямокутні, то за теоремою Піфагора:

$AO^2 + OD^2 = AD^2;$

$BO^2 + OE^2 = BE^2;$

$BO^2 + AO^2 = AB^2.$

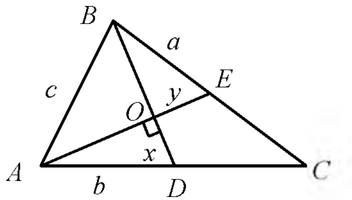


Рис. 1.34

Точка O ділить кожну медіану у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника. Тому, якщо $OD = x$, $OE = y$, тоді $AO = 2y$, $BO = 2x$. Крім того, $BE = \frac{a}{2}$, $AD = \frac{b}{2}$ і $AB = c$. Тоді:

$$4y^2 + x^2 = \frac{b^2}{4}; \quad (1)$$

$$4x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}; \quad (2)$$

$$4x^2 + 4y^2 = c^2. \quad (3)$$

Додаємо почленно перші два рівняння (1) і (2):

$$5x^2 + 5y^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}; \; 4x^2 + 4y^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}.$$

Використовуємо третє рівняння (3), отримуємо:

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{5}; \; c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}.$$

Відповідь: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{5}}$.

Задача 17. Знайдіть радіус уписаного в прямокутний трикутник кола, якщо дано радіус R описаного навколо цього трикутника кола і площа трикутника S.

Розв'язання. Нехай є трикутник ABC, у якого $AC=a$, $BC=b, \angle C=90^\circ$ (рис. 1.35).

Тоді

$$2r=CD+CE=AC-AD+CB-BE=AC-AF+CB-BF=$$

$$=a+b-(AF+FB)=a+b-2R=\sqrt{(a+b)^2}-2R=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+2ab}-2R=\sqrt{4R^2+4S}-2R.$$

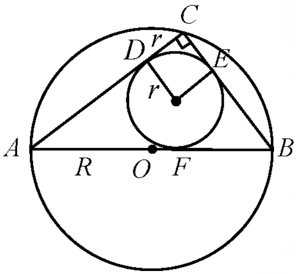


Рис. 1.35

$$\left(a^2+b^2=AB^2 \text{ і } \frac{ab}{2}=S, a^2+b^2=(2R)^2\right).$$

Звідси $r=\sqrt{R^2+S}-R.$

Відповідь: $\sqrt{R^2+S}-R.$

Задача 18. Дві сторони гострокутного трикутника дорівнюють відповідно 20 і 23,2 см. Радіус описаного навколо цього трикутника кола становить 14,5 см. Знайдіть радіус уписаного в цей трикутник кола.

Розв'язання. Шуканий радіус можна знайти за формулою $r=\dfrac{S}{p}$.

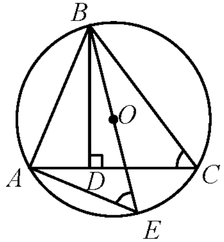


Рис. 1.36

Для цього треба знайти третю сторону трикутника (рис. 1.36).

Нехай є трикутник ABC, у якого $BC=23{,}2$ см, $AB=20$ см.

Проводимо висоту BD і діаметр BE описаного кола. З'єднаємо кінець діаметра E з вершиною A трикутника.

Трикутник ABE — прямокутний, $\angle BCA=\angle BEA.$

Тоді $\Delta BDC \sim \Delta BAE$ (за двома кутами).

З подібності трикутників маємо:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BC}{BE},\; BD=AB\frac{BC}{BE}=20\frac{23{,}2}{29}=\frac{20\cdot116}{29\cdot5}=16 \text{ (см)};$$

$$AC = AD + DC = \sqrt{AB^2 - BD^2} + \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} +$$

$$+\sqrt{\left(\frac{116}{5}\right)^2 - 16^2} = 12 + \frac{84}{5} = \frac{144}{5} \text{ (см)};$$

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{144}{5} \cdot 16 = = \frac{1152}{5} \text{ (см}^2\text{)};$$

$$p = \frac{1}{2}\left(20 + \frac{116}{5} + \frac{144}{5}\right) = 36 \text{ (см)};$$

$$r = \frac{1152}{5 \cdot 36} = 6,4 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 6,4 см.

Задача 19. У рівнобедрений трикутник вписано одне над одним два кола, які мають радіуси R і r, та дотикаються одне до одного. Знайдіть кути при основі трикутника.

Розв'язання. Нехай дано трикутник ABC (рис. 1.37); $O_1K = R$, $O_2E = r$.

Нехай $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$.

Проведемо висоту CD, $EM \parallel CD$, тоді $ME = O_1O_2 = R + r$; $MK = R - r$; $\Delta EMK \sim \Delta CBD$ (за двома кутами).

Тоді $\angle EMK = \angle CBA = \alpha$.

Із трикутника MKE випливає: $\cos\alpha = \frac{MK}{ME} = \frac{R - r}{R + r}$.

Відповідь: $\cos\alpha = \frac{R - r}{R + r}$.

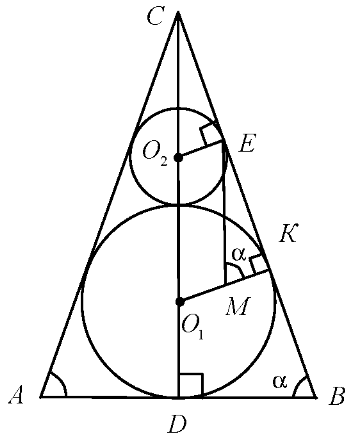


Рис. 1.37

Задача 20. У прямокутному трикутнику ABC з вершини C прямого кута проведено висоту CD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, дорівнюють відповідно r_1 і r_2. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

Розв'язання. Позначимо шуканий радіус r. Нехай $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ (рис. 1.38).

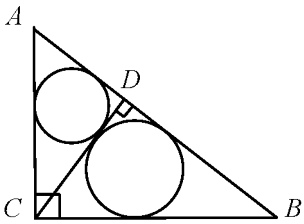


Рис. 1.38

З подібності трикутників ACD і ABC (рівні кути при вершині A, $\angle D = \angle C = 90^\circ$) маємо $\frac{r}{r_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow b = \frac{r_1}{r}c$.

Прямокутні трикутники CBD і ABC також подібні, тому $\frac{r}{r_2} = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{r_2}{r}c$.

Оскільки $a^2 + b^2 = c^2$, то:

$$\left(\frac{r_2}{r}c\right)^2 + \left(\frac{r_1}{r}c\right)^2 = c^2 \Rightarrow \frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} =$$
$$= 1 \Rightarrow r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Задача 21. У рівнобедреному трикутнику ABC довжини бічних сторін AB і AC дорівнюють b, кут при вершині A дорівнює 2α.

Пряма, що проходить через вершину B і центр кола O, яке описано навколо трикутника ABC, перетинає сторону AC у точці D. Знайдіть довжину відрізка BD.

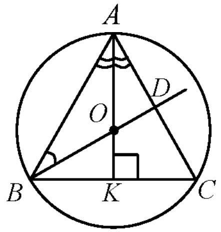


Рис. 1.39

Розв'язання. Центр кола, яке описано навколо рівнобедреного трикутника ABC (рис. 1.39), лежить на його бісектрисі AK, $\angle ABD = \angle OAB = \alpha$ (ΔAOB — рівнобедрений).

У трикутнику BAD відомі два кути. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то $\angle BDA = 180^\circ - 3\alpha$.

За теоремою синусів з трикутника BDA маємо $\frac{BD}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$, звідки $BD = \frac{AB \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{b \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Відповідь: $BD = \frac{b \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Задача 22. Через точку M, що лежить усередині трикутника ABC, проведено три прямі, паралельні його сторонам. При цьому утворилися три трикутники, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3. Знайдіть площу трикутника ABC.

Розв'язання. Трикутники EKM, MQF, PMN подібні трикутнику ABC (рис. 1.40). Нехай S — площа трикутника ABC, S_1, S_2, S_3 — відповідно площі трикутників EKM, MQF, PMN. Тоді:

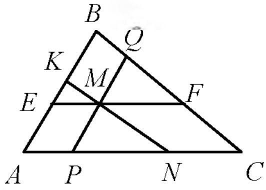


Рис. 1.40

$$\frac{S_1}{S}=\frac{EM^2}{AC^2};\ \frac{S_2}{S}=\frac{MF^2}{AC^2};\ \frac{S_3}{S}=\frac{PN^2}{AC^2}.$$

Звідси $EM=\sqrt{\frac{S_1}{S}}AC,\ MF=\sqrt{\frac{S_2}{S}}AC,\ PN=\sqrt{\frac{S_3}{S}}AC.$

Оскільки $EM=AP,\ MF=NC,$ то $EM+PN+MF=AP+PN+$ $+NC=AC.$

Таким чином, $AC\left(\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}+\sqrt{\frac{S_3}{S}}\right)=AC.$

Маємо $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$

Відповідь: $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2.$

Задача 23. Доведіть, що в довільному трикутнику точка перетину бісектриси з протилежною стороною лежить між точками перетину з цією стороною медіани і висоти.

Доведення. Розглянемо доведення, яке наведено у посібнику [7]. Нехай AM — медіана, AH — висота, AL — бісектриса у трикутнику ABC. W — точка перетину бісектриси з описаним колом навколо трикутника ABC (рис. 1.41).

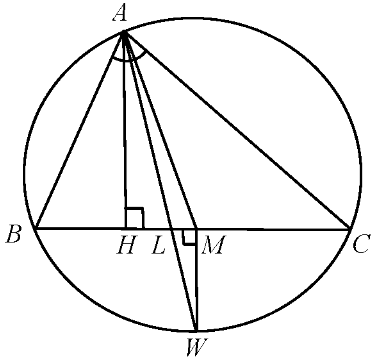


Рис. 1.41

Оскільки точка W є серединою дуги BWC, то проекцією точки W на сторону BC є точка M. Таким чином, якщо проектувати відрізок AW на відрізок BC, то точки M і H є проекціями його кінців, а це означає, що точка L лежить між точками M і H.

Задача 24. Доведіть, якщо M — центроїд (точка перетину медіан) трикутника ABC, тоді $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta BMA} = S_{\Delta AMC}$.

Доведення. Доведемо, що $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3}S$, де S — площа трикутника ABC. Якщо з точки M провести до сторони BC перпендикуляр MD, $MD = \frac{1}{3}AH_1$, оскільки ΔM_1MD і ΔM_1AH_1 подібні та $MM_1 = \frac{1}{3}M_1A$ (рис. 1.42).

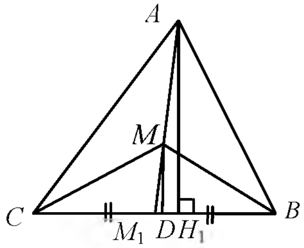


Рис. 1.42

За властивістю трикутників, які мають рівні основи, $S_{\Delta BMC} = \frac{1}{3}S$.

Аналогічно доводимо, що $S_{\Delta BMA} = \frac{1}{3}S$, $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{3}S$. Отже, $S_{\Delta BMC} = S_{\Delta BMA} = S_{\Delta AMC}$.

1.3. Доведення деяких теорем і формул

Задача 1. Доведіть, що у довільному трикутнику:

а) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$;

в) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$;

г) $a+b = 4R\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $a-b = 4R\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

д) $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$; $p=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$.

Доведення. а) Нехай AD — бісектриса, $\angle DAC=\angle BAD=\frac{\alpha}{2}$; $AD=l_a$; $AC=b$; $AB=c$; $BC=a$ (рис. 1.43).

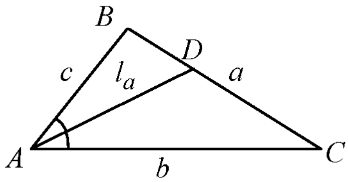


Рис. 1.43

Площа трикутника ABC дорівнює:

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}l_a c\sin\frac{\alpha}{2}+$$
$$+\frac{1}{2}l_a b\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}l_a(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Ураховуючи, що $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$, отримаємо

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}(b+c)\sqrt{bcp(p-a)}}{(b+c)}. \quad (1)$$

За формулою Герона

$$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (2)$$

Прирівнюємо рівності (1) і (2):

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{bcp(p-a)}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{bc}}.$$

б) Для доведення використаємо такі формули: $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, $R=\frac{abc}{4S}$ і $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тоді

$$\frac{a}{\sin\alpha}=2\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}};$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{bc}{2\sqrt{p(p-a)}\sqrt{(p-b)(p-c)}},$$ ураховуючи, що

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$, отримаємо $\dfrac{1}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{bc}}{\sqrt{p(p-a)}}$;

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$.

в) З доведеного $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ і $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$ маємо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$.

г) Доведемо, що $a+b=4R\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, де α,β,γ — внутрішні кути трикутника ABC.

За наслідком з теореми синусів $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2R$; $\dfrac{b}{\sin\beta}=2R$. Звідси

$$a=2R\sin\alpha; \tag{1}$$

$$b=2R\sin\beta. \tag{2}$$

Додамо почленно рівності (1) і (2): $a+b=2R(\sin\alpha+\sin\beta)$.

Використаємо формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, де $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\sin\dfrac{180^\circ-\gamma}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

Отже, $a+b=2R\cdot 2\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; $a+b=4R\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Формула $a-b=4R\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ доводиться аналогічно.

д) Доведемо, що $\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$ і $p=S\left(\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}\right)$.

Розглянемо трикутник ABC (рис. 1.44). Нехай O — центр уписаного кола, $OM=ON=OK=r$ — радіуси вписаного кола.

$AB=c, BC=a, AC=b.$ З'єднаємо вершини трикутника з центром уписаного кола.

Площа трикутника ABC:

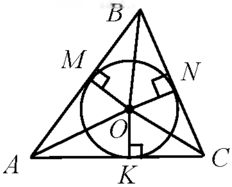


Рис. 1.44

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta AOC};$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{OM\cdot c}{2}+\frac{ON\cdot a}{2}+\frac{OK\cdot b}{2};$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{ra}{2}+\frac{rb}{2}+\frac{rc}{2};$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{rah_a}{2h_a}+\frac{rbh_b}{2h_b}+\frac{rch_c}{2h_c};\quad S_{\Delta ABC}=S=r\frac{S}{h_a}+r\frac{S}{h_b}+r\frac{S}{h_c};$$

$$S=Sr\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right);\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c};$$

$$p=\frac{S}{r}=S\frac{1}{r}=S\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right).$$

Задача 2. Доведіть, що у довільному трикутнику:

а) $r_a=p\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$;

б) $r_a=\frac{S}{p-a}$, де r_a — радіус зовнівписаного кола;

в) $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}$;

г) $\frac{BM}{ML}=\frac{BC+AB}{AC}$; ($AK, BL, CN$ — бісектриси ΔABC);

д) $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$ і $h_a^2=b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)^2$.

Доведення. а) Нехай у трикутнику ABC побудовано зовнівписане коло з центром O, яке дотикається до сторони BC і продовження сторін AB, AC (рис. 1.45). Проведемо бісектрису AM. Позначимо: $\angle BAM=\angle CAM=\frac{\alpha}{2}$; $OD=r_a$. $BC=a, AC=b, AB=c.$

Розглянемо трикутник $AOD\,(\angle ADO=90^\circ)$: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OD}{AD}=\frac{r_a}{b+CD}$.

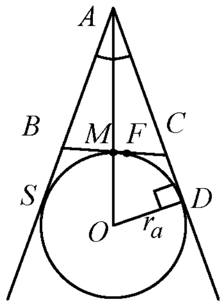


Рис.1. 45

Точки S, F, D — точки дотику. Тоді за властивістю дотичних, проведених з однієї точки до даного кола, маємо:

$$AD = AS, FC = CD\,,\ SB = BF.$$

Звідси:

$b + CD = c + BS;\ \ b + FC = c + BF;$

$b + 2\cdot FC = c + BF + FC;$

$b + 2FC = c + a;\ \ 2b + 2FC = a + b + c;$

$2(b + FC) = P;\ \ b + FC = \dfrac{P}{2};$

$$b + FC = p. \qquad (1)$$

Підставимо в рівність $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_a}{b + CD} = \dfrac{r_a}{b + FC}$ значення з виразу (1) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r_a}{p}$, звідки $r_a = p\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

б) Доведемо, що $r_a = \dfrac{S}{p - a}$.

Використаємо формулу $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$, тоді

$$r_a = p\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \frac{\sqrt{p}\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}\sqrt{p-a}\sqrt{p}}{\sqrt{p}\sqrt{p-a}\sqrt{p-a}} =$$

$$= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a} = \frac{S}{p-a};\ \ r_a = \frac{S}{p-a}.$$

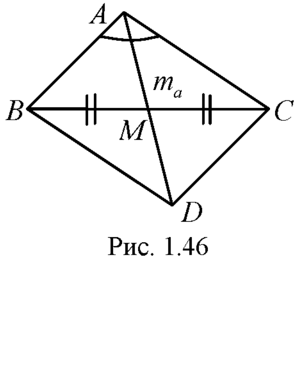


Рис. 1.46

в) Доведемо, що в трикутнику ABC $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}$ (рис. 1.46).

Нехай AM — медіана, проведена до сторони BC трикутника ABC, де $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$, $AM = m_a$. Проводимо $BD \parallel AC$ і $CD \parallel AB$. Тоді $ABCD$ — паралелограм, у якому $AD = 2m_a$.

За теоремою косинусів у трикутнику ABD:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2ABBD\cos\angle ABD.$$

$$\angle ABD = 180^\circ - \alpha, BD = AC = b, \text{ тоді}$$

$$(2m_a)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180^\circ - \alpha), \text{ де } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha}.$$

г) Доведемо, що в трикутнику ABC (рис. 1.47) виконуються відношення $\frac{BM}{ML} = \frac{BC + AB}{AC}$, де M — точка перетину бісектрис CN, AK і BL.

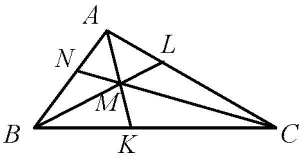


Рис. 1.47

Доведення. Розглянемо трикутник BLC. За властивістю бісектриси

$$\frac{BM}{ML} = \frac{BC}{CL};\ BM \cdot CL = ML \cdot BC. \qquad (1)$$

Аналогічно в трикутнику ABL:

$$\frac{BM}{ML} = \frac{AB}{AL};\ BM \cdot AL = AB \cdot ML. \qquad (2)$$

Додамо рівності (1) і (2): $BM(CL + AL) = ML(BC + AB)$;

$BM \cdot AC = ML(BC + AB)$, отже, $\frac{BM}{ML} = \frac{BC + AB}{AC}$.

Аналогічно доводимо $\frac{CM}{NM} = \frac{BC + AC}{AB}$ і $\frac{AM}{MK} = \frac{AB + AC}{BC}$.

д) Доведемо, що для довільного трикутника залежність між його висотами h_a, h_b, h_c і сторонами a, b, c визначається формулами:

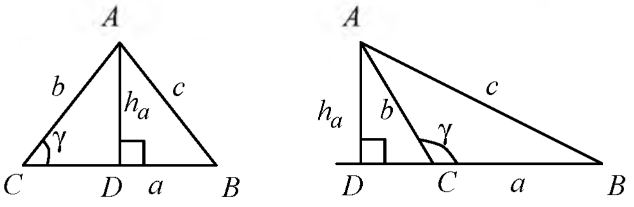
$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} \text{ і } h_a^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)^2.$$

Доведення. Для довільного трикутника $a = \frac{2S}{h_a};\ b = \frac{2S}{h_b};\ c = \frac{2S}{h_c}$.

Тоді $a : b = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} \Rightarrow a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}$;

$b : c = \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c} \Rightarrow b : c = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$, отже, $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

Для доведення формули $h_a^2 = b^2 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2$ розглянемо рис. 1.48, *а*, *б*.



а *б*

Рис. 1.48

Із рис. 1.48, *а* маємо $CD = b\cos\gamma$, а з рис. 1.48, *б* — $CD = b\cos\left(180^\circ - \gamma\right) = -b\cos\gamma$. Отже, $CD = \left|b\cos\gamma\right|$.

За теоремою косинусів:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma; \qquad (1)$$

$$h_a^2 = b^2 - CD^2.$$

З рівності (1) $b\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$, тоді $h_a^2 = b^2 - \left(\left|b\cos\gamma\right|\right)^2 = b^2 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2$; $h_a^2 = b^2 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2$.

Задача 3. Доведіть, що в прямокутному трикутнику виконуються такі рівності і твердження:

а) $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$ і $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$;

б) $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$;

в) площа прямокутного трикутника дорівнює добутку відрізків, на які ділиться гіпотенуза точкою дотику вписаного в цей трикутник кола;

г) радіус вписаного кола обчислюється за формулою $r = \dfrac{a + b - c}{2}$.

Доведення. Розглянемо рис. 1.49. Нехай ABC — прямокутний трикутник. $\angle C = 90^\circ$. O — центр вписаного кола.

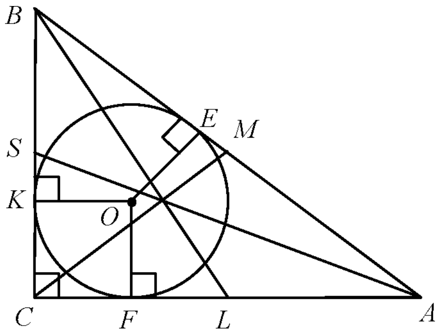


Рис. 1.49

$OK = OF = OE = r$ — радіус вписаного кола. BL, AS і CM — медіани, $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$.

а) Розглянемо трикутник BCL $(\angle C = 90°)$:

$$BL^2 = BC^2 + CL^2 = BC^2 + \left(\frac{1}{2}AC\right)^2,\ m_b^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2;$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}\ . \qquad (1)$$

Аналогічно доводиться, що

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}\ . \qquad (2)$$

б) Із формул (1) і (2) отримаємо: $4m_a^2 = 4b^2 + a^2$ і $4m_b^2 = 4a^2 + b^2$. Додамо почленно ці рівності:

$4\left(m_a^2 + m_b^2\right) = 5\left(a^2 + b^2\right)$; $4\left(m_a^2 + m_b^2\right) = 5c^2$, де $c = 2m_c$.

Тоді $4\left(m_a^2 + m_b^2\right) = 5 \cdot 4m_c^2$; $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

в) Доведемо, що $S = AE \cdot BE$ (рис. 1.49).

$S = \dfrac{ab}{2}$; $2S = ab$; $a = CK + BK$; $b = CF + FA$.

Тоді $2S = (CK + BK)(CF + FA)$. Чотирикутник $KCFO$ — квадрат, отже, $KO = CK = CF = OF = r$. За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки $AF = AE$, $KB = BE$.

Тоді

$$2S = (BE + r)(AE + r)\,. \qquad (1)$$

Знаємо, що

$$S = pr = r\left(BE + AE + r\right). \qquad (2)$$

Віднімаємо від рівності (1) формулу (2):

$2S - S = BE \cdot AE + rAE + rBE + r^2 - rBE - rAE - r^2;\ S = BE \cdot AE.$

г) Із рис. 1. 49 маємо:

$$AB + BC + AC = AE + EB + BK + KC + CF + FA.$$

За властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки, $CF = CK,\ AF = AE,\ BK = BE$ і $KC = CF = KO = FO = r.$

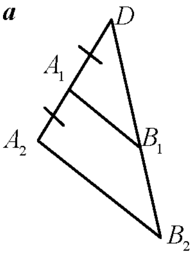
Тоді $a + b + c = 2r + 2\left(BE + AE\right);\ a + b + c = 2r + 2c;$

$2r = a + b + c - 2c;\ r = \dfrac{a + b - c}{2}.$

1.4. Тренувальні вправи в рисунках

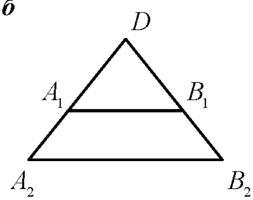
1. Знайдіть A_1B_1, якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

а



$A_2B_2 = 18$ см

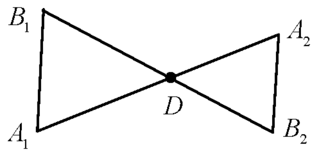
б



$A_2B_2 = 15$ см

$\dfrac{A_2A_1}{A_1D} = \dfrac{2}{3}$

в

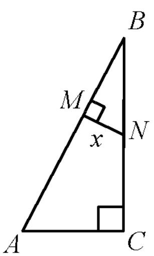


$A_2B_2 = 6$ см

$\dfrac{A_1A_2}{A_1D} = \dfrac{5}{3}$

2. Знайдіть x:

а

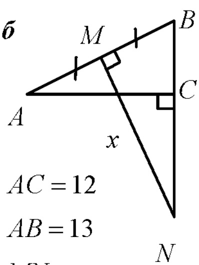


$BN = 3$

$NC = 5$

$AC = 6$

б

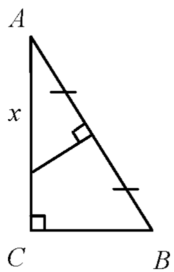


$AC = 12$

$AB = 13$

$MN = x$

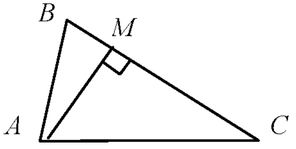
в



$AB = 5,\ CB = 3$

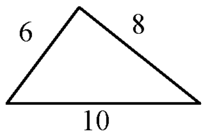
3. Обчисліть площу трикутника

а

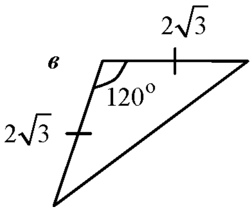


$BC = \sqrt{3},\ AM = \sqrt{2}$

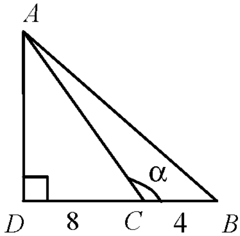
б



в



г

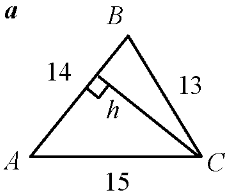


$\alpha = 135^{\circ}$

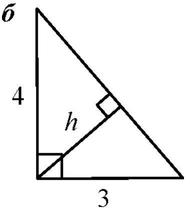
$S_{\Delta ABC}$ — ?

4. Знайдіть h:

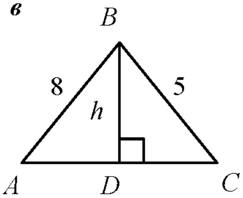
а



б

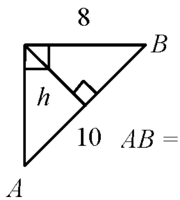


в



$AC = 7$

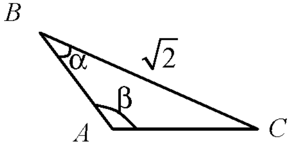
г



$AB = 10$

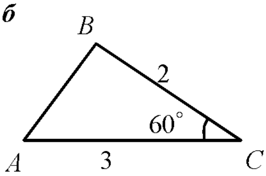
5. Знайдіть AB:

а

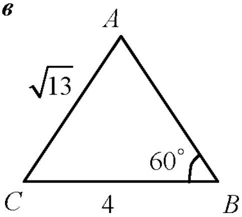


$\alpha = 15°,\ \beta = 135°$

б

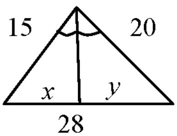


в

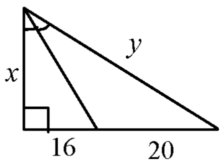


6. Знайдіть x, y, z

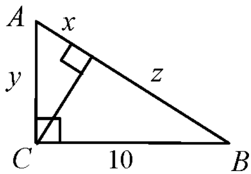
а



б



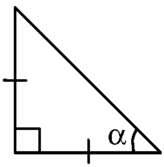
в



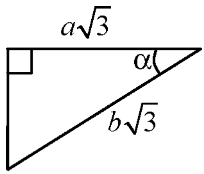
$AB = 25$

7. Знайдіть кут α

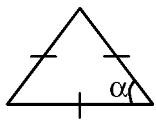
а



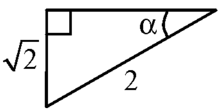
б



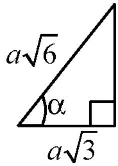
в



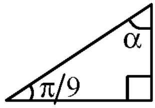
а



б



в



Відповіді:

1. а) 9 ; б) 9 ; в) 4. **2.** а) 1,8; б) 15,6; в) 3,125. **3**. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) 24; в) $3\sqrt{3}$; г) 16. **4.** а) 12; б) 2,4; в) 4,8. **5.** а) 1; б) $\sqrt{7}$; в) 3. **6.** а) 12 і 16; б) 48 і 60; в) 21, $5\sqrt{21}$ і 4. **7.** а) $45°$; б) $\arccos\frac{a}{b}$; в) $60°$; г) $45°$; д) $45°$; е) $70°$.

1.5. Тематичне тестування

Рівень I

1. У трикутнику ABC $BC=16$, $AC=11$, $AB=13$. Який кут у цьому трикутнику найменший?

А $\angle A$; **Б** $\angle B$; **В** $\angle C$; **Г** визначити не можна; **Д** інша відповідь.

2. Площа трикутника ABD дорівнює площі трикутника BDC. Порівняйте довжини відрізків AD і DC.

А $AD=DC$; **Б** $AD>DC$; **В** $AD<DC$; **Г** порівняти не можна; **Д** інша відповідь.

3. У подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB=6$ см, $BC=7$ см, $AC=8$ см, $A_1B_1=18$ см. Знайдіть B_1C_1 і A_1C_1.

А 14 см, 16 см; **Б** 7 см, 8 см; **В** $2\frac{4}{3}$ см, $2\frac{2}{3}$ см;

Г 21 см, 24 см; **Д** 12 см, 18 см.

4. Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

А 1; **Б** 2; **В** 3; **Г** 4; **Д** 6.

5. Довжини сторін трикутника 5 і 4 м. Довжина третьої сторони не може дорівнювати…

А 5 м; **Б** 6 м; **В** 7 м; **Г** 8 м; **Д** 9 м.

6. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника відтинає від нього трикутник, подібний даному. Кути цього трикутника дорівнюють...

А $36°, 36°, 108°$; **Б** $72°, 72°, 36°$; **В** $54°, 54°, 72°$;

Г $54°, 63°, 63°$; **Д** $102°, 61°, 61°$.

7. Знайдіть величину найбільшого кута трикутника ABC, якщо $AB = 7$ м, $BC = 12$ м, $AC = 10$ м.

А $\arccos\frac{1}{28}$; **Б** $\arccos\frac{1}{14}$; **В** $\frac{\pi}{2}$; **Г** $\arccos\frac{19}{48}$; **Д** інша відповідь.

8. Зовнішні кути трикутника відносяться, як 2 : 3 : 4. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

А $40^\circ; 60^\circ; 80^\circ$; **Б** $20^\circ; 60^\circ; 100^\circ$; **В** $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$;

Г $30^\circ; 70^\circ; 80^\circ$; **Д** інша відповідь.

9. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A = 30^\circ$, $AC = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{2}$.

А $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$; **Б** $30^\circ; 30^\circ; 120^\circ$; **В** $30^\circ; 60^\circ; 90^\circ$ або $30^\circ; 30^\circ; 120^\circ$; **Г** $30^\circ; 45^\circ; 105^\circ$; **Д** інша відповідь.

10. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $\angle C = 45^\circ$, а радіус описаного навколо цього трикутника кола дорівнює $\sqrt{2}$ м.

А 1 м; **Б** $\sqrt{2}$ м; **В** $\sqrt{3}$ м; **Г** 2 м; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Знайдіть катет AC прямокутного трикутника ABC, якщо $AB = 9$ м, $BC = 10$ м.

А 3 м; **Б** $\sqrt{149}$ м; **В** $\sqrt{149}$ м або $\sqrt{51}$ м; **Г** $\sqrt{19}$ м; **Д** інша відповідь.

2. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 52 м, 56 м, 60 м.

А 30 м; **Б** $20\sqrt{5}$ м; **В** $\frac{65}{2}$ м; **Г** 32 м; **Д** інша відповідь.

3. Знайдіть висоту BB_1 прямокутного трикутника ABC $\left(\angle B = 90^\circ\right)$, якщо $AB = 5$ см, $BC = 8$ см.

А $\sqrt{61}$ см; **Б** $\sqrt{11}$ см; **В** $\frac{40}{\sqrt{89}}$ см; **Г** $\frac{15\sqrt{61}}{61}$ см; **Д** інша відповідь.

4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13, а висота, проведена до основи — 12. Знайдіть довжину середньої лінії трикутника, яка паралельна його основі.

А 5; **Б** 4; **В** 3,5; **Г** 2,5; **Д** інша відповідь.

5. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $BC = 10$ м.

А $5\sqrt{6}$ м; **Б** $5\sqrt{2}$ м; **В** $\frac{5}{\sqrt{6}}$ м; **Г** $\frac{5}{\sqrt{2}}$ м; **Д** інша відповідь.

6. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гіпотенузою 17 см та різницею катетів 7 см.

А 48 см^2; **Б** 54 см^2; **В** 56 см^2; **Г** 60 см^2; **Д** інша відповідь.

7. Більший кут трикутника дорівнює 140°. Під яким кутом видно більшу сторону цього трикутника з центра вписаного кола.

А 160°; **Б** 160°; **В** 120°; **Г** 123°; **Д** інша відповідь.

8. Дві медіани трикутника взаємно перпендикулярні і дорівнюють 18 і 15 см. Знайдіть площу трикутника.

А 40 см^2; **Б** 60 см^2; **В** 90 см^2; **Г** 180 см^2; **Д** інша відповідь.

9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а проекція другого катета на гіпотенузу дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

А 3 см; **Б** 5 см; **В** $\sqrt{5}$ см; **Г** $2\sqrt{5}$ см; **Д** інша відповідь.

10. У рівнобедреному трикутнику з бічною стороною 4 см, проведена медіана до бічної сторони. Знайдіть основу трикутника, якщо медіана дорівнює 6 см.

А $\sqrt{6}$ см; **Б** 10 см; **В** 8 см; **Г** 2 см; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо медіани, які проведені до бічних сторін, взаємно перпендикулярні.

А 30°; **Б** 120°; **В** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; **Г** $\operatorname{arctg}3$; **Д** інша відповідь.

2. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на частини, відношення яких дорівнює 15 : 12. В якому відношенні висота ділить гіпотенузу?

А $3:4$; **Б** $\sqrt{3}:2$; **В** $25:144$ **Г** $2:3$; **Д** $1:2$.

3. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а один з катетів 6 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини більшого гострого кута.

А $\left(5+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ см; **Б** 8 см; **В** $2\sqrt{15}$ см; **Г** $4\sqrt{2}$ см; **Д** $3\sqrt{5}$ см.

4. У трикутнику ABC: $AB = BC$; BB' і CC' — висоти трикутника. Знайдіть $\frac{CC'}{BB'}$, якщо $\angle A = 15°$.

А 2; Б $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **В** $\sqrt{1+\sqrt{3}}$; **Г** $\sqrt{3}$; **Д** $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}$.

5. У рівнобедреному тупокутному трикутнику точка перетину серединних перпендикулярів віддалена від основи на 7. Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина описаного навколо нього кола дорівнює 50π.

А $7\sqrt{2}+75$; **Б** 120; **В** $63\sqrt{2}$; **Г** 100; **Д** 108.

6. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо довжина його висоти, проведеної до бічної сторони, дорівнює 12 см, а довжина основи — 15 см.

А 75 см^2; **Б** 60 см^2; **В** 96 см^2; **Г** $\sqrt{193}$ см^2; **Д** 120 см^2.

7. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = BC = 10$, $BD = 8$ — висота. Знайдіть площу трикутника PBQ, де P і Q — основи висот трикутника ABC, проведених до бічних сторін трикутника.

А 1; Б $3\frac{477}{625}$; **В** $\frac{24}{25}$; **Г** $\frac{32\sqrt{3}}{125}$; **Д** $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

8. У правильний трикутник уписано коло, а в це коло — другий правильний трикутник, у другий правильний трикутник — друге коло і т. ін. У скільки разів площа четвертого трикутника менша за площу початкового?

А 4; **Б** 64; **В** 16; **Г** 24; **Д** 12.

9. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус вписаного кола — 2 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

А $\sqrt{15}$; **Б** 12; **В** 5; **Г** 4; **Д** 6.

10. Сторони трикутника 5, 6 і 8. Знайдіть відношення відрізків, на які бісектриса більшого кута цього трикутника розділена центром кола, вписаного в трикутник.

А $\frac{5}{3}$; **Б** $\frac{4}{5}$; **В** $\frac{6}{13}$; **Г** $\frac{11}{8}$; **Д** інша відповідь.

1.6. Задачі для самостійної роботи

Рівень I

1. Висота правильного трикутника дорівнює $12\sqrt{3}$ см. Обчисліть периметр трикутника.
Відповідь: 72 см.

2. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см, а бісектриса кута, протилежного основі, — 12 см. Обчисліть периметр трикутника.
Відповідь: 36 см.

3. У рівнобедреному трикутнику кут, утворений бісектрисою, проведеною з вершини кута при основі, і висотою, проведеною до бічної сторони з цієї вершини, дорівнює 30°. Обчисліть кути трикутника.
Відповідь: $80^{\circ}; 80^{\circ}; 20^{\circ}$.

4. У рівнобедреному трикутнику висота, яка опущена на бічну сторону, ділить її на два відрізки 18 і 7 см, починаючи від вершини кута при основі. Обчисліть периметр трикутника.
Відповідь: 80 см.

5. На більшому катеті трикутника як на діаметрі побудовано півколо. Знайдіть його довжину, якщо довжина меншого катета дорівнює 6 см, а хорда, що з'єднує вершину прямого кута з точкою перетину гіпотенузи і півкола — 4 см.
Відповідь: $\dfrac{12\sqrt{5}}{5}\pi$ см.

6. Середина бічної сторони рівнобедреного трикутника віддалена від основи на 9 см. Основа його дорівнює 16 см. Обчисліть відстань від точки перетину медіан до вершини кута при основі.
Відповідь: 10 см.

7. У рівнобедреному трикутнику $ABC\,(AC = AB)$ відношення висоти AD до основи BC дорівнює $\sqrt{3}$. Точку M узято на стороні AB так, що $AM = \dfrac{1}{3}AB$. Знайдіть величину $\angle MCB$.
Відповідь: $\angle MCB = 60^{\circ}$.

8. Дано трикутник ABC, у якому кут B тупий. Побудовано коло, що дотикається сторін AB і BC та має центр O на стороні AC. Знайдіть відношення $AO:OC$, якщо $AB=20$, $BC=30$.

Відповідь: $AO:OC=2:3$.

9. У трикутнику ABC $AB=BC=12$. Перпендикуляр, проведений до бічної сторони BC через її середину, перетинає основу AC у точці E. Точку E з'єднано з вершиною B. Периметр трикутника ABE дорівнює 26. Знайдіть основу AC трикутника ABC.

Відповідь: 14.

10. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 6 і 10. У трикутник вписано круг. Визначить довжину кола, що обмежує його, і площу частини трикутника, розміщеної поза кругом.

Відповідь: 4π — довжина кола;

$24-4\pi$ — площа частини трикутника поза кругом.

11. У трикутнику ABC сторони дорівнюють $AB=\sqrt{17}$, $BC=4$ $CA=5$. На стороні BC взято точку D так, що $BD=1$. Знайдіть кут ADB.

Відповідь: 90°.

12. Знайдіть відстань між центрами вписаного й описаного кіл навколо прямокутного трикутника з катетами 3 і 4.

Відповідь: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

13. У прямокутний трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює 1 см. Периметр трикутника дорівнює 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

Відповідь: $2\frac{1}{2}$; 6; $6\frac{1}{2}$.

14. Знайдіть кути трикутника, в якому медіана, бісектриса і висота, що виходять з однієї вершини трикутника, ділять відповідний кут на чотири рівні частини.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{8}$.

15. У трикутнику ABC сторона AC дорівнює 26, а медіани, які проведені з вершин A і C, — відповідно 36 і 15. Знайдіть третю медіану.

Відповідь: 39.

Рівень II

1. Гіпотенуза KM прямокутного трикутника KMP є хордою кола радіусом $\sqrt{7}$. Вершина P лежить на діаметрі, який паралельний гіпотенузі. Відстань від центра кола до гіпотенузи дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть гострі кути трикутника KMP.

Відповідь: $\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}$.

2. У трикутнику ABC довжина сторони BC дорівнює 9. У цей трикутник вписано коло, яке дотикається до сторони BC у точці D. Відомо, що довжина відрізка AD дорівнює довжині відрізка DC, а косинус кута BCA — $\frac{2}{3}$. Знайдіть довжину сторони AC.

Відповідь: 4.

3. У трикутнику ABC зі сторонами $a = 14$ см, $b = 15$ см, $c = 13$ см. Знайдіть відстань від точки перетину висот до вершини A.

Відповідь: $\frac{33}{4}$ см.

4. Знайдіть радіус кола, яке дотикається до трьох кіл, що дотикаються попарно зовні і мають радіуси 1, 2, 3.

Відповідь: 6.

Указівка. Трикутник з вершинами в центрах цих кругів має сторони 3, 4 і 5.

5. BD — бісектриса трикутника ABC, $AD = a$, $DC = b$. Із середини відрізка BD проведено перпендикуляр до перетину з продовженням сторони AC у точці M. Обчисліть відрізок MD.

Відповідь: $MD = \frac{ab}{|b - a|}$.

Указівка. Треба провести бісектрису зовнішнього кута B і використати співвідношення $AD:DC = AN:CN$ (N — точка перетину цієї бісектриси з продовженням сторони AC).

6. У прямокутному трикутнику бісектриса і медіана, які проведені з вершини прямого кута, ділять протилежну сторону на частини, що становлять арифметичну прогресію. Знайдіть відношення катетів цього трикутника.

Відповідь: катети трикутника відносяться, як $5:1$.

7. У коло радіусом R вписано рівнобедрений трикутник, сума довжин висоти і основи якого дорівнює діаметру кола. Визначте висоту.

Відповідь: $\frac{2R}{5}$.

8. Відомо, що медіани AA_1 і CC_1 трикутника ABC утворюють із стороною AC кути, сума яких дорівнює $60°$, і що $AA_1 \cdot CC_1 = \sqrt{3}$. Обчисліть площу трикутника ABC.

Відповідь: 1.

9. Обчисліть площу трикутника, медіани якого дорівнюють m_a, m_b, m_c.

Відповідь:

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(m_a + m_b + m_c)(m_a + m_b - m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)}.$$

Указівка. Продовжить одну з медіан за основу трикутника на відрізок, що дорівнює $1/3$ медіани.

10. У трикутнику ABC медіани, проведені до сторін AC і BC, перетинаються під прямим кутом. Довжина сторони AC дорівнює b, довжина $BC = a$. Знайдіть довжину AB.

Відповідь: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

2. БАГАТОКУТНИКИ

2.1. Теоретичні відомості

$AB = a,\ \ BC = b,\ \ CD = c,\ AD = d$ — сторони (рис. 2.1).

$\angle BAD = \alpha,\ \ \angle ABC = \beta,\ \ \angle BCD = \gamma,$ $\angle CDA = \delta$ — внутрішні кути.

$AC = k,\ BD = l$ — діагоналі.

φ — кут між діагоналями.

h — висота.

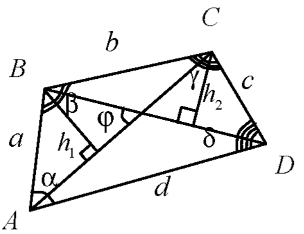


Рис. 2.1

$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ — півпериметр.

R, r — радіуси описаного і вписаного кіл.

S — площа.

Чотирикутник опуклий

1. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

2. $S = \frac{1}{2} k\, l \sin\varphi$. Доведення наведено в підрозділі 2.2. Задача 16.

3. $S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)l.$ Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 1.

У будь-якому опуклому чотирикутнику середини сторін є вершинами паралелограма, площа якого $S_1 = \frac{S}{2}$.

Чотирикутник вписаний

$\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma, \angle D = \delta.$

1. $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$ (рис. 2.2).

2. $\begin{cases} \angle 1 = \angle 2; \\ \angle 3 = \angle 4; \\ \angle 5 = \angle 6; \\ \angle 7 = \angle 8; \end{cases}$

3. $\Delta APB \sim \Delta CPD$, $\Delta BPC \sim \Delta APD$ / Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 1.

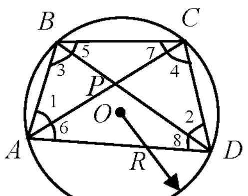


Рис. 2.2

4. Залежності між діагоналями і сторонами:

а) $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{AP}{DP}=\dfrac{BP}{CP}$, $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{BP}{AP}=\dfrac{CP}{DP}$;

б) теорема Птолемея $kl=ac+bd$. Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 1;

в) $l^2=\dfrac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)$; $k^2=\dfrac{ab+cd}{bc+ad}(ac+bd)$.

Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 1.

Чотирикутник описаний

1. В опуклий чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $a+c=b+d$ (рис. 2.3).

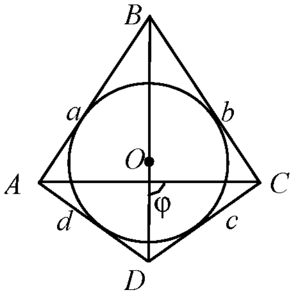


Рис. 2.3

2. $S=pr=\dfrac{1}{2}kl\sin\varphi$, де $BD=k$, $AC=l$.

3. $r=\dfrac{S}{p}\le\dfrac{1}{4}(a+c)$, (знак «=», якщо $k\perp l$).

4. Якщо чотирикутник одночасно вписано й описано, тоді $S=\sqrt{abcd}$.

Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 5.

Трапеція

$AD=d$, $BC=b$ — основи;
$AD \parallel BC$ (рис. 2.4).

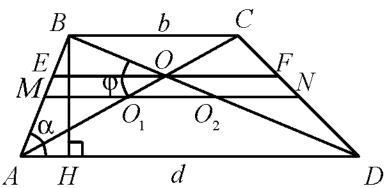


Рис. 2.4

$AB=a$, $CD=c$ — бічні сторони, $BH=h$ — висота, $m=MN$ — середня лінія, $f=O_1O_2$ — довжина відрізка, який з’єднує середини діагоналей.

1. $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$, $MN = m = \dfrac{BC + AD}{2}$.

2. $O_1O_2 = \dfrac{AD - BC}{2}$.

3. а) $EF \parallel AD$ і проходить через точку перетину діагоналей. $EF = \dfrac{2BC \cdot AD}{BC + AD}$. Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 2;

б) $k^2 + l^2 = a^2 + c^2 + 2bd$. Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 6.

4. $S = mh = \dfrac{b+d}{2}h = \dfrac{1}{2}kl\sin\varphi$; $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ACD}$; $S_{\Delta BDC} = S_{\Delta BAC}$; $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$.

5. Рівнобічна трапеція $(a = c)$:

а) $k = l$, $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$;

б) $h = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{d-b}{2}\right)^2}$;

в) $k^2 = bd + a^2$ випливає з 3. б) якщо $a = c$.

6. У трапецію можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли $b + d = a + c$.

7. Якщо в рівнобічну трапецію ($a = c$) можна вписати коло, тоді $a = m$ і $h = \sqrt{db}$. Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 3.

8. Трапецію можна вписати в коло тоді і тільки тоді, коли вона рівнобічна.

9. Якщо трапеція рівнобічна і її діагоналі взаємно перпендикулярні (рис. 2.5), тоді $S = h^2$. Доведення наведено в підрозділі 2.4. Задача 4.

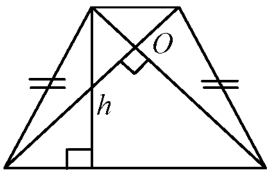


Рис. 2.5

Паралелограм

1. $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$; $AB = CD = a$; $BC = AD = b$. (рис. 2.6).

2. $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$;

3. $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180^\circ$.

4. Діагоналі (k і l) паралелограма:

а) у точці перетину діляться навпіл;

б) $k^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$; $l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

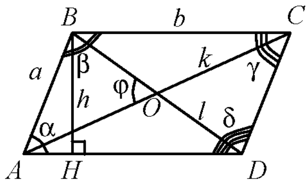


Рис. 2.6

в) $k^2 + l^2 = 2(a^2 + b^2)$;

5. $h = a\sin\alpha$.

6. $S = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}kl\sin\varphi$.

7. У паралелограм можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли він є ромбом.

8. Паралелограм можна вписати в коло тоді і тільки тоді, коли він є прямокутником.

Ромб

1. $a = b = c = d$; $BC \parallel AD$; $CD \parallel AB$; $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ (рис. 2.7).
2. $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

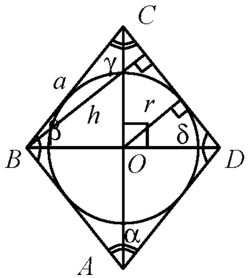


Рис. 2.7

3. Діагоналі ромба ($BD = l$, $AC = k$):

а) $k \perp l$; $CO = OA$; $BO = OD$;

б) $k = 2a\cos\frac{\alpha}{2} = 2a\sin\frac{\beta}{2}$;

$l = 2a\sin\frac{\alpha}{2} = 2a\cos\frac{\beta}{2}$;

в) $k^2 + l^2 = 4a^2$.

4. $r = \frac{1}{2}a\sin\alpha = \frac{1}{2}h$.

5. $S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}kl = \frac{4r^2}{\sin\alpha}$.

Прямокутник

1. $a \parallel c$, $b \parallel d$, $a = c$, $b = d$ (рис. 2.8).

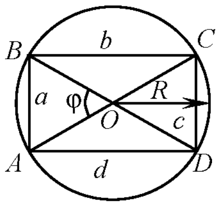


Рис. 2.8

2. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$.
3. $k = l$; $k^2 = a^2 + b^2$.
4. $R = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.
5. $S = ab = \frac{1}{2}k^2\sin\varphi$.

Квадрат

1. $a = b = c = d$ (рис. 2.9).
2. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$.

3. $k = l = a\sqrt{2}$; $k \perp l$; $\varphi = 90°$.

4. $R = \frac{1}{2}k = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

5. $r = \frac{1}{2}a$.

6. $S = a^2 = \frac{1}{2}k^2$.

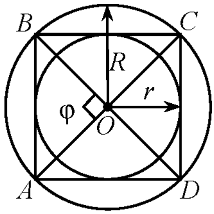


Рис. 2.9

Багатокутник опуклий

1. Сума (Σ) внутрішніх кутів: $\Sigma = 180°(n-2)$, де n — кількість сторін багатокутника (рис. 2.10).

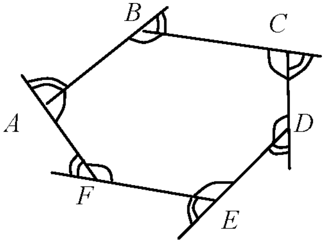


Рис. 2.10

2. Сума зовнішніх кутів опуклого багатокутника дорівнює $360°$.

Багатокутник правильний

$a = AB = BC = CD = \ldots$ — сторони (рис. 2.11).

α і β — внутрішній і зовнішній кути.

n — кількість сторін.

R і r — радіуси описаного і вписаного кіл.

$P = an$ — периметр.

$h = OE$ — апофема.

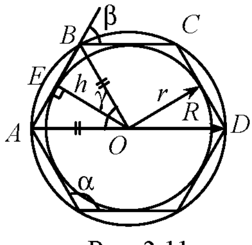


Рис. 2.11

1. $\alpha = \frac{1}{n}(n-2)180° = 180° - \beta$;

$\beta = \gamma = \frac{1}{n}360°$.

2. $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R\sin\frac{\gamma}{2} = 2r\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 2R\sin\frac{\pi}{n} = r\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

3. $R=\sqrt{r^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$; $r=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}}$.

4. $S=\frac{an}{2}\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}r\rho=\frac{1}{2}R^2 n\sin\gamma=r^2 n\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$.

5. $h=r$.

Окремі випадки правильних багатокутників

n	R	r	S
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

2.2. Зразки розв'язування задач

Задача 1. Опуклий чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC є бісектрисою кута BAD і перетинається з діагоналлю BD у точці K. Знайти довжину відрізка KC, якщо довжина відрізка AK дорівнює 6, а довжина відрізка BC — 4.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — чотирикутник (рис. 2.12).

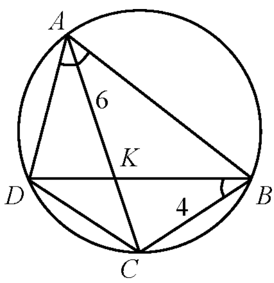


Рис. 2.12

Розглянемо трикутники ABC і KBC. Вони мають спільний кут ACB і $\angle BAC = \angle CAD$.

За умовою задачі $\angle CAD$ і $\angle CBD$ вписані і спираються на спільну дугу CD, тому $\angle BAC=\angle CAD=\angle CBD$. Отже, трикутники ABC і KBC мають по два рівні кути. Із цього випливає, що вони подібні і тому

$$\frac{BC}{KC}=\frac{AC}{BC},\ KC\cdot AC=BC^2.$$

Позначимо KC через x і, враховуючи, що $AC = AK + KC = 6 + x$, отримаємо квадратне рівняння

$$x(6+x)=16;$$
$$x^2+6x-16=0;$$
$$\left[\begin{aligned} &x=2; \\ &x=-8<0, \end{aligned}\right.$$

Отже, $KC = 2$.

Відповідь: 2.

Задача 2. У трапеції $ABCD$ основи $AD = 8$ і $BC = 4$. На продовженні сторони BC взято таку точку M, що пряма AM відтинає від трапеції трикутник, площа якого в чотири рази менша за площу трапеції. Знайдіть довжину відрізка CM.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.13). Позначимо точку перетину прямої AM зі стороною CD через N. Нехай h — висота трикутника AND, а H — висота трапеції $ABCD$.

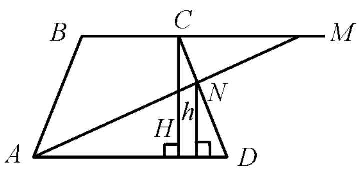


Рис. 2.13

Площа трапеції $S = \frac{8+4}{2}H = 6H$,

площа трикутника AND $S = \frac{1}{2}8h = 4h$.

За умовою задачі $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{4}$, тоді $6H = 16h$, звідки $\frac{H}{h} = \frac{8}{3}$.

Трикутники AND і MNC подібні за двома кутами ($\angle MCN = \angle ADN$, $\angle AND = \angle CNM$). Із подібності трикутників отримаємо, що $\frac{AD}{h} = \frac{CM}{H-h}$; $CM = AD \cdot \frac{H-h}{h} = 8\left(\frac{H}{h} - 1\right) = \frac{40}{3}$.

Відповідь: $\frac{40}{3}$.

Задача 3. Діагональ BD чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо цього чотирикутника. Обчисліть довжину діагоналі AC, якщо $BD = 2$, $AB = 1$, $\angle ABD : \angle DBC = 4:3$.

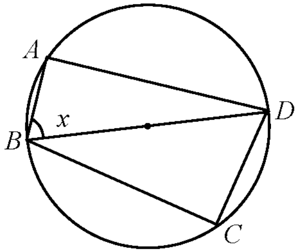


Рис. 2.14

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — чотирикутник (рис. 2.14). Оскільки BD — діаметр кола, тоді $\angle BAD = \angle BCD = \frac{\pi}{2}$.

Позначимо $\angle ABD$ через x; тоді з прямокутного трикутника ABD (рис. 2.14) отримаємо $\cos x = \frac{AB}{BD}$; $\cos x = \frac{1}{2}$. Кут x — внутрішній кут трикутника ABD, то $x = \frac{\pi}{3}$. Тоді $\angle DBC = \frac{3}{4}\angle ABD = \frac{\pi}{4}$. Вписані кути ACD і ABD спираються на спільну дугу AED, отже, $\angle ACD = \angle ABD = \frac{\pi}{3}$. Із трикутника ADC за теоремою синусів $\frac{AC}{\sin\angle ADC} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}$, звідки $AC = \frac{AD\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}$. Оскільки $AD = AB\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ і $\angle ADC = \pi - (\angle ABD + \angle DBC) = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, то

$$AC = \frac{\sqrt{3}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right).$$

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$.

Задача 4. У трапецію $ABCD$ з основами BC і AD та бічними сторонами AB і CD уписано коло з центром O. Обчисліть площу трапеції, якщо кут DAB прямий, $OC = 2$ і $OD = 4$.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.15).

Позначимо через M точку дотику кола зі стороною CD. З'єднаймо точки C і D з центром кола, отримаємо трикутник COD. Оскільки точка O рівновіддалена від прямих BC і CD, то CO —

бісектриса кута BCD і $\angle OCD = \frac{1}{2}\angle BCD$.

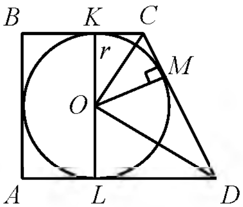


Рис. 2.15

Аналогічно $\angle ODC = \frac{1}{2}\angle ADC$. Оскільки $BC \parallel AD$, то $\angle BCD + \angle ADC = \pi$, отже, $\angle OCD + \angle ODC = \frac{\pi}{2}$, тоді $\angle COD = \frac{\pi}{2}$, тобто трикутник COD — прямокутний. За теоремою Піфагора

$$CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = 2\sqrt{5}.$$

Оскільки $CD \perp OM$, то трикутник DMO прямокутний і подібний трикутнику DOC (за двома кутами). Із подібності трикутників випливає $\frac{CD}{OD} = \frac{OC}{OM}$. Звідси $OM = \frac{OD \cdot OC}{CD} = \frac{4}{\sqrt{5}}$. Через точку O проведемо пряму, що перпендикулярна до BC, тоді вона перпендикулярна і до прямої AD. Такий перпендикуляр єдиний, отже, точки перетину K і L зі сторонами BC і AD є точками дотику кола з основами трапеції

$$KL = 2OM = \frac{8}{\sqrt{5}} \text{ і } AB = KL = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Оскільки в чотирикутник $ABCD$ вписано коло, то виконується умова $BC + AD = AB + CD = \frac{8}{\sqrt{5}} + 2\sqrt{5} = \frac{18}{\sqrt{5}}$, звідки

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD)AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{5}} \cdot \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{72}{5}.$$

Відповідь: $\frac{72}{5}$.

Задача 5. Діагоналі рівнобічної трапеції ділять її на чотири трикутники. Обчисліть площу трапеції, якщо площі трикутників, які прилягають до основ, дорівнюють S_1 і S_2.

Розв'язання. Розглянемо трапецію $ABCD$ (рис. 2.16), де $S_{\Delta AOD} = S_1$, $S_{\Delta BOC} = S_2$.

Нехай $S_{\Delta COD} = S_3$, $S_{\Delta AOB} = S_4$, $\angle BOA = \alpha$.

Тоді $S_3 = \frac{1}{2} OC \cdot OD \sin\alpha$; $S_4 = \frac{1}{2} BO \cdot OA \sin\alpha$;

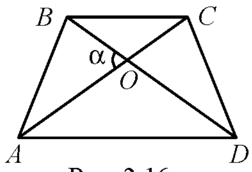


Рис. 2.16

$$S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot OD \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2} AO \cdot OD \sin\alpha;$$

$$S_2 = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin\alpha.$$

Складемо відношення $\frac{S_1}{S_3} = \frac{AO}{OC}$; $\frac{S_4}{S_2} = \frac{AO}{OC}$,

або $\frac{S_1}{S_3} = \frac{S_4}{S_2} \Rightarrow S_3 S_4 = S_1 S_2$.

Оскільки трикутники BOC і AOD подібні за двома кутами, то:

$$\frac{BO}{OD} = \frac{CO}{AO};$$

$$BO \cdot AO = CO \cdot OD; \qquad (1)$$

$$S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} BO \cdot AO \sin\alpha;$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2} CO \cdot OD \sin\alpha.$$

Ураховуючи рівність (1) $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COD}$; $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1 S_2}$, а

$$S_{ABCD} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2.$$

Відповідь: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Задача 6. У трапеції середня лінія дорівнює 7, висота $\frac{15\sqrt{3}}{7}$, а кут між діагоналями дорівнює $120°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.17);

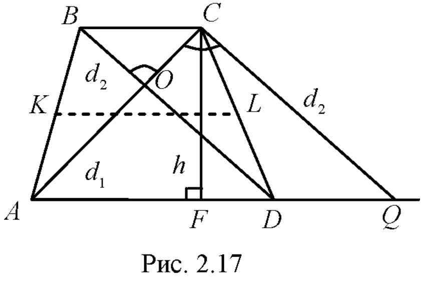


Рис. 2.17

$\angle BOC = 120°$, $KL = 7$, $CF = \dfrac{15\sqrt{3}}{7}$. Проведемо $CQ \parallel BD$ та розглянемо трикутник ACQ. $\angle ACQ = 120°$; $AC = d_1$; $CQ = BD = d_2$.

$$S_{ABCD} = KL \cdot CF = \frac{15\sqrt{3}}{7} 7 = 15\sqrt{3}.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1\ d_2 \sin 120° = \frac{1}{4} d_1 d_2 \sqrt{3}.$$

$$d_1 d_2 = \frac{15\sqrt{3}}{\frac{1}{4}\sqrt{3}} = 60.$$

За теоремою косинусів:

$AQ^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos 120°$;

$d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos 120° = 4KL^2$;

$d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 = 196$;

$d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2 = 196 + d_1 d_2$;

$(d_1 + d_2)^2 = 196 + 60$;

$d_1 + d_2 = \sqrt{256} \quad (d_1 + d_2 > 0)$;

$d_1 + d_2 = 16$;

$$\begin{cases} d_1 d_2 = 60; \\ d_1 + d_2 = 16. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, маємо $d_1 = 6$, $d_2 = 10$.

Відповідь: 6; 10.

Задача 7. Бісектриса гострого кута рівнобедреної трапеції ділить бічну сторону на відрізки 20 та 30, відраховуючи від меншої основи трапеції, яка дорівнює 6. Визначіть площу трапеції.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.18); $\angle BAE = \angle EAD$; $CE = 20$, $ED = 30$, $BC = 6$.

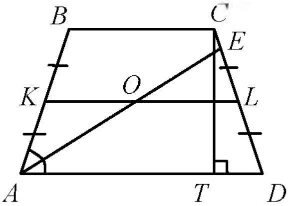


Рис. 2.18

Проведемо середню лінію трапеції KL і висоту CT, тоді

$CD = CE + ED = 20 + 30 = 50$;

$CL = LD = 25$;

$EL = CL - CE = 25 - 20 = 5$.

Бісектриса AE ділить середню лінію на відрізки KO і OL.

Нехай $OL = x$. Із подібності трикутників OEL і AED випливає

$$\frac{EL}{ED} = \frac{x}{AD};\ \frac{5}{30} = \frac{x}{AD};\ AD = 6x;$$

$$KL = \frac{AD + BC}{2} = \frac{6x + 6}{2} = 3x + 3.$$

Трикутник KAO — рівнобедрений, оскільки $\angle OAD = \angle KOA$, як внутрішні різносторонні кути, утворені відрізком AE, який перетинає паралельні відрізки AD та KL. Оскільки $\angle OAD = \angle KAO$, тоді $\angle KAO = \angle KOA$; $AK = KO = 25$; $KL = 25 + x$. Маємо рівняння $3x + 3 = 25 + x$; $x = 11$. $KL = 36$; $AD = 6x = 66$.

$$TD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{6x - 6}{2} = (66 - 6)\cdot\frac{1}{2} = 30.$$

За теоремою Піфагора з трикутника $CTD(\angle T = 90^\circ)$ маємо

$CT^2 = CD^2 - TD^2$; $CT^2 = 50^2 - 30^2 = 40^2$; $CT = 40$;

$S_{ABCD} = KL \cdot CT = 36 \cdot 40 = 1440$.

Відповідь: 1440.

Задача 8. Обчисліть площу круга, вписаного в рівнобічну трапецію, якщо її більша основа дорівнює a, а кут при меншій основі — 120°.

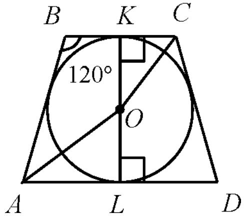


Рис. 2.19

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.19), $AD = a$, $AB = CD$, $\angle ABC = 120^\circ$. Оскільки $\angle ABC = 120^\circ$, то $\angle BAL = 60^\circ$, $\angle OAL = \frac{1}{2}\angle BAL = 30^\circ$.

Нехай $OL = r$, тоді $AO = 2r$.

За теоремою Піфагора в трикутнику AOL $(\angle L = 90^\circ)$:

$$AL^2 + OL^2 = AO^2;\ \frac{a^2}{4} + r^2 = 4r^2;\ r^2 = \frac{a^2}{12};\ r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$S_{кр} = \pi r^2,\ \text{тоді}\ S = \pi OL^2 = \pi\frac{3a^2}{12} = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{12}$.

Задача 9. У трапеції, площа якої дорівнює 594 м^2, висота — 22 м. Різниця паралельних сторін дорівнює 6 м. Знайдіть довжину кожної з паралельних сторін.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.20); $S_{ABCD} = 594$ м^2, $AD - BC = 6$ м, $BF = CK = 22$ м.

Позначимо: $AD = a$, $BC = b$.

Використаємо формулу $S = \frac{a+b}{2} h$;

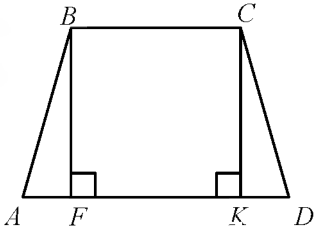


Рис. 2.20

$\frac{a+b}{2} \cdot 22 = 594$; $a + b = 54$. За умовою задачі $a - b = 6$.

Складемо і розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} a + b = 54; \\ a - b = 6. \end{cases}$

Звідси $a = 30$; $b = 24$. Отже, $AD = 30$ м; $BC = 24$ м.

Відповідь: 30 м; 24 м.

Задача 10. У ромб вписано коло, радіус якого дорівнює R. Обчисліть площу ромба, якщо його більша діагональ у чотири рази більша за радіус вписаного кола.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — ромб (рис. 2.21); $AB = BC = CD = AD$, $OK = R$, $BD \perp AC$, $AC = 4R$.

Проведемо радіус у точку дотику. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні і, перетинаючись, діляться навпіл, то з урахуванням умови $AO = 2R$. Тоді у прямокутному трикутнику AKO маємо $KO = \frac{1}{2} AO$, отже, $\angle BAO = 30°$, $\angle BAD = 60°$;

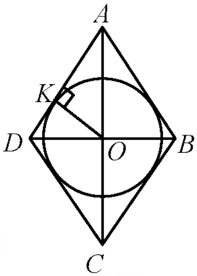


Рис. 2.21

$$\angle ABD = \angle ADB = \angle BAD = 60° \Rightarrow AB = BD = AD.$$

Позначимо сторону BO в трикутнику ABO через x, тоді $AB = 2x$.

За теоремою Піфагора: $AO^2 + BO^2 = AB^2$, $4R^2 + x^2 = 4x^2$;

$x^2 = \frac{4R^2}{3}$; $x = \frac{2R}{\sqrt{3}}$; $BD = 2x = \frac{4R}{\sqrt{3}}$.

Використовуємо формулу $S=\frac{1}{2}d_1d_2$.

Тоді $S_{ABCD}=\frac{1}{2}4R\frac{4R}{\sqrt{3}}=\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$.

Відповідь: $\frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 11. Обчисліть площу рівнобедреної трапеції, якщо її висота h, а бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом α.

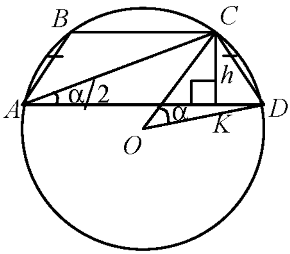


Рис. 2.22

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.22). $AD \parallel BC$; O — центр описаного кола, $AB=CD$, $\angle COD=\alpha$. $CK=h$ — висота трапеції. Центральний кут COD дорівнює α, кут CAD — вписаний і спирається на дугу CD, отже, $\angle CAD=\frac{\alpha}{2}$. Із трикутника ACK $(\angle K=90°)$ випливає $AK=h\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Ураховуючи співвідношення $AK=AD-\frac{AD-BC}{2}=\frac{AD+BC}{2}$, отримуємо $S=\frac{AD+BC}{2}h$; $S=AKh$; $S=h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Відповідь: $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Задача 12. Середини сторін правильного n-кутника з'єднані прямими, які утворюють новий n-кутник, вписаний у даний. Знайдіть відношення їх площ.

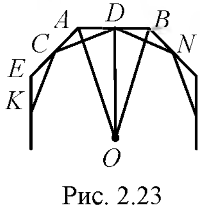


Рис. 2.23

Розв'язання. Нехай $AB...E$ і $CDN...K$ — n-кутники (рис. 2.23). Правильні однойменні багатокутники подібні, тому площі їх (S_1 — площа вписаного багатокутника, S_2 — площа описаного) відносяться, як квадрати радіусів $S_1 : S_2 = OD^2 : OA^2$; OD і OA — радіуси кіл, описаних навколо n-кутників.

Із трикутника $OAD(\angle D = 90°)$ маємо:

$\dfrac{OD}{OA} = \cos\angle DOA = \cos\dfrac{180°}{n}$. Тоді $S_1 : S_2 = \cos^2\dfrac{180°}{n}$.

В і д п о в і д ь: $S_1 : S_2 = \cos^2\dfrac{180°}{n}$.

Задача 13. Обчисліть кути паралелограма, якщо відомі дві його висоти h_1 і h_2 і периметр $2p$ (рис. 2.24).

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм; $BM = h_1$, $BN = h_2$ — висоти паралелограма. Позначимо: $\angle A = \alpha$.

Тоді $h_1 = AB\sin\alpha$, $h_2 = BC\sin\alpha$.

Звідси

$h_1 + h_2 = (AB + BC)\sin\alpha = p\sin\alpha$;

$\sin\alpha = \dfrac{h_1 + h_2}{p}$.

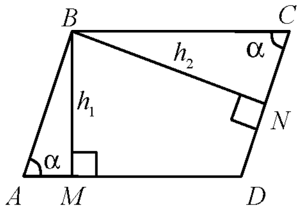


Рис. 2.24

Якщо α — гострий кут, то $\alpha = \arcsin\dfrac{h_1 + h_2}{p}$, а якщо α — тупий кут паралелограма, то $\alpha = \pi - \arcsin\dfrac{h_1 + h_2}{p}$.

В і д п о в і д ь: Один із кутів дорівнює $\arcsin\dfrac{h_1 + h_2}{p}$, другий $\pi - \arcsin\dfrac{h_1 + h_2}{p}$.

Задача 14. Кожна з бічних сторін і менша основа трапеції дорівнюють a, гострі кути — α. Обчисліть площу трапеції і радіус описаного кола.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — трапеція, вписана в коло (рис. 2.25); $BC \parallel AD$; $AB = CD = BC = a$, $\angle BAD = \angle CDA = \alpha$.

$\cup AB = \cup BC = \cup CD$. $\angle BAD$ — вписаний в коло. $\angle BAD = \dfrac{1}{2}(\cup BC + \cup CD)$. Звідси $\cup BCD = 2\alpha$, тоді $\cup BC = \alpha$,

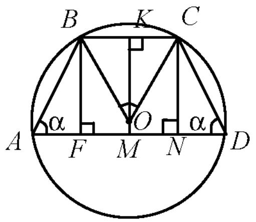


Рис. 2.25

$\angle BOC$ — центральний кут, отже, $\angle BOC = \alpha$. Із трикутника $KOC(\angle K = 90°)$:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Із трикутника $ABF(\angle F = 90°)$ маємо $AF = a\cos\alpha$, $BF = a\sin\alpha$.

Очевидно, що

$$AN = AM + MN = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC),$$

але $AN = AF + FN = a\cos\alpha + a = a(\cos\alpha + 1)$.

Таким чином, $S_{ABCD} = ANBF \ = a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$.

Відповідь: $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; $S = a^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)$.

Задача 15. У паралелограмі відношення сторін і відношення діагоналей однакові і дорівнюють 2. З вершини тупого кута A проведено висоту AE на більшу сторону CD. Знайдіть відношення довжини відрізка DE до довжини відрізка CE.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм (рис. 2.26); $AB = 2AD$, $BD = 2AC$.

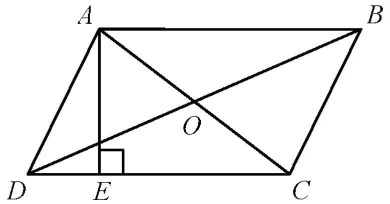


Рис. 2.26

У паралелограмі сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів усіх його сторін, тоді $5AC^2 = 10AD^2$; $AC = \sqrt{2}AD$.

Із трикутника ACD за теоремою косинусів:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2CD \cdot AD\cos\angle D; \quad AD \cdot \cos\angle D = DE;$$

$$2AD^2 = AD^2 + 4AD^2 - 4AD \cdot DE.$$

Звідси $DE = \frac{3}{4}AD$; $EC = CD - DE = 2AD - \frac{3}{4}AD = \frac{5}{4}AD$.

$\frac{DE}{CE} = \frac{3}{5}$.

Відповідь: $\frac{3}{5}$.

Задача 16. Доведіть, що площа довільного чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

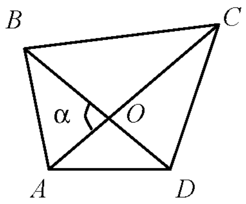


Рис. 2.27

Доведення. Нехай $ABCD$ довільний чотирикутник (рис. 2.27).

Діагоналі AC і BD ділять чотирикутник $ABCD$ на чотири трикутника: AOB, BOC, COD і AOD.

Тому $S_{\Delta ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD}$.

Нехай $\angle AOB = \alpha$.

Маємо: $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BO \sin\alpha$;

$$S_{\Delta BOC} = \frac{1}{2}BO \cdot OC \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}BO \cdot CO \sin\alpha;$$

$$S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}CO \cdot DO \sin\alpha;$$

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot DO \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}AO \cdot DO \sin\alpha.$$

Додамо праві й ліві частини цих рівностей, дістанемо:

$$S_{\Delta ABCD} = \frac{1}{2}\big((AO + CO)DO + (AO + CO)BO\big)\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\big((AO + CO)(DO + BO)\big)\sin\alpha.$$

Урахувавши, що $AO + CO = AC$, $DO + BO = BD$, матимемо:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha.$$

2.3. *Доведення деяких теорем і формул*

Задача 1. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Доведіть, що:

1. $\Delta APB \sim \Delta CPD$, $\Delta PBC \sim \Delta APD$;

P — точка перетину діагоналей.

2. $S = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)l$.

3. $l^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd)$;

$k^2 = \frac{ab+cd}{ad+bc}(ac+bd)$.

4. $\frac{l}{k} = \frac{ad+cb}{ab+cd}$.

5. $kl = ac+bd$ (теорема Птолемея).

Доведення. Нехай $ABCD$ — чотирикутник, вписаний у коло (рис. 2.28); $AC = l$, $BD = k$ — діагоналі чотирикутника, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$; h_1 і h_2 — висоти, проведені до діагоналі AC із вершин B і D.

1. Доведемо, що $\Delta APB \sim \Delta CPD$.

$$\left.\begin{aligned} \angle BAC = \angle CDB = \frac{1}{2} \cup BC \\ \angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2} \cup AD \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta APB \sim \Delta CPD \text{ за двома кутами.}$$

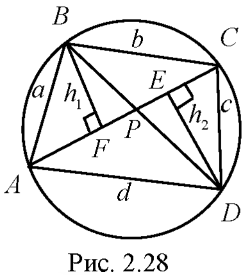


Рис. 2.28

Аналогічно можна довести, що $\Delta PBC \sim \Delta APD$.

Проведемо $DE \perp AC$, $DE = h_2$, $AC = l$.

2. $BF \perp AC$, $BF = h_1$;

$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ADC}$;

$S = \frac{1}{2}h_1 l + \frac{1}{2}h_2 l = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)l$.

3. Розглянемо трикутники ABD і BCD. За теоремою косинусів

$k^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\angle BAD$, звідки

$$\cos\angle BAD = \frac{a^2 + d^2 - k^2}{2ad}. \quad (1)$$

Із трикутника BCD

$$k^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle BAD .$$

Підставимо замість $\cos\angle BAD$ із виразу (1):

$$k^2 = b^2 + c^2 + 2bc\frac{a^2 + d^2 - k^2}{2ad} .$$

Звідси $k^2ad = b^2ad + c^2ad + bca^2 + bcd^2 - bck^2$;

$$k^2(ad+bc) = ac(cd+ba) + bd(cd+ba);$$

$$k^2(ad+bc) = (ab+cd)(ac+bd);$$

$$k^2 = \frac{ab+cd}{ad+bc}(ac+bd). \qquad (2)$$

Аналогічно можна довести, що

$$l^2 = \frac{ad+bc}{ab+cd}(ac+bd). \qquad (3)$$

4. Доведемо, що $\frac{l}{k} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$. Для цього поділимо рівність (3) на рівність (2):

$$\frac{l^2}{k^2} = \frac{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(ab+cd)}}{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}} = \frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}; \quad \frac{l}{k} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

5. Для доведення теореми Птолемея помножимо почленно рівності (2) і (3): $k^2l^2 = (ac+bd)^2$, звідки $kl = ac + bd$.

Задача 2. Доведіть, якщо через точку перетину діагоналей трапеції паралельно основам провести пряму, яка перетинає бічні сторони в точках M і N, то $MN = \frac{2ab}{a+b}$, де a і b — основи трапеції.

Доведення. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.29), $BC = a$, $AD = b$. За умовою $O \in MN$, $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$.

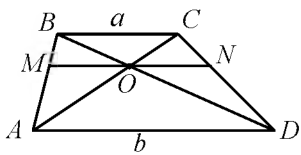


Рис. 2.29

Розглянемо декілька пар подібних трикутників: $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ за двома кутами. Тоді $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD}$; $\frac{BO}{OD} = \frac{a}{b}$;

$$OD \cdot a = b \cdot BO; \qquad (1)$$

$\Delta MBO \sim \Delta ABD$ за двома кутами.

Тоді $\dfrac{MO}{AD} = \dfrac{BO}{BD}$; $MO = \dfrac{AD \cdot BO}{BD}$; $MO = \dfrac{b \cdot BO}{BD}$. $\qquad$ (2)

Аналогічно $\Delta OND \sim \Delta BCD$. Звідки

$$ON = \frac{a \cdot OD}{BD}. \qquad (3)$$

Додамо почленно рівності (2) і (3):

$$MO + ON = \frac{b \cdot BO + a \cdot OD}{BD}.$$

Ураховуючи рівність (1), маємо

$$MO + ON = \frac{2a \cdot OD}{BD};\ MO + ON = \frac{2a \cdot OD}{BO + OD}.$$

З рівності (1) випливає $OB = \dfrac{a \cdot OD}{b}$, тоді

$$MO + ON = \frac{2a \cdot OD}{OD + \dfrac{a \cdot OD}{b}} = \frac{2a}{1 + \dfrac{a}{b}} = \frac{2ab}{a + b};\ MN = \frac{2ab}{a + b}.$$

Задача 3. Доведіть, що висота рівнобічної трапеції, в яку можна вписати коло, є середнім геометричним її основ.

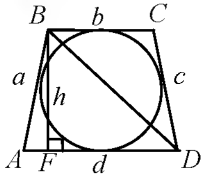


Рис. 2.30

Доведення. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція; $BC \parallel AD$, $AB = CD$ (рис. 2.30). $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. У трапецію можна вписати коло, якщо виконується умова $b + d = a + c$, оскільки $a = c$, маємо $2a = b + d$; $a = \dfrac{b + d}{2}$. Проведемо висоту BF $(BF \perp AD)$.

Тоді $AF = \dfrac{d - b}{2}$.

З прямокутного трикутника $ABF\left(\angle F = 90^\circ\right)$ випливає

$$BF^2 = AB^2 - AF^2;$$

$$h^2 = \left(\frac{d + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{d - b}{2}\right)^2 = db;\ h = \sqrt{db}.$$

Задача 4. Доведіть, що площа S рівнобічної трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти, тобто $S = h^2$.

Доведення. Нехай на рис. 2.31 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$; $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $BD \perp AC$. Віссю рівнобічної трапеції симетрії є перпендикуляр MN до її основ, який проходить через точку O перетину діагоналей.

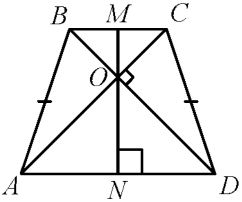


Рис. 2.31

Оскільки $\angle AOD = 90°$, то $AD = 2ON$ і $BC = 2OM$.

Отже,

$$S = \frac{AD + BC}{2} MN = (ON + OM) MN = MN \cdot MN = MN^2 = h^2;\ S = h^2.$$

Задача 5. Доведіть, що площа чотирикутника, в який можна вписати коло і навколо якого можна описати коло, дорівнює $S = \sqrt{abcd}$, де a, b, c, d — сторони чотирикутника.

Доведення. Нехай $ABCD$ — чотирикутник: $AD = a$, $AB = b$, $BC = c$, $CD = d$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$ (рис. 2.32).

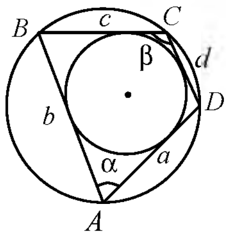


Рис. 2.32

За теоремою косинусів $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$, звідки $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\alpha + cd\cos\beta)$. Оскільки в чотирикутник можна вписати коло, то $a + c = b + d$, і тому $a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd$, звідки

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab - cd).$$

Отже, $ab - cd = ab\cos\alpha - cd\cos\beta$.

Крім того, площа чотирикутника

$$S = \frac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta).$$

Якщо навколо чотирикутника можна описати коло, то $\alpha + \beta = \pi$, тому $ab - cd = (ab + cd)\cos\alpha$ і $2S = (ab + cd)\sin\alpha$.

Звідси $(ab - cd)^2 + 4S^2 = (ab + cd)^2$, $S = \sqrt{abcd}$.

Задача 6. Доведіть, що сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів її бічних сторін, плюс подвоєний добуток основ.

Доведення. Нехай $ABCD$ — трапеція (рис. 2.33). $BC \parallel AD$.

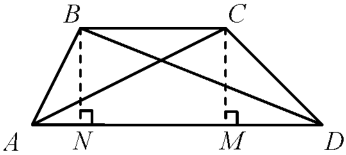


Рис. 2.33

Доведемо, що $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$. Проведемо висоти BN і CM. Тоді $NBCM$ — прямокутник, отже, $NM = BC$.

Із трикутника CMD випливає: $\cos\angle D = \dfrac{MD}{CD}$, а з трикутника ABN: $\cos\angle A = \dfrac{AN}{AB}$.

Із трикутника ACD за теоремою косинусів маємо:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\cos\angle D =$$
$$= AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD\frac{MD}{CD} =$$
$$= CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot MD.$$

Аналогічно з трикутника ABD маємо:

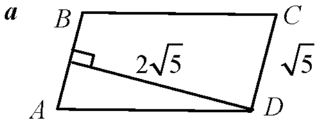
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos\angle A =$$
$$= AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\frac{AN}{AB} =$$
$$= AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AN.$$

Тоді

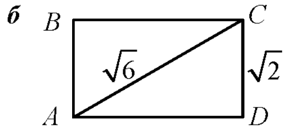
$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot MD +$$
$$+ AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AN =$$
$$= AB^2 + CD^2 + 2AD(AD - MD - AN) =$$
$$= AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot NM =$$
$$= AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC,$$ що й треба було довести.

2.4. *Тренувальні вправи в рисунках*

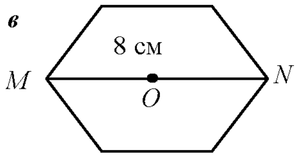
1. Обчислити площу фігури:



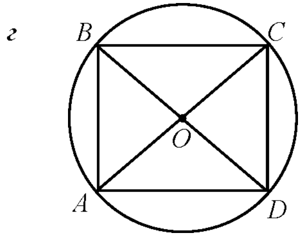
$ABCD$ — паралелограм



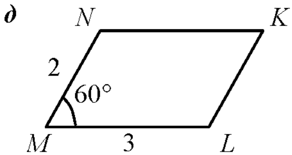
$ABCD$ — прямокутник



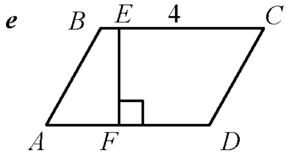
Правильний шестикутник;
$MN = 8$ см



$ABCD$ — квадрат; $OC = 5$ см

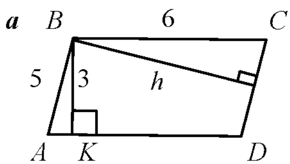


$MNKL$ — паралелограм

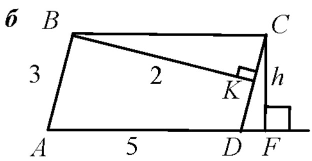


$ABCD$ — паралелограм;
$DC = 4$ см, $EF = 3$ см

2. Знайти h:

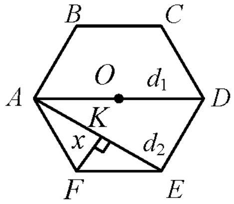


$ABCD$ — паралелограм;
$BK = 3$ см, $AB = 5$ см, $DC = 6$ см



$ABCD$ — паралелограм; $CF = h$
$AB = 3$ см, $AD = 5$ см, $BK = 2$ см

3. $ABCDEF$ – правильний шестикутник $AB = \sqrt{5}$.
Знайдіть: *а*) d_1; *б*) d_2; *в*) r; *г*) S; *д*) x.



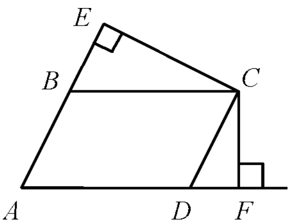
$FK = x$;
$AE = d_2$;
$AD = d_1$.

Відповіді:

1. а) 10; б) $2\sqrt{2}$; в) $24\sqrt{3}$; г) 50; д) $3\sqrt{3}$; е) 12. **2.** а) 3,6; б) 1,2. **3.** а) $2\sqrt{5}$; б) $\sqrt{15}$; в) $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$; г) $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$; д) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Обчислення деяких лінійних елементів (*h*, *r*) фігури з використанням формул площі

1

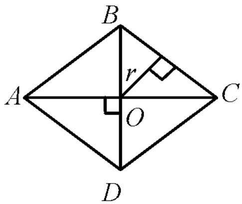


Дано:
$ABCD$ – паралелограм;
$AD = 6,\ AB = 5,\ CE \perp AB,$
$CE = 3,\ CF \perp AD.$
Знайти CF.
Розв'язання.
1) $S_{ABCD} = AD \cdot CF;$
2) $S_{ABCD} = AB \cdot CE;$
$AD \cdot CF = AB \cdot CE;$

$$CF = \frac{5 \cdot 3}{6} = 2{,}5.$$

Відповідь: $CF = 2{,}5$.

2



Дано: $ABCD$ – ромб;
$AC = 20,\ BD = 15$
Знайти r.
Розв'язання.
1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD;\ S_{ABCD} = 150;$
2) $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2};\ BC = 12{,}5;$

$$S_{ABCD} = 4S_{\Delta BOC} = 4\frac{1}{2}BCr = pr;$$

$$r = \frac{S}{p};\ r = \frac{150}{25} = 6.$$

Відповідь: $r = 6$.

2.5. Тематичне тестування

Рівень І

1. Площа прямокутника $ABCD$ дорівнює 12 см^2. O — точка перетину діагоналей AC і BD. Обчисліть площу трикутника AOB.

А 2 см^2; **Б** 3 см^2; **В** 4 см^2; **Г** 6 см^2; **Д** інша відповідь.

2. Сторони паралелограма пропорційні числам 3 і 7. Знайдіть ці сторони, якщо периметр паралелограма дорівнює 40 см^2:

А 6 см; 14 см; **Б** 12 см; 28 см; **В** 3 см; 7 см; **Г** 9 см; 21 см; **Д** інша відповідь.

3. У трапеції $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою гострого кута A. Зазначте рівні сторони трапеції.

А AB, BC, DC; **Б** AD і CD; **В** AB і AD; **Г** AB і BC; **Д** інша відповідь.

4. Обчисліть площу прямокутника, якщо одна з його сторін дорівнює 6 см, а радіус описаного навколо нього кола — 5 см.

А 25 см^2; **Б** 100 см^2; **В** 50 см^2; **Г** 48 см^2; **Д** інша відповідь.

5. Периметр прямокутника дорівнює 32 см. Знайдіть суму відстаней від точки K, узятої всередині прямокутника до всіх його сторін.

А 32 см; **Б** 16 см; **В** 15 см; **Г** 12 см; **Д** інша відповідь.

6. Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, кожний із внутрішніх кутів якого дорівнює $140°$.

А 6; **Б** 7; **В** 8; **Г** 9; **Д** інша відповідь.

7. Знайдіть радіус кола, описаного навколо правильного n-кутника зі стороною a:

А $\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$; **Б** $\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{\pi}{4}$; **В** $\dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}}$; **Г** $\dfrac{a}{\sin\dfrac{180°}{n}}$; **Д** інша відповідь.

8. Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють 4 і 9 см, а кут між ними становить $30°$.

Знайдіть площу чотирикутника.

А 36 см^2; **Б** 9 см^2; **В** 18 см^2; **Г** $18\sqrt{2}$ см^2; **Д** інша відповідь.

9. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції, периметр якої дорівнює 30 см і, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло.

А 10 см; **Б** 7,5 см; **В** $4\sqrt{3}$ см; **Г** 15 см; **Д** інша відповідь.

10. Сторона ромба дорівнює 5 см. Обчисліть площу ромба, якщо різниця діагоналей 2 см.
А 20 см^2; **Б** 50 см^2; **В** 24 см^2; **Г** 16 см^2; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Бісектриса, проведена з вершини прямокутника, ділить його діагональ на відрізки 15 і 20 см. Обчисліть площу прямокутника.
А 588 см^2; **Б** 612 см^2; **В** 492 см^2; **Г** 460 см^2; **Д** інша відповідь.

2. Навколо кола описано рівнобічну трапецію з кутом 30° при основі. Середня лінія трапеції дорівнює 1 см. Визначте радіус кола.

А 1 см; **Б** 0,25 см; **В** 0,5 см; **Г** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; **Д** інша відповідь.

3. Периметр ромба дорівнює 40 см, а сума довжин діагоналей 28 см. Обчисліть його площу.
А 24 см^2; **Б** 48 см^2; **В** 96 см^2; **Г** 192 см^2; **Д** інша відповідь.

4. Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ — 15 см. Обчисліть площу ромба.
А 180 см^2; **Б** 120 см^2; **В** 150 см^2; **Г** 108 см^2; **Д** інша відповідь.

5. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки 4 і 6 см. Обчисліть периметр трапеції.
А 44 см; **Б** 40 см; **В** 36 см; **Г** 42 см; **Д** інша відповідь.

6. Діагоналі ромба відносяться, як 3 : 4, а його висота дорівнює 24 см. Обчисліть площі частин, на які ділить ромб ця висота.
А 100 см^2, 416 см^2; **Б** 96 см^2, 428 см^2; **В** 84 см^2, 416 см^2;
Г 516 см^2, 106 см^2; **Д** 84 см^2, 516 см^2.

7. Більша діагональ прямокутної трапеції є бісектрисою прямого кута. Різниця основ трапеції дорівнює 30 см, а різниця бічних сторін — 10 см.
Обчисліть площу трапеції.
А 868 см^2; **Б** 926 см^2; **В** 324 см^2; **Г** 1000 см^2; **Д** 960 см^2.

8. Обчисліть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 і 13 см, а діагоналі — перпендикулярні до бічних сторін.

А 18 см^2; **Б** 36 см^2; **В** 48 см^2; **Г** 54 см2; **Д** інша відповідь.

9. У прямокутну трапецію *ABCD* уписано коло. Точка дотику цього кола до більшої бічної сторони *BC* ділить її на відрізки 9 та 4 см. Визначте висоту трапеції.

А 6 см; **Б** 8 см; **В** 10 см; **Г** 12 см; **Д** інша відповідь.

10. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні. Одна з них дорівнює 40 см, середня лінія — 25 см. Знайдіть висоту трапеції.

А 12 см; **Б** 18 см; **В** 24 см; **Г** 25 см; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. Квадрат і правильний шестикутник уписано в одне коло. Відношення їх площ дорівнює...

А $4:3\sqrt{3}$; **Б** $3:4\sqrt{2}$; **В** $5:3\sqrt{6}$; **Г** $3:4\sqrt{5}$; **Д** інша відповідь.

2. Більша висота паралелограма збігається з меншою його діагоналлю і дорівнює 6. Знайдіть меншу висоту паралелограма, якщо його менша сторона дорівнює 2,5.

А $\frac{35}{17}$; **Б** 2; **В** 3; **Г** $\frac{30}{13}$; **Д** інша відповідь.

3. У разі перетину менших діагоналей правильного шестикутника, площа якого S, утворюється шестикутник. Обчисліть площу цього шестикутника.

А $\frac{S}{2}$; **Б** $\frac{S}{3}$; **В** $\frac{S}{4}$; **Г** $\frac{S}{6}$; **Д** $\frac{S}{9}$.

4. Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і в точці перетину діляться на відрізки 54 і 96 см. Обчисліть периметр трапеції.

А 450 см; **Б** 486 см; **В** 392 см; **Г** 400 см; **Д** 430 см.

5. Бісектриси тупих кутів при основі трапеції перетинаються на другій основі. Бічні сторони трапеції відносяться, як 15 : 13, а більша основа дорівнює 56 см. Обчисліть меншу основу трапеції, якщо її висота дорівнює 24 см.

А 18 см; **Б** 24 см; **В** 28 см; **Г** 36 см; **Д** 16 см.

6. У трапеції центр уписаного в неї кола віддалений від кінців меншої основи на відстані 65 і 75 см. Менша основа дорівнює 70 см. Обчисліть площу трапеції.

А 17640 см^2; **Б** 16000 см^2; **В** 12460 см^2; **Г** 10000 см^2; **Д** 16800 см^2.

7. У рівнобічній трапеції діагоналі є бісектрисами гострих кутів і в точці перетину діляться у відношенні 5 : 13, починаючи від вершини тупих кутів. Обчисліть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А 388 см^2; **Б** 460 см^2; **В** 368 см^2; **Г** 412 см^2; **Д** 432 см^2.

8. Трапеція описана навколо кола. Знайдіть відношення довжини середньої лінії трапеції до її периметра.

А $1:3$; **Б** $1:4$; **В** $2:5$; **Г** $3:7$; **Д** $2:\sqrt{5}$.

9. Точка K ділить сторону BC квадрата $ABCD$ у відношенні 3 : 2, починаючи від точки B. Відрізки AC і DK перетинаються в точці F. Обчисліть площу трикутника CFK, якщо площа трикутника $ADF = 50$ см^2.

10. Трапецію з бічною стороною 16 уписано в коло. Діагональ трапеції утворює з більшою основою кут, косинус якого дорівнює 0,6. Обчисліть радіус кола.

А 10; **Б** 5; **В** 6; **Г** 8; **Д** інша відповідь.

2.6. Задачі для самостійної роботи

Рівень I

1. Діаметр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює 12 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо різниця її основ дорівнює 10 см.

Відповідь: 52 см.

2. Гострий кут паралелограма дорівнює 45°, а діагоналі становлять 1 і 3 см. Обчисліть площу паралелограма.

Відповідь: 2 см^2.

3. У паралелограмі бісектриса гострого кута, який дорівнює 30°, ділить його сторону на відрізки 12 і 18 см, починаючи від вершини тупого кута. Обчисліть площу паралелограма.

Відповідь: 120 см^2.

4. Діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні, довжина однієї з них дорівнює 6 см. Довжина відрізка, що з'єднує середини основ, дорівнює 4,5 см. Обчисліть площу трапеції.

Відповідь: $9\sqrt{5}$ см^2.

5. З вершини C квадрата $ABCD$ зі стороною, що дорівнює 4, проведено пряму, яка перетинає сторону AD у точці K. Визначте висоту BM трикутника BKC, якщо відрізок KC дорівнює 5.

Відповідь: 3,2.

6. Діагоналі ромба дорівнюють 30 і 40 см. Визначте висоту ромба.

Відповідь: 24 см.

7. Бісектриса кута між діагоналями ромба ділить його сторону на відрізки 30 і 40 см. Знайдіть діагоналі ромба.

Відповідь: 112 см; 84 см.

8. Перпендикуляр, опущений з однієї із вершин прямокутника на діагональ, ділить її на відрізки 16 і 9 см. Обчисліть периметр прямокутника.

Відповідь: 70 см.

9. Різниця діагоналей ромба дорівнює 14 см, а його сторона — 13 см.

Обчисліть площу ромба.

Відповідь: 120 см^2.

10. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 13 і 37 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

Обчисліть площу трапеції.

Відповідь: 625 см^2.

11. У коло радіусом R вписано трапецію, нижня основа якої в два рази більша за кожну з решти сторін.

Обчисліть площу трапеції.

Відповідь: $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

12. Паралелограм з периметром 44 см поділено діагоналями на чотири трикутника. Різниця між периметрами двох суміжних трикутників дорівнює 6 см.

Знайдіть сторони паралелограма.

Відповідь: $a = 8$ см, $b = 14$ см.

Рівень II

1. Бічна сторона трапеції і середина протилежної сторони визначають трикутник. Яка залежність між площами цього трикутника і трапеції?

Відповідь: площа трикутника дорівнює половині площі трапеції.

2. Через кожну вершину опуклого чотирикутника проведено пряму, паралельну його діагоналі. Доведіть, що площа утвореного паралелограма дорівнює подвоєній площі чотирикутника.

3. Гострий кут ромба дорівнює 30°, а його більша діагональ — l. У цей ромб уписано прямокутник так, що одна з його діагоналей є меншою діагоналлю ромба. Знайти площу прямокутника.

Відповідь: $\dfrac{2l^2}{3}$.

4. У коло радіусом $R=1$ уписано трапецію, нижня основа якої вдвічі більша за кожну з решти сторін.

Обчисліть площу трапеції.

Відповідь: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

5. Сторона правильного шестикутника дорівнює a. Середини трьох його сторін, узятих через одну, є вершинами трикутника. Обчисліть площу цього трикутника.

Відповідь: $\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{16}$.

6. Сторона ромба $ABCD$ дорівнює 6, $\angle BAD = 60^\circ$. На стороні BC взято точку E так, що $CE = 2$. Знайдіть відстань від точки E до точки перетину діагоналей ромба.

Відповідь: $\sqrt{13}$.

7. Визначте гострий кут ромба, в якому сторона є середнім геометричним його діагоналей.

Відповідь: 30°.

8. У рівнобічну трапецію вписано коло. Бічна сторона трапеції дорівнює l, а одна з основ — a.

Знайти площу трапеції.

Відповідь: $l\sqrt{a(2l-a)}$.

9. У рівнобічну трапецію вписано два кола, що дотикаються і мають радіус R. Кожне коло дотикається до двох основ і однієї бічної сторони, центри кіл лежать на діагоналях трапеції.

Знайдіть сторони трапеції.

Відповідь: $2R\sqrt{2}$; $2R\sqrt{2}$; $2R\sqrt{2}$; $4R+2R\sqrt{2}$.

10. Зовні квадрата $ABCD$ розміщено точку O. Обчисліть площу квадрата, якщо $OB = OA = 5$; $DO = \sqrt{13}$.

Відповідь: 2.

11. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони AB. Відомо, що бісектриса кута C ділить площу трикутника AMD навпіл.

Знайдіть довжину сторони AD, якщо $CD = 4$.

Відповідь: $\sqrt{33} - 1$.

12. У квадраті $ABCD$ береться точка P так, що $\angle PAB = \angle PBA = 15°$.

Знайдіть кути трикутника PAD.

Указівка: увести параметр a — довжину сторони квадрата.

Скористатись тригонометричними функціями.

Відповідь: $\angle PAD = 75°$; $\angle ADP = 30°$; $\angle APD = 75°$.

13. У квадрат уписано другий квадрат. Менший з гострих кутів між сторонами квадратів дорівнює α. За якого значення α площа вписаного квадрата становить $\frac{2}{3}$ площі квадрата.

Указівка: нехай a — сторона цього квадрата, x — сторона вписаного квадрата; тоді $x = \dfrac{a}{\sin\alpha + \cos\alpha}$.

Відповідь: якщо $\alpha = 15°$.

14. У ромб із площею, що дорівнює одиниці, вписано круг із площею $\frac{1}{2}$.

Знайдіть сторону ромба.

Відповідь: $a = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

15. Більша основа трапеції є діаметром описаного навколо неї кола, радіус якого R. Гострий кут при основі трапеції α. Визначте площу трапеції.

Відповідь: $S = 2R^2 \sin^2\alpha \sin 2\alpha$.

16. Навколо кола описано рівнобічну трапецію з гострим кутом α. Навколо трапеції в свою чергу описано коло.

Знайдіть відношення радіусів цих кіл.

Відповідь: $\dfrac{R}{r} = \dfrac{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$.

17. Обчисліть площу трапеції, якщо відомо чотири її сторони a, b, c, d $(a \parallel b)$.

Указівка: через вершину верхньої основи провести пряму, паралельну бічній стороні.

Відповідь: $S = \dfrac{a+b}{2}\sqrt{d^2 - \left(\dfrac{d^2 - c^2 + (a-b)^2}{2(a-b)}\right)^2}$.

18. Обчисліть площу рівнобічної трапеції, якщо її висота — h, а бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом 60°.

Відповідь: $h^2\sqrt{3}$.

19. Довжини основ рівнобічної трапеції дорівнюють 21 і 9 см, а довжина висоти — 8 см. Обчисліть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Указівка: провести з вершини B перпендикуляр до основи AD до перетину з колом.

Відповідь: $\dfrac{85}{8}$ см.

20. Один із кутів трапеції дорівнює 30°, бічні сторони в разі продовження перетинаються під прямим кутом.

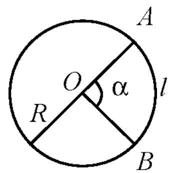
Знайдіть меншу бічну сторону трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 10 см, а одна з основ — 8 см.

Відповідь: 2 см.

3. КОЛО, КРУГ ТА ЇХ ЧАСТИНИ

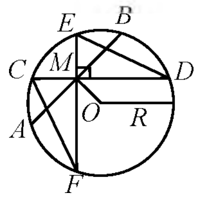
3.1. Теоретичні відомості

Позначення



R і D — радіус і діаметр кола (круга).
L — довжина кола; l — довжина дуги кола.
S, $S_{сек}$, $S_{сег}$ — площі круга, сектора і сегмента.
$\alpha_{гр}$ і $\beta_{гр}$ — градусна міра кутів α і β;
$\alpha_{рад}$ і $\beta_{рад}$ — радіанна міра кутів α і β.

Основні властивості та співвідношення



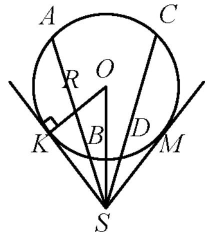
Площа круга. Довжина кола, дуги:

1. $L = 2\pi R = \pi D$ — довжина кола.
2. $l = \dfrac{\pi\alpha_{гр}R}{180°} = \alpha_{рад}R$ — довжина дуги.
3. $S = \pi R^2 = \dfrac{1}{4}\pi D^2 = \dfrac{1}{4}LD$ — площа круга.

Хорди, що перетинаються

1. Добуток відрізків хорд, які перетинаються в одній точці, є величина стала для даного кола:

$AM \cdot BM = CM \cdot MD = EM \cdot FM = \ldots = R^2 - OM^2$.



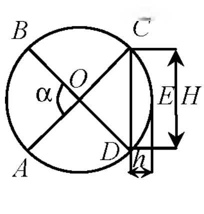
2. Якщо хорди $CD \perp EF$, тоді $CF^2 + ED^2 = 4R^2$.

Дотичні і січні

1. Відрізки дотичних, проведених до кола з точки, взятої поза колом, і які лежать між цією точкою і точками дотику, рівні, тобто $SK = SM$.

2. Якщо SK — дотична, а SC, SA і т. д. — січні, тоді $SK^2 = SA \cdot SB = SC \cdot SD = \ldots = SO^2 - R^2$.

Сектор і сегмент



AOB — сектор.
CED — сегмент.
$H = CD$ — основа сегмента.
h — висота сегмента.
L — довжина дуги сегмента.

1. $S_{\text{сек}} = \dfrac{\pi R^2 \alpha_{\text{гр}}}{360°} = \dfrac{R^2 \alpha_{\text{рад}}}{2} = \dfrac{1}{2} Rl$.

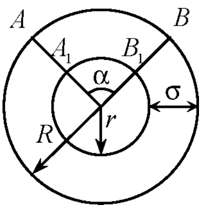
2. $S_{\text{сег}} = S_{CED} = S_{CODE} - S_{\Delta COD} = \dfrac{1}{2}\big(R(l-H) + Hh\big)$.

3. $H = 2\sqrt{h(2R-h)}$.

4. $h = R\sqrt{R^2 - \dfrac{1}{4}H^2}$.

5. $l = \dfrac{2\pi R \alpha_{\text{гр}}}{360°} = R\alpha_{\text{рад}}$.

Кільце і кільцевий сектор



1. Площа кільця: $S_K = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 2\pi\rho\delta$,

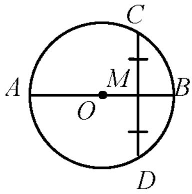
де $\rho = \dfrac{1}{2}(R+r)$ — середній радіус кільця; $\delta = R - r$ — ширина кільця.

2. ABB_1A_1 — кільцевий сектор.

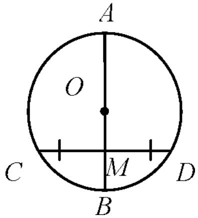
Площа кільцевого сектора

$$S_C = \frac{\pi\alpha_{\text{гр}}}{360°}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{\pi\alpha_{\text{гр}}}{180°}\rho\delta.$$

3.2. *Деякі теореми про діаметр, хорди і січні*

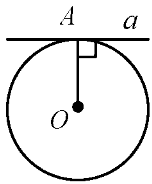


1. Діаметр кола, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї: $AB \perp CD$.

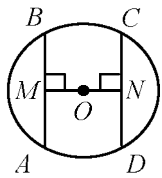


2. Діаметр кола, який перпендикулярний до хорди, поділяє цю хорду навпіл: $CM = MD$.

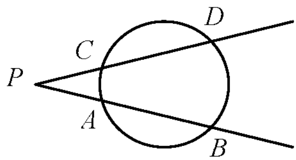
3. Дотична, проведена до кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику: $OA \perp a$.



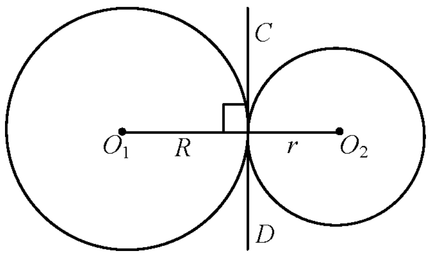
4. У колі рівні хорди однаково віддалені від центра кола і, навпаки, хорди, однаково віддалені від центра кола, рівні.

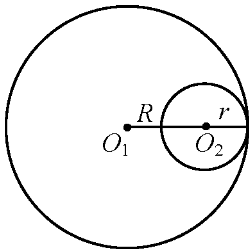


5. $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.



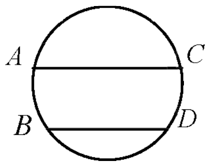
6. Відстань між центрами O_1 і O_2 двох дотичних кіл у випадку зовнішнього дотику дорівнює: $O_1O_2 = R + r$; у випадку внутрішнього дотику $O_1O_2 = R - r (R > r)$.





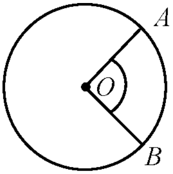
7. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, перпендикулярна до прямої, що проходить через центри цих кіл: $CD \perp O_1O_2$.

8. Дуги, розміщені між паралельними хордами, рівні між собою: $\cup AB = \cup CD$.



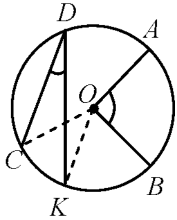
Кути, вписані в коло

1. AOB — центральний кут. Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається.



2. CDK — вписаний кут. Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині відповідного центрального кута:

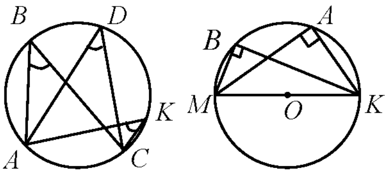
$$\angle CDK = \frac{1}{2} \cup CK = \frac{1}{2} \angle COK .$$



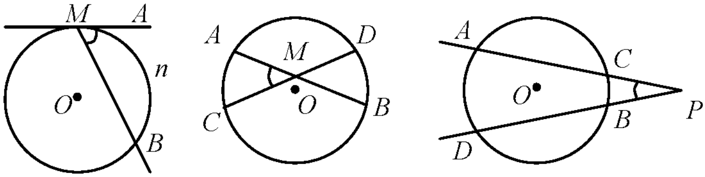
3. а) Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні між собою:

$$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC .$$

б) Вписаний кут, який спирається на діаметр, дорівнює 90°. $\angle MAK = \angle MBK = 90°$.



а *б*



а *б* *в*

4. а) $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$;

б) $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB)$;

в) $\angle APD = \frac{1}{2}(\cup AD - \cup CB)$.

3.3. Зразки розв'язування задач

Задача 1. Хорда AB кола дорівнює 10. Через один її кінець проведено дотичну до кола, а через інший — ще одну хорду, яка є паралельною до дотичної та дорівнює 12. Знайдіть радіус кола.

Розв'язання. Нехай на рис. 3.1 $AB = 10$; $AC \parallel l_1$; $AC = 12$.

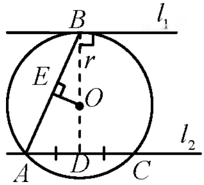


Рис. 3.1

Проведемо відрізок BD через центр кола та точку B; $BD \perp l_1$ за ознакою дотичної, $AC \parallel l_1$ за умовою.

Отже, $BD \perp AC$ та поділяє хорду AC навпіл. $AD = DC = 6$. Проведемо відрізок $OE \perp AB$. $BE = EA = 5$; $\Delta BOE \sim \Delta BAD$ (обидва трикутники прямокутні та мають спільний кут B). Із подібності трикутників випливає $\frac{BO}{EO} = \frac{BA}{AD}$; $\frac{BO^2}{EO^2} = \frac{BA^2}{AD^2}$. За теоремою Піфагора з трикутника EOB ($\angle E = 90°$) дістанемо $EO^2 = r^2 - 25$.

Тоді

$$\frac{r^2}{r^2 - 25} = \frac{10^2}{6^2};\ 36r^2 = 100r^2 - 100 \cdot 25;\ 64r^2 = 10^2 \cdot 5^2;\ r = \frac{50}{8} = 6,25.$$

Відповідь: 6,25.

Задача 2. Два кола радіусами R та r $(R > r)$ мають зовнішній дотик у точці A. Через точку B, яку взято на більшому колі, проведено пряму, дотичну до меншого кола у точці C. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо хорда AB дорівнює a.

Розв'язання. Нехай на рис. 3.2 зображено два кола радіусами R і r, $AB = a$. Трикутники BO_1A і TO_2A — рівнобедрені; $\angle O_1AB = \angle TAO_2$ — як вертикальні, тоді $\angle O_1BA = \angle O_2TA$.

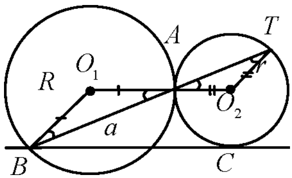


Рис. 3.2

Виходить, що $\Delta BO_1A \sim \Delta TO_2A$ за двома кутами. Звідси випливає $\frac{R}{r} = \frac{AB}{AT}$;

$AT = \frac{ar}{R}$. За властивістю січної і дотичної маємо $BC^2 = BT \cdot BA$, тобто $BC^2 = \left(a + \frac{ar}{R}\right)a$; $BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$.

Відповідь: $BC = a\sqrt{1 + \frac{r}{R}}$.

Задача 3. Два кола перетинаються; AD — їх спільна хорда; AB і AC — дотичні до кожного з них. Доведіть, що $AB^2 \cdot DC = AC^2 \cdot BD$.

Доведення. Оскільки $\angle DAC = \angle ABD$, а $\angle DCA = \angle DAB$ (рис. 3.3), то трикутники BAD і CAD — подібні. Уведемо допоміжний елемент — хорду AD.

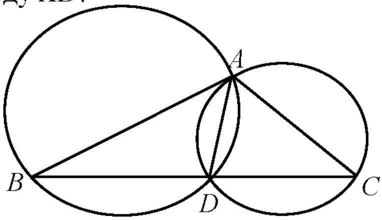


Рис. 3.3

Тоді

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}; \qquad (1)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{DC}. \qquad (2)$$

Помножимо вирази (1) і (2), дістанемо

$\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AD \cdot DB}{AD \cdot DC}$, або $AB^2 \cdot DC = AC^2 \cdot BD$.

Задача 4. Доведіть, що сума квадратів довжин двох взаємно перпендикулярних хорд, які перетинаються, більше від квадрата діаметра кола, а сума квадратів відрізків, на які точка перетину ділить хорди, дорівнює квадрату діаметра.

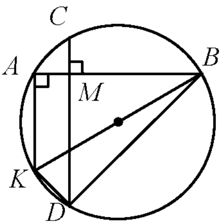


Рис. 3.4

Доведення. Нехай на рис. 3.4 зображено коло, в якому M — точка перетину хорд AB і CD, $AB \perp CD$, $d = BK$.

Проведемо $AK \parallel CD$, тоді BK — діаметр, $AK < CD$ і $BK^2 = AB^2 + AK^2 < AB^2 + CD^2$.

Далі $KD = AC$ (як дуги, що містяться між паралельними прямими)

$$KB^2 = BD^2 + KD^2 = BM^2 + DM^2 + AM^2 + CM^2;$$

$$4R^2 = AC^2 + BD^2$$

або $d^2 = AC^2 + BD^2$, що і треба довести.

Задача 5. Периметр сектора дорівнює 28 см, а його площа — 49 см^2. Обчисліть довжину дуги сектора.

Розв'язання. За умовою задачі $P_{сек} = 28$ см, $S_{сек} = 49$ см^2 (рис. 3.5). Знайдіть довжину дуги $AB = L$. Периметр сектора складається з довжин двох радіусів R і довжини дуги L, $S_{сек} = \frac{1}{2}R^2\alpha$, $l_{сек} = L = R\alpha$.

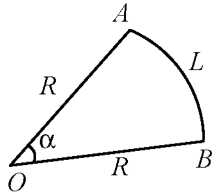


Рис. 3.5

Складемо систему рівнянь, виходячи з умов:

$$\begin{cases} 2R+L=28, \\ \frac{1}{2}R^2\alpha=49; \end{cases} \quad \begin{cases} 2R+L=28, \\ \frac{1}{2}R\alpha R=49; \end{cases} \quad \begin{cases} 2R+L=28, \\ \frac{1}{2}LR=49; \end{cases} \quad \begin{cases} L=28-2R, \\ \frac{1}{2}(28-2R)R=49; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L=28-2R, \\ R^2-14R+49=0; \end{cases} \quad \begin{cases} L=28-14=14, \\ R=7. \end{cases}$$

Отже, $L = 14$ см.

Відповідь: 14 см.

Задача 6. Через точку P діаметра кола проведено хорду AB, яка утворює з діаметром кут 60°. Обчисліть радіус кола, якщо $AP = a$ і $BP = b$.

Розв'язання. За умовою задачі $AP = a$, $BP = b$, $\angle BPD = 60^\circ$ (рис. 3.6).

Нехай $OC = OD = R$ – шуканий радіус кола. Проведемо $OF \perp AB$, тоді

$$AF = FB = \frac{AP+PB}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$FP = BP - FB = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

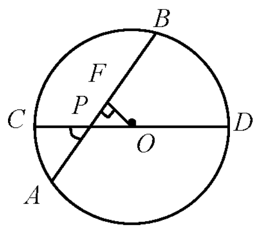


Рис. 3.6

Оскільки $\angle CPA = \angle BPD = 60^\circ$ (як вертикальні), то в прямокутному трикутнику FPO $\angle FOP = 30^\circ$. Оскільки катет, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи, то $FP = \frac{1}{2}PO$, $PO = 2FP = 2\frac{b-a}{2} = b-a$. За властивістю хорд, які перетинаються у колі:

$CP \cdot PD = AP \cdot BP$; $(R-(b-a))(R+(b-a)) = ab$;

$R^2 - (b-a)^2 = ab$; $R^2 = a^2 - 2ab + b^2 + ab$;

$R^2 = a^2 - ab + b^2$; $R = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Відповідь: $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Задача 7. Обчисліть площу круга, вписаного в круговий сектор круга радіусом R з хордою $2a$.

Розв'язання. За умовою $AO = OB = R$; $AB = 2a$ (рис. 3.7). Знаходимо $S_{\text{кр}}$.

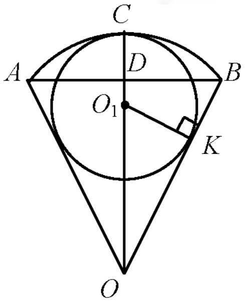


Рис. 3.7

Проведемо $O_1K \perp OB$ — радіус у точку дотику. Нехай $O_1K = r$.

Оскільки $\Delta O_1KO \sim \Delta BDO$ (як прямокутні трикутники, які мають спільний кут $\angle BOD$), тоді

$$\frac{OB}{BD} = \frac{OO_1}{O_1K}; \quad \frac{R}{a} = \frac{R-r}{r}; \quad Rr = aR - ar;$$

$$r(R+a) = aR; \quad r = \frac{aR}{R+a}.$$

Оскільки $S = \pi r^2$, тоді $S_{\text{кр}} = \pi\left(\frac{aR}{R+a}\right)^2$.

Відповідь: $\pi\left(\frac{aR}{R+a}\right)^2$.

Задача 8. У сектор радіуса R вписано коло радіусом r. Знайдіть периметр сектора.

Розв'язання. Нехай $OACB$ — заданий сектор (рис. 3.8), $OA = OC = OB = R$, $O_1C = O_1D = r$. Позначимо: $\angle AOB = \alpha$, тоді $\angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{\alpha}{2}$. Із прямокутного трикутника O_1DO знаходимо $\sin\angle O_1OD = \frac{O_1D}{O_1O}$ або, оскільки $\angle O_1OD = \frac{\alpha}{2}$, $O_1D = r$, $OO_1 = OC = O_1C = R - r$, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R-r}$, звідки $\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{r}{R-r}$,

$\alpha = 2\arcsin\dfrac{r}{R-r}$. Тоді довжина дуги ACB дорівнює $\cup ACB = R\alpha = 2R\arcsin\dfrac{r}{R-r}$.

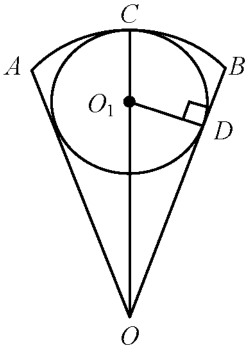


Рис. 3.8

Периметр сектора

$$P_{OACB} = 2OA + \cup ACB =$$
$$= 2R + 2R\arcsin\frac{r}{R-r} =$$
$$= 2R\left(1 + \arcsin\frac{r}{R-r}\right).$$

Відповідь: $2R\left(1 + \arcsin\dfrac{r}{R-r}\right)$.

Задача 9. У колі радіусом R проведено дві хорди AB і CD, які перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Доведення. Проведемо діаметр CK.

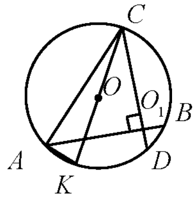


Рис. 3.9

$OK = OC = R$, $AB \perp CD$ (рис. 3.9). Оскільки величина кута, утвореного двома січними, які мають спільну точку всередині кола, дорівнює півсумі кутових величин дуг, які розміщено між його сторонами, тоді

$$\angle CO_1A = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD),$$

$90° = \dfrac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$, тобто

$$\cup AC + \cup BD = 180°. \quad (1)$$

Оскільки діаметр ділить коло навпіл, то

$$\cup AC + \cup AK = 180°. \quad (2)$$

Порівняємо рівняння (1) і (2): $\cup AK = \cup BD$. Але рівні дуги стягуються рівними хордами, виходячи з цього

$$AK = BD. \quad (3)$$

Трикутник CAK — прямокутний ($\angle A$ спирається на діаметр), тоді за теоремою Піфагора $AK^2 + AC^2 = KC^2$, $AK^2 + AC^2 = 4R^2$. Ураховуючи рівняння (3), маємо $BD^2 + AC^2 = 4R^2$, що і треба було довести.

Задача 10. У прямокутний трикутник уписано півколо, діаметр якого лежить на гіпотенузі, а центр ділить гіпотенузу на відрізки 15 і 20 см. Обчисліть довжину дуги півкола, що міститься між точками дотику.

Розв'язання. Нехай O — центр півкола, M і N — точки дотику його з катетами трикутника, $AO = 15$ см, $OB = 20$ см (рис. 3.10).

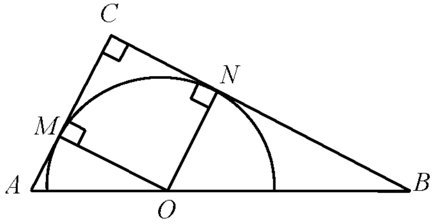


Рис. 3.10

Тоді радіанна міра дуги MN дорівнює $\frac{\pi}{2}$, оскільки чотирикутник $MONC$ — квадрат. Позначимо радіус кола через R.

Трикутники AMO і ONB подібні за двома кутами, тому $\frac{AM}{AO} = \frac{ON}{OB}$. Але $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = \sqrt{15^2 - R^2}$, тому $\frac{\sqrt{15^2 - R^2}}{15} = \frac{R}{20}$, звідки $R = 12$ см. Отже, довжина дуги MN дорівнює $l = \alpha R = \frac{\pi}{2} 12 = 6\pi$ (см).

Відповідь: 6π (см).

Задача 11. Знайдіть площу сегмента, якщо периметр його дорівнює p, а дуга становить 120°.

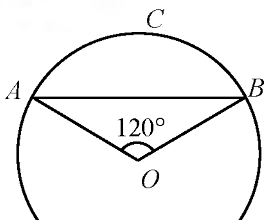


Рис. 3.11

Розв'язання. Нехай треба обчислити радіус $R = OA$ дуги кола сегмента (рис. 3.11). Периметр сегмента дорівнює сумі довжин дуги ACB і хорди AB:

$$l_{\cup ACB} = \alpha R = \frac{2\pi}{3} R;$$

$AB^2 = R^2 + R^2 - 2RR\cos 120^\circ$ — за теоремою косинусів з ΔAOB; $AB^2 = 2R^2\left(1 + \cos 60^\circ\right)$;

$AB^2 = 2R^2\left(\frac{1}{2}+1\right)$; $AB^2 = R^2 3$; $AB = \sqrt{3}R$, тоді $p = \frac{2\pi}{3}R + \sqrt{3}R$,

звідки $R = \frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}$.

Площа сегмента S дорівнює площі сектора без площі трикутника AOB:

$$S = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = R^2\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{3p}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)^2 \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} =$$

$$= \frac{9p^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)^2}.$$

Відповідь: $S = \frac{3p^2\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{4\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)}$.

Задача 12. Два кола радіусами R і r дотикаються зовні. До цих кіл проведено їх спільну дотичну. У криволінійний трикутник, який утворився, вписано коло. Знайдіть його радіус.

Розв'язання. Нехай O_1 і O_2 — центри кіл, що дотикаються зовні (рис. 3.12). Позначимо радіус, який треба знайти O_3D, через x. Проведемо через центр O_3 пряму $MN \parallel AB$, де AB — спільна дотична.

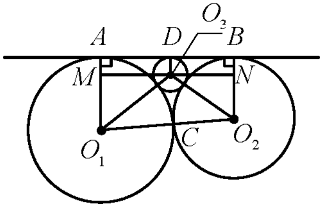


Рис. 3.12

У криволінійному трикутнику ABC:

$O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$, $O_3D \perp AB$;

$AM = BN = O_3D = x$; $O_1M = R - x$, $O_2N = r - x$;

$O_1O_3 = R + x$; $O_2O_3 = r + x$.

Отже, $MO_3 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rx}$ (з трикутника MO_1O_3).

Аналогічно $NO_3 = 2\sqrt{rx}$ (з трикутника O_2NO_3).

А оскільки $MN = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$, то

$$2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}=2\sqrt{Rr}\,;\quad \sqrt{x}=\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}+\sqrt{r}}\,;\quad x=\frac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}.$$

Відповідь: $\dfrac{Rr}{\left(\sqrt{R}+\sqrt{r}\right)^2}$.

Задача 13. Визначте радіуси кіл, які дотикаються зовні, якщо відстань між їх центрами d, а кут між спільними дотичними α.

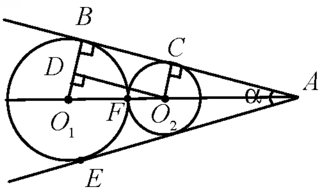


Рис. 3.13

Розв'язання. Нехай O_1 і O_2 — центри кіл, що дотикаються зовні (рис. 3.13).

$$O_1O_2=d,\, O_1B=R,\, O_2C=r,\, \angle BAO_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Маємо:

$$R+r=O_1F+FO_2=O_1O_2=d;$$
$$R-r=O_1B-O_2C=O_1D.$$

Із прямокутного трикутника O_1DO_2, де $\angle O_1O_2D=\angle BAO_1=\dfrac{\alpha}{2}$, знаходимо $O_1D=O_1O_2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, тоді $R-r=d\sin\dfrac{\alpha}{2}$. Із системи

$$\begin{cases} R+r=d; \\ R-r=d\sin\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$ маємо $R=\dfrac{d\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$ і $r=\dfrac{d\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$.

Відповідь: $R=\dfrac{d\left(1+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$; $r=\dfrac{d\left(1-\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2}$.

3.4. Тематичне тестування

1. Обчисліть площу кільця, розміщеного між двома концентричними колами, радіуси яких дорівнюють 5 і 8 см.

А 6π см^2; **Б** 32π см^2; **В** 39π см^2; **Г** 54π см^2; **Д** інша відповідь.

2. По колу, довжина якого дорівнює 3 см, котиться інше коло, довжина якого 2 см.

Визначте довжину шляху, який пройде центр меншого кола за один повний оберт навколо більшого кола.

А 4 см; **Б** 5 см; **В** 6 см; **Г** 2π см; **Д** інша відповідь.

3. Довжина дуги кола дорівнює 5 см. Знайдіть довжину хорди, що стягує цю дугу, якщо довжина кола дорівнює 30 см.

А $\frac{14}{\pi}$ см; **Б** 7 см; **В 6** см; **Г** $\frac{15}{\pi}$ см; **Д** інша відповідь.

4. Хорда, довжина якої 24 см, перпендикулярна до діаметра, довжина якого дорівнює 25 см.

Обчисліть відстані від одного кінця хорди до кінців діаметра.

А 10 см, 16 см; **Б** 15 см, 20 см; **В** 15 см, 18 см; **Г** 14 см, 18 см; **Д** 20 см, 25 см.

5. З точки поза колом проведено січну. Різниця зовнішньої і внутрішньої частин січної дорівнює 4 см, а відстань від точки до кола — 10 см.

Обчисліть довжину цієї січної, якщо діаметр кола дорівнює 14 см.

А 20 см; **Б** 22 см; **В** 24 см; **Г** 16 см; **Д** 15 см.

6. Кожне з трьох кіл, радіуси яких дорівнюють одиниці, дотикається до двох інших. Четверте коло описує їх усіх і дотикається до всіх. Знайдіть радіус четвертого кола.

А $\frac{2}{\sqrt{3}}+1$; **Б** 2; **В** 3; **Г** 5; **Д** інша відповідь.

7. Два кола радіусами R і $3R$ дотикаються зовні. Обчисліть площу фігури, яка лежить між колами та їх спільною зовнішньою дотичною.

А $4R^2\sqrt{3}$; **Б** $4R^2\sqrt{2}$; **В** $2R^2(\sqrt{2}+1)$; **Г** $6R^2$; **Д** інша відповідь.

8. Сторона квадрата, вписаного в коло, дорівнює 8. Обчисліть площу сегмента, що відтинається цією стороною.

А $8(\pi-2)$; **Б** 8π; **В** $8(\pi-1)$; **Г** $64(\pi-2)$; **Д** інша відповідь.

9. Паралельні хорди AB і CD розміщені по один бік від центра кола радіусом R, відтинають від цього кола дуги 60° і 120°. Визначте площу частини круга, що міститься між хордами AB і CD.

А $\frac{\pi R^2}{2}$; **Б** $\frac{\pi R^2}{3}$; **В** $\frac{\pi R^2}{4}$; **Г** $\frac{\pi R^2}{6}$; **Д** інша відповідь.

10. Хорда довжиною 6 см відсікає від кола дугу 120°. Визначте радіус кола.

А 4 см; **Б** $2\sqrt{3}$ см; **В** $3\sqrt{2}$ 24 см; **Г** 3 см; **Д** інша відповідь.

3.5. Задачі для самостійної роботи

Рівень I

1. Із точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди довжиною 15 і 20 см. Обчисліть відстань від цієї точки до прямої, яка проходить через кінці цих хорд.

Відповідь: 12 см.

2. Із точки поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках, віддалених від цієї точки на 8 і 15 см. Відстань від точки до центра кола дорівнює 13 см. Обчисліть радіус кола.

Відповідь: 7 см.

3. Відстань від точки, взятої поза колом, до його центра дорівнює 13 см, а до кола — 8 см. Обчисліть довжину дотичної, проведеної з цієї точки до цього кола.

Відповідь: 12 см.

4. Точки кола ділять його на частини, що відносяться, як 2:3:4:5:6. Обчисліть кути, утворені радіусами, проведеними у ці точки.

Відповідь: 36°, 54°, 72°, 90°, 108°.

5. Хорда, яка перетинає другу хорду, ділить її на відрізки 6 і 16 см і ділиться нею на відрізки у відношенні 3:2. Обчисліть довжину першої хорди.

Відповідь: 20 см.

6. З точки поза колом проведено січну і дотичну. Відрізки січної дорівнюють 18 і 54 см. Обчисліть довжину дотичної.

Відповідь: 36 см.

7. Зовнішня і внутрішня частини січної, проведеної з точки поза колом, відносяться, як 4 : 5. Обчисліть довжину цієї січної, якщо відстань від точки до кола дорівнює 4 см, а радіус кола — 16 см.

Відповідь: 18 см.

8. У колі, радіус якого дорівнює 25 см, по різні боки від центра проведено дві паралельні хорди довжиною 48 і 30 см. Обчисліть відстань між хордами.

Відповідь: 27 см.

9. У колі з центром O радіусом R проведено діаметр AB. Через середину радіуса AO проведено хорду CD, яку видно із середини радіуса OB під прямим кутом. Обчисліть відстань від центра кола до хорди CD.

Відповідь: $\frac{R\sqrt{3}}{4}$.

10. У середині кола проведено дві хорди, які перетинаються. Точка їх перетину віддалена від центра кола на $\frac{3}{5}$ її радіуса і ділить хорди у відношеннях 1 : 1 і 4 : 9. Визначте кут між хордами.

Відповідь: $\arcsin\frac{5}{9}$.

Рівень II

1. Хорди двох дуг кола радіусом R дорівнюють $2a$ і $2b$. Знайдіть хорду, дуга якої дорівнює сумі або різниці цих дуг.

Указівка 1: $\frac{c}{R}=\sin\gamma=\sin(\alpha\pm\beta)$.

Указівка 2: використати теорему Птолемея.

Відповідь:

якщо $2\gamma=2\alpha\pm2\beta$, то $2c=\frac{2}{R}\left(a\sqrt{R^2-b^2}\pm b\sqrt{R^2-a^2}\right)$.

2. Півколо розділено на три частини, хорди яких відносяться, як 1:2:1. Визначіть ці частини.

Відповідь: частини α і β,

$\alpha=\arccos\left(\sqrt{3}-1\right)$, $\beta=2\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)$.

3. Точка A всередині кола радіусом R віддалена від центра на відстань a. Через точку A проведено діаметр і дві взаємно перпендикулярні хорди, одна з яких утворює кут α з діаметром. Визначте довжини цих хорд.

Указівка: з центра кола опустити перпендикуляри на хорди; визначте відстань від центра кола до кожної хорди.

Відповідь: $2\sqrt{R^2-a^2\sin^2\alpha}$, $2\sqrt{R^2-a^2\cos^2\alpha}$.

4. На одній стороні прямого кута з вершиною в точці O взято дві точки A і B, при цьому $OA=a$, $OB=b$. Знайдіть радіус кола, яке проходить через A і B та дотикається до другої сторони кута.

Відповідь: $r=\frac{a+b}{2}$.

5. Два кола радіусами R і r дотикаються зовні. Знайдіть відстань від точки дотику до спільної зовнішньої дотичної.

Указівка: знайдіть кут між дотичною та лінією центрів, $\sin\alpha = \frac{R-r}{R+r}$.

Відповідь: $l = \frac{2Rr}{R+r}$.

6. Катети трикутника дорівнюють 3 і 4. Через середину меншого катета і середину гіпотенузи проведено круг, який дотикається до гіпотенузи. Знайдіть площу цього круга.

Відповідь: $\frac{25}{9}\pi$.

7. Сектор з кутом 60° при вершині поділено прямою, перпендикулярно до його осі, на дві рівновеликі частини. Периметр якої частини менший?

Відповідь: периметр частини, яка містить дугу сектора, менший.

8. У трикутнику ABC кут A дорівнює 32°, кут C — 4°. Коло з центром у точці B проходить через точку A, перетинає AC у точці M, BC — у точці N. Чому дорівнює кут ANM?

Відповідь: 58°.

9. Навколо трикутника зі сторонами 5, 6 і 7 описано коло. Знайдіть довжину хорди цього кола, відмінної від сторони трикутника, яка проходить через одну з вершин трикутника і ділить навпіл середню за довжиною сторону.

Відповідь: $\frac{37}{2\sqrt{7}}$.

10. З точки, яка розміщена поза колом, проведено дотичну і січну. Довжина дотичної дорівнює 6. Січна відтинає на колі хорду довжиною 5. Знайдіть довжину відрізка січної, розміщеної зовні кола

Відповідь: 4.

11. У гострий кут, який дорівнює 60°, вписано два кола, що дотикаються зовні. Радіус меншого кола дорівнює r. Визначте радіус більшого кола.

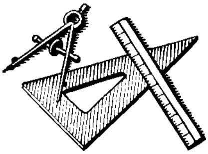
Відповідь: $3r$.

12. Радіус сектора дорівнює R, а радіус кола, вписаного в цей сектор, — r. Обчисліть площу сектора.

Відповідь: $R^2 \arcsin\frac{r}{R-r}$.

13. У півкруг радіусом R вписано два кола, які дотикаються одне до одного, півкруга і його діаметра. Радіус одного з них дорівнює r. Визначте радіус другого кола.

Відповідь: $\dfrac{Rr}{(R+2r)^2}\left(3R-2r\pm\sqrt{8\left(R^2-2Rr\right)}\right)$.



ПІДСУМКОВЕ ТЕСТУВАННЯ З ПЛАНІМЕТРІЇ

Рівень I

1. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. $AB=6$, $BC=7$, $AC=8$, $A_1B_1=12$. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$.

А 24; **Б** 42; **В** 60; **Г** 56; **Д** інша відповідь.

2. Задано сторони трикутника MNK: $MN=15$ см, $NK=10$ см, $MK=8$ см. Який кут найбільший у цьому трикутнику?

А $\angle N$; **Б** $\angle M$; **В** $\angle K$; **Г** не можна визначити; **Д** інша відповідь.

3. Хорда MN у колі з центром O дорівнює 8 см. Вона віддалена від центра на 3 см. Визначте діаметр цього кола.

А 10 см; **Б** 5 см; **В** 12 см; **Г** 8 см; **Д** інша відповідь.

4. Обчисліть площу прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 12 і 20 см, більша бічна — 10 см.

А 112 см^2; **Б** 32 см^2; **В** 96 см^2; **Г** 102 см^2; **Д** інша відповідь.

5. У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC. Площа паралелограма дорівнює S. Обчисліть площу фігури $AMCD$.

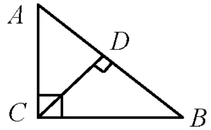
А $\frac{2}{3}S$; **Б** $\frac{3}{4}S$; **В** $\frac{7}{8}S$; **Г** $\frac{1}{2}S$; **Д** інша відповідь.

6. Чотирикутник уписано в коло. Чому дорівнює сума протилежних кутів?

А 90°; **Б** 180°; **В** 360°; **Г** 270°; **Д** інша відповідь.

7. Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки 2 і 5 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр 21 см.

А 4; 7; 9; **Б** 4; 7; 10; **В** 5; 3; 12; **Г** 3;4;7; **Д** інша відповідь.



8. Задано трикутник ABC: $\angle C = 90^\circ$, $CD = 8$ см, $BD - AD = 12$ см.

Визначте довжину гіпотенузи трикутника.

А 24 см; **Б** 16 см; **В** 20 см; **Г** 10 см; **Д** інша відповідь.

9. Сторони паралелограма дорівнюють 3 і 5 см, а кут між ними — 60°. Визначте довжини діагоналей паралелограма.

А 9 см, 15 см; **Б** 7 см, $\sqrt{19}$ см; **В** 7 см, 9 см; **Г** 8 см, $\sqrt{3}$; **Д** інша відповідь.

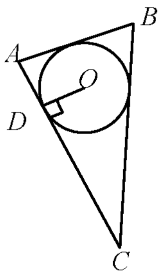
10. Знайдіть радіус і довжину кола, якщо центральному куту 72° відповідає дуга, довжиною 8π дм.

А 20 см, 40π см; **Б** 15 см, 30 см; **В** 20 см, 8π см; **Г** 4 см, 40π см; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Сторона правильного багатокутника дорівнює 4 м. Радіус описаного навколо багатокутника кола більший за радіус уписаного кола в $\sqrt{2}$ раз. Обчисліть периметр цього багатокутника.

А 24 см; **Б** 16 см; **В** 8 см; **Г** 32 см; **Д** інша відповідь.



2. Задано трикутник ABC : O — центр уписаного кола. $OD = 6$ см, $P_{\Delta ABC} = 64$ см. Знайти $S_{\Delta ABC}$.

А 192 см^2; **Б** 384 см^2; **В** 96 см^2; **Г** 200 см^2; **Д** інша відповідь.

3. Сторони трикутника 4; 13; 15. Визначте меншу висоту трикутника.

А 16; **Б** 10; **В** 1, 6; **Г** 3, 2; **Д** інша відповідь.

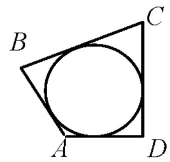
4. У трапецію вписано коло. Під яким кутом видно з центра кола бічну сторону?

А 120°; **Б** 90°; **В** 60°; **Г** 100°; **Д** інша відповідь.

5. Якщо в рівнобедреній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні і основи дорівнюють a і b, тоді площа трапеції дорівнює… (h — висота трапеції).

А h^2 см^2; **Б** $\sqrt{ab}$ см^2; **В** $\dfrac{a+b}{2}$ см^2; **Г** $\dfrac{a-b}{2}$ см^2; **Д** інша відповідь.

6. Коло вписано в чотирикутник $ABCD$. Яка рівність є правильною?



А $AD + BC = CD + AB$;

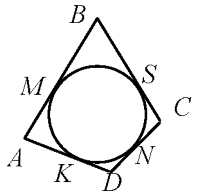
Б $BC + CD = AB + AD$;

В $BC - AD = 2(AB + CD)$;

Г $BC - CD = AB + AD$;

Д інша відповідь.

7. Коло вписано в чотирикутник, периметр якого дорівнює $2p$; $SC = a$, $KD = b$. Довжина відрізка AB дорівнює…



А $p - (a + b)$; **Б** $2p - (2a + 2b)$;

В $2p - a - b$; **Г** $2p - a + b$;

Д інша відповідь.

8. У колі хорду MN видно з деякої точки A кола під кутом 45°; $MN = 4$. Знайдіть радіус кола.

А $\sqrt{2}$; **Б** $2\sqrt{3}$; **В** 2; **Г** $2\sqrt{2}$; **Д** інша відповідь.

9. У трикутнику ABC медіани AK і BM взаємно перпендикулярні; N — точка перетину медіан; $BN = 6$, $NK = 2$. Довжина сторони AC дорівнює…

А $2\sqrt{3}$; **Б** 5; **В** 10; **Г** 12; **Д** інша відповідь.

10. Трикутник ABC рівнобедрений. Сторони цього трикутника дорівнюють 10 і 3 см. Знайдіть периметр трикутника.

А 16 см; **Б** 23см; **В** 46 см; **Г** 18 см; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. У крузі площею 36π см^2 проведено хорду довжиною 6 см. Обчисліть площу сектора, якому належить ця хорда.

А 6 см^2; **Б** 6 π см^2; **В** 12 см^2; **Г** 12π см^2; **Д** інша відповідь.

2. У круг площею 36π см^2 вписано правильний шестикутник. Обчисліть площу цього шестикутника.

А 56 см^2; **Б** $50\sqrt{3}$ см^2; **В** $54\sqrt{3}$ см^2; **Г** 54 см^2; **Д** інша відповідь.

3. Довжина дуги кола 5 см. Знайдіть довжину хорди, яка її стягує, якщо довжина кола 30 см.

А $\frac{15}{\pi}$ см; **Б** $\frac{14}{\pi}$ см; **В** 6 см; **Г** 8 см; **Д** інша відповідь.

4. Середини сторін паралелограма послідовно з'єднані відрізками. У скільки разів площа утвореного чотирикутника менша за площу паралелограма?

А у 2,5 разу; **Б** у 4 рази; **В** у 3 рази; **Г** у 2 рази; **Д** інша відповідь.

5. Площа трикутника ABC дорівнює S; AK і BF – медіани. O — точка перетину медіан. Площа трикутника AOB дорівнює… .

А $\frac{2}{3}S$; **Б** $\frac{1}{3}S$; **В** $\frac{2}{3S}$; **Г** $\frac{3}{4}S$; **Д** інша відповідь.

6. Задано трапецію $ABCD$ з основами AD і BC, $AD=9$, $BC=1$, $\angle ACD=\angle ABC=90^\circ$. Знайдіть діагональ AC.

А 3; **Б** 4; **В** 6; **Г** 5; **Д** інша відповідь.

7. Дві медіани трикутника взаємно перпендикулярні і дорівнюють 6 і 9 см. Площа трикутника дорівнює …

А 27см^2; **Б** 18 см^2; **В** 36 см^2; **Г** 24 см^2; **Д** інша відповідь.

8. Основи трапеції дорівнюють 4 і 5 см, сума її гострих кутів — $\frac{\pi}{2}$, а її менша діагональ перпендикулярна до основ трапеції. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

А $2\sqrt{3}$ см; **Б** 5см; **В** $2\sqrt{5}$ см; **Г** 6 см; **Д** інша відповідь.

9. Висота ромба дорівнює 12 см, а менша діагональ дорівнює 15 см. Обчисліть площу ромба.

А 160 см^2; **Б** 100 см^2; **В** 150 см^2; **Г** 240 см^2; **Д** інша відповідь.

10. У трикутнику *ABC* на стороні *AC* взято точку *M*, а на стороні *BC* — точку *N*. Відрізки *AN* і *BM* перетинаються у точці *O*. Обчисліть площу трикутника *CMN*, якщо площі трикутників *OMA*, *OAB*, *OBN* відповідно дорівнюють 3, 2, 1 см^2.

А 45 см^2; **Б** 60 см^2; **В** 150см^2; **Г** 22,5 см^2; **Д** інша відповідь.

Частина II. СТЕРЕОМЕТРІЯ

4. ПРИЗМА

4.1. Теоретичні відомості

Призмою називається багатогранник, який складається з двох плоских багатокутників, що лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які з'єднують відповідні точки цих багатокутників.

$ABCDNA_1B_1C_1D_1N_1$ — призма (рис. 4.1).

Основи призми $ABCDN$ і $A_1B_1C_1D_1N_1$.

Бічні грані AA_1B_1B, BB_1C_1C … .

Бічні ребра AA_1, BB_1,… .

Висота призми HH_1 (відстань між площинами основ).

Діагональ призми C_1N (відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані).

Діагональний переріз AA_1C_1C (переріз призми площиною, яка проходить через два бічні ребра призми, що не належать одній грані).

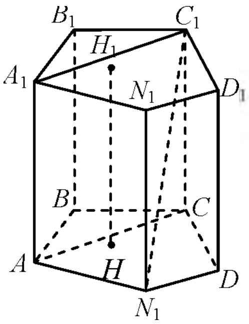


Рис. 4.1

Перпендикулярний переріз призми — переріз призми площиною, яка перпендикулярна до бічних ребер (або до їх продовження).

Властивості призми

1. Основи призми рівні і паралельні.
2. Бічні ребра рівні і паралельні.
3. Бічні грані — паралелограми.

Види призм

1. Пряма призма — призма, у якої бічні ребра перпендикулярні основам (рис. 4.2).

Висота прямої призми дорівнює бічному ребру:

$H = AA_1 = BB_1 = \ldots$.

Бічні грані прямої призми — прямокутники.

2. Похила призма — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основ (рис. 4.3).

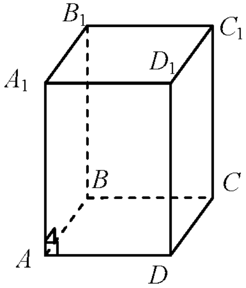


Рис. 4.2

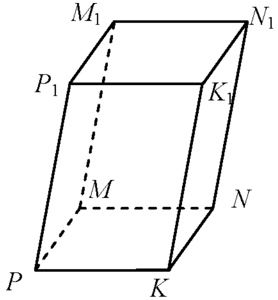


Рис. 4.3

3. Правильна призма — пряма призма, в основі якої лежить правильний багатокутник. Бічні грані такої призми — рівні прямокутники (рис. 4.4). Трикутна, чотирикутна, … , n-кутна призма — в основі призми лежить трикутник, чотирикутник, … , n-кутник.

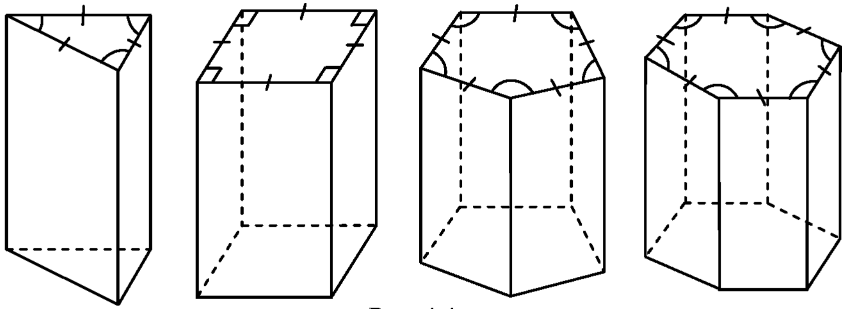


Рис. 4.4

Бічна поверхня похилої призми $S_{біч} = P_{пер}\, l$, де $P_{пер}$ — периметр перпендикулярного перерізу; l — довжина бічного ребра.

Повна поверхня похилої призми $S_{пов} = S_{біч} + 2S_{осн}$.

Об’єм похилої призми $V = S_{пер}l$, де $S_{пер}$ — площа перпендикулярного перерізу.

Бічна поверхня прямої призми $S_{біч} = P_{осн}\, H$, де $P_{осн}$ — периметр основи; H — висота призми.

Повна поверхня прямої призми $S_{пов} = S_{біч} + 2S_{осн}$.

Об’єм прямої призми $V = S_{осн}H$, де $S_{осн}$ — площа основи призми; H — висота призми.

Паралелепіпед

Паралелепіпедом називається призма, в основі якої лежить паралелограм.

Властивості паралелепіпеда

1. Усі грані паралелепіпеда — паралелограми.

2. Протилежні грані паралелепіпеда паралельні і рівні.

3. Усі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину поділяються навпіл.

O — середина A_1C, BD_1, AC_1, B_1D; O — центр симетрії паралелепіпеда (рис. 4.5).

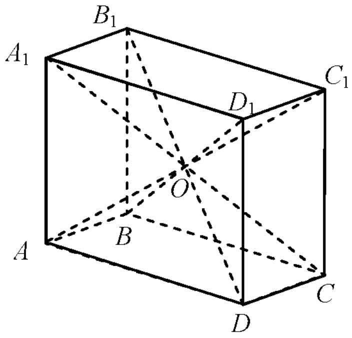


Рис. 4.5

Види паралелепіпедів

1. Прямий паралелепіпед — паралелепіпед, бічні ребра якого перпендикулярні до площини основ.

Чотири бічні грані прямого паралелепіпеда — прямокутники, а дві основи — паралелограми (рис. 4.6).

2. Похилий паралелепіпед — паралелепіпед, бічні ребра якого не перпендикулярні до площин основ.

Усі шість граней похилого паралелепіпеда — паралелограми. (рис. 4.7).

3. Прямокутний паралелепіпед — прямий паралелепіпед, основою якого є прямокутник.

Три ребра прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, називають його вимірами (рис. 4.8).

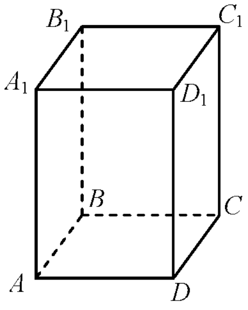


Рис. 4.6

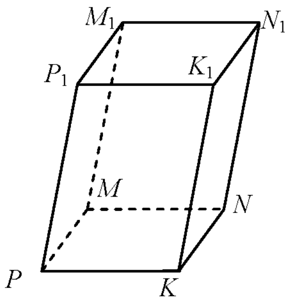


Рис. 4.7

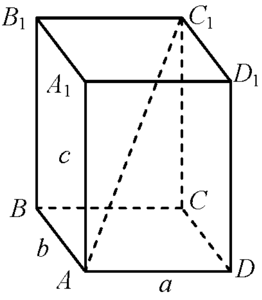


Рис. 4.8

Властивості прямокутного паралелепіпеда

1. Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.
2. Квадрат будь-якої діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2;\ (AC_1{}^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1{}^2).$$

Усі чотири діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні між собою.

3. $V_{\text{пр.пар}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc$.
4. $S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a + b)c$; $S_{\text{пов}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}$.

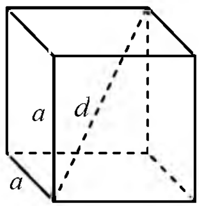


Рис. 4.9

Куб

Кубом називається прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні.

Властивості куба

1. Усі грані куба — квадрати (рис. 4.9).
2. $d = a\sqrt{3}$; $(d^2 = a^2 + a^2 + a^2)$,

де a — ребро куба; d — діагональ куба.

3. $V_{\text{куб}} = a^3$.
4. $S_{\text{біч.куб}} = 4a^2;\ S_{\text{пов.куб}} = 6a^2$.

4.2. Зразки розв'язування задач

Задача 1.

Основа прямої призми — трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містить сторону, до якої ці кути є прилеглими, дорівнює d і утворює з площиною основи кут γ. Обчисліть об'єм призми, якщо: $d = 12$ см; $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 60°$.

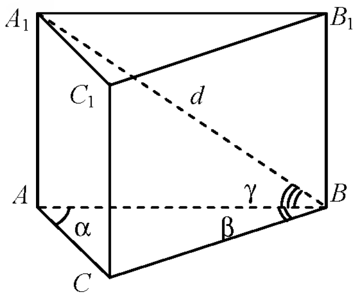


Рис. 4.10

Розв'язання. Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить трикутник ABC (рис. 4.10), у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B є $A_1B = d$. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тому за умовою $\angle A_1BA = \gamma$. Об'єм призми $V = S_{\text{осн}}H$.

Із трикутника $A_1BA(\angle A = 90°)$ випливає:

$$H = AA_1 A_1B \sin\angle A_1BA = d\sin\gamma;\ AB = A_1B\cos\angle A_1BA = d\cos\gamma.$$

За теоремою синусів для трикутника ABC маємо $\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$.

Звідси $AC=\frac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C}=\frac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(180^\circ-(\alpha+\beta))}=\frac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Тоді

$$S_{\text{осн}}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A=\frac{1}{2}d\cos\gamma\frac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

$$V=\frac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}d\sin\gamma=\frac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}.$$

Якщо d = 12 см; α = 30°; β = 60°; γ = 60°, маємо

$$V=\frac{12^3\cos^2 60^\circ\sin 60^\circ\sin 30^\circ\sin 60^\circ}{2\sin(30^\circ+60^\circ)}=81\text{ см}^3.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$; 81 см^3.

Задача 2. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині і радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону цього трикутника, утворює з площиною основи кут β. Обчисліть об’єм призми, якщо R = 6 см; α = 120°; β = 60°.

Розв’язання. Нехай основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ є трикутник ABC (рис. 4.11), у якому $AB = BC$, $\angle B=\alpha$, R — радіус описаного кола. Оскільки ребро BB_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі AB_1 на цю площину є сторона AB трикутника ABC. За умовою $\angle B_1AB=\beta$.

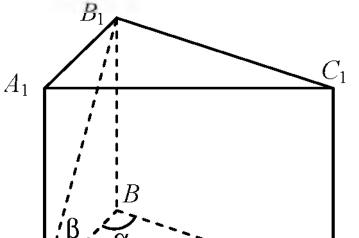


Рис. 4.11

У трикутнику ABC

$$\angle A=\angle C=(180^\circ-\alpha):2=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

Для трикутника ABC за наслідком з теореми синусів маємо $\frac{AB}{\sin\angle C}=2R$.

Звідси $AB = 2R\sin\angle C = 2R\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$.

$S_{осн} = \frac{1}{2}AB \cdot BC\sin\angle B = \frac{1}{2}AB^2\sin\angle B = \frac{1}{2}4R\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha =$

$= 2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

Із трикутника $AB_1B(\angle B = 90^\circ)$:

$H = BB_1 = AB\text{tg}\angle B_1AB = 2R\cos\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta$.

Отже, $V = S_{осн}H = 2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha 2R\cos\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta =$

$= 4R^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta\sin\alpha$.

Якщо $R = 6$ см; $\alpha = 120^\circ$; $\beta = 60^\circ$, то

$V = 4 \cdot 6^3 \cdot \cos^3 60^\circ \text{tg}60^\circ \sin 60^\circ = 864\frac{1}{8}\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 162$ (см^3).

В і д п о в і д ь: $4R^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\text{tg}\beta\sin\alpha$; 162 см^3.

Задача 3. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник з кутом β при основі і радіусом вписаного кола *r*. Діагональ бічної грані, що містить основу цього трикутника, утворює з площиною основи призми кут α. Визначте об'єм призми.

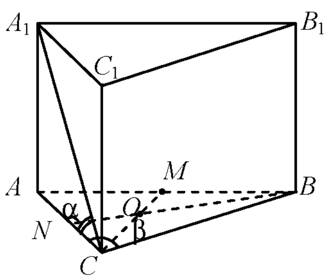


Рис. 4.12

Розв'язання. Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить трикутник ABC (рис. 4.12), де $AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA = \beta$, AC — основа трикутника ABC. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1C на цю площину є сторона AC. Тому за умовою $\angle A_1CA = \alpha$.

Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, є точкою перетину бісектрис BN і CM. У рівнобедреному трикутнику ABC бісектриса BN є його висотою і медіаною. $ON \perp AC$, ON — радіус вписаного кола за умовою $ON = r$.

Із трикутника $ONC(\angle N = 90^\circ)$ випливає: $\angle NCO = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\beta}{2}$;

$NC = NO\operatorname{ctg}\angle NCO = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$; $AC = 2NC = 2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

Із трикутника $BNC(\angle N = 90^\circ)$ випливає:

$BN = NC\operatorname{tg}\angle NCB = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta$.

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}AC \cdot BN = \frac{1}{2}2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta = r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta$.

Із трикутника $AA_1C(\angle A = 90^\circ)$ маємо:

$H = AA_1 = AC\operatorname{tg}\angle ACA_1 = 2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Тоді $V = S_{\text{осн}}H$;

$V = r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta\, 2r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha = 2r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$.

Відповідь: $2r^3\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 4. Основою похилого паралелепіпеда є квадрат із стороною a, а бічні грані — ромби з гострими кутами α. Обчисліть об'єм паралелепіпеда, якщо $a = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язання. Нехай основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ (рис. 4.13).

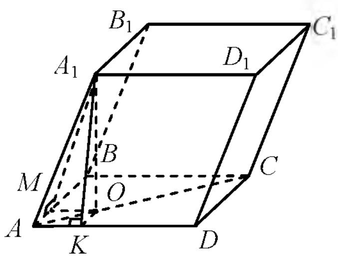


Рис. 4.13

За умовою $AB = a$, $\angle A = 90^\circ$. AA_1D_1D — ромб, в якого за умовою $\angle A_1AD = \angle A_1D_1D = \alpha$. З точки A_1 опустимо перпендикуляри на основу і сторони основи: $A_1O \perp (ABC)$; $A_1K \perp AD$, $A_1M \perp AB$.

Тоді OK і OM — проекції похилих A_1K і A_1M на площину основи.

За теоремою про три перпендикуляри: $OK \perp AD$, $OM \perp AB$.

Трикутники AA_1K і AA_1M рівні між собою за гіпотенузою і гострим кутом. Звідси випливає, що $AK = AM$.

Прямокутні трикутники AKO і AMO рівні за катетом $AK = AM$ і спільною гіпотенузою AO.

Тому $\angle MAO = \angle KAO$, отже, AO — бісектриса $\angle BAD$.

Оскільки AA_1D_1D — ромб, то $AA_1 = AD = a$.

Із трикутника $A_1AK(\angle K = 90^\circ)$ випливає:

$AK = AA_1 \cos\angle A_1AK = a\cos\alpha$;

$A_1K = AA_1 \sin\angle A_1AK = a\sin\alpha$.

Із трикутника $AKO(\angle K = 90^\circ)$ маємо:

$\angle OAK = 45^\circ, AK = KO = a\cos\alpha$, а з трикутника $A_1OK(\angle O = 90^\circ)$

$A_1O^2 = A_1K^2 - KO^2$.

$$H = A_1O = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha} = a\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} =$$

$$= a\sqrt{-(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = a\sqrt{-\cos 2\alpha};$$

$-\cos 2\alpha > 0$; $90^\circ < 2\alpha < 180^\circ$; $\cos 2\alpha < 0$; $45^\circ < \alpha < 90^\circ$;

$V = S_{осн}H = a^2a\sqrt{-\cos 2\alpha} = a^3\sqrt{-\cos 2\alpha}$, якщо $45^\circ < \alpha < 90^\circ$, $\cos 2\alpha < 0$.

Якщо $a = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$, $V = 6^3\sqrt{-\cos 120^\circ} = 216\sqrt{\dfrac{1}{2}} = 108\sqrt{2}$ (см^3).

Відповідь: $a^3\sqrt{-\cos 2\alpha}$, при $45^\circ < \alpha < 90^\circ$; $108\sqrt{2}$ см^3.

Задача 5. В основі прямої призми лежить ромб з більшою діагоналлю d. Більша діагональ призми утворює з площиною основи кут α, а діагональ бічної грані — кут β. Обчисліть бічну поверхню призми, якщо $d = 6$ см; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$.

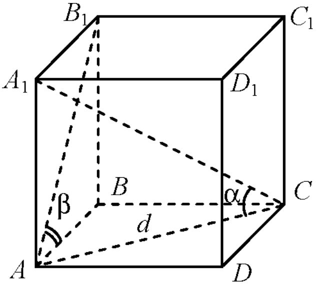


Рис. 4.14

Розв'язання. Нехай в основі прямої призми лежить ромб $ABCD$ (рис. 4.14). AC — більша діагональ, за умовою $AC = d$.

Оскільки $A_1A \perp (ABC)$, то AC — проекція діагоналі A_1C на площину основи. Тому за умовою $\angle A_1CA = \alpha$. Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, то AB — проекція діагоналі AB_1 на площину основи, тому за умовою $\angle B_1AB = \beta$.

Із трикутника $AA_1C(\angle A = 90°)$ випливає:

$AA_1 = AC\text{tg}\,\angle A_1CA = d\ \text{tg}\alpha;$

$BB_1 = AA_1 = H = d\,\text{tg}\alpha.$

Із трикутника $B_1BA(\angle B = 90°)$ маємо:

$AB = BB_1\ \text{ctg}\angle B_1AB = d\ \text{tg}\alpha\ \text{ctg}\beta;$

$S_б = P_{осн}H\ ;$

$S_б = 4 \cdot AB \cdot AA_1 = 4d\,\text{tg}\alpha\ \text{ctg}\beta\, d\ \text{tg}\alpha = 4d^2\text{tg}^2\alpha\ \text{ctg}\beta.$

Якщо $d = 6$ см; $\alpha = 60°; \beta = 45°$, то маємо

$S_б = 4 \cdot 6^2 \cdot \text{tg}^2 60°\text{ctg}45° = 432$ (см^2).

Відповідь: $4d^2\text{tg}^2\alpha\ \text{ctg}\beta$; 432 см^2.

Задача 6. Основою похилої призми є рівносторонній трикутник із стороною a, одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, менша діагональ якого дорівнює d. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — призма (рис. 4.15). Основою призми є рівносторонній трикутник ABC, $AB = a$.

За умовою грань AA_1B_1B — ромб (рис. 4.16), у якого A_1B — менша діагональ, $A_1B = d$.

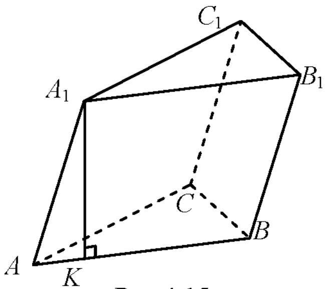


Рис.4.15

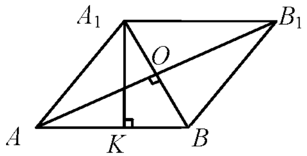


Рис. 4.16

Щоб знайти висоту призми, проведемо висоту A_1K ромба AA_1B_1B. Оскільки грань AA_1B_1B перпендикулярна до площини основи, то A_1K є також висотою призми: $A_1K = H$. Нехай точка O — точка перетину діагоналей ромба, тоді

$$S_{AA_1B_1B} = AB \cdot A_1K = aH .$$

З іншого боку, $S_{AA_1B_1B} = A_1B \cdot AO$, де $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} =$
$= \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}$; $S_{AA_1B_1B} = d\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}$. Отже, $aH = d\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}$, звідси
$H = \frac{d}{a}\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}$; $V = S_{\text{осн}}H$, де $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{d}{a}\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}} = \frac{ad\sqrt{3}}{8}\sqrt{4a^2 - d^2}.$$

Відповідь: $\frac{ad\sqrt{3}}{8}\sqrt{4a^2 - d^2}$.

Задача 7. У правильній шестикутній призмі більша діагональ дорівнює $4\sqrt{3}$ см і нахилена до основи під кутом $60°$. Обчисліть площу повної поверхні призми.

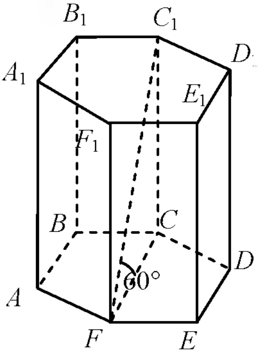


Рис. 4.17

Розв'язання. Нехай основою правильної призми (рис. 4.17) є шестикутник $ABCDEF$, більша діагональ якого FC. Оскільки $C_1C \perp (ABC)$, тоді FC_1 — більша діагональ призми. За умовою $FC_1 = 4\sqrt{3}$ см; FC — проекція похилої FC_1 на площину основи, тому $\angle C_1FC = 60°$; $S_n = 2S_{\text{осн}} + S_б$.

Із трикутника $C_1FC(\angle C = 90°)$ випливає:

$C_1C = C_1F \sin\angle C_1FC = 4\sqrt{3}\sin 60° = 6$ (см);

$FC = C_1F\cos\angle C_1FC = 4\sqrt{3}\cos 60° = 2\sqrt{3}$ (см).

Відомо, що трьома більшими діагоналями правильний шестикутник розбивається на шість рівних рівносторонніх трикутників, сторона яких дорівнює половині діагоналі: $AB = \frac{FC}{2} = \sqrt{3}$ (см). Тому $S_{\text{осн}} = 6\frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ (см^2);

$P = 6AB = 6\sqrt{3}$ (см); $S_б = P \cdot CC_1 = 6\sqrt{3} \cdot 6 = 36\sqrt{3}$ (см^2);

$S_n = 2\frac{9\sqrt{3}}{2} + 36\sqrt{3} = 45\sqrt{3}$ (см^2).

Відповідь: $45\sqrt{3}$ (см^2).

Задача 8. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a, кут між площинами бічних граней φ, більша діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом β. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай основою прямого паралелепіпеда (рис. 4.18) є ромб $ABCD$, у якого $AB = a$; AC і BD — його діагональ; O — точка їх перетину, $AC > BD (\angle BAD < \angle ABC)$.

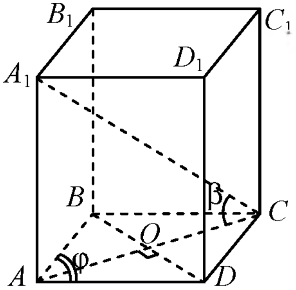


Рис. 4.18

Оскільки $A_1A \perp (ABC)$, то $A_1A \perp AB$, $A_1A \perp AD$; тому $\angle BAD$ — кут між площинами бічних граней, $\angle BAD = \varphi$.

AC — проекція діагоналі A_1C на площину основи, тому за умовою $\angle A_1CA = \beta$.

$V = S_{осн}H$; $S_{осн} = S_{ABCD} = AB^2 \sin\angle BAD = a^2 \sin\varphi$.

За властивістю діагоналей ромба $\angle AOD = 90°$;

$$\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\varphi}{2};\ AC = 2AO.$$

Із трикутника $AOD (\angle O = 90°)$ випливає:

$AO = AD\cos\angle OAD = a\cos\frac{\varphi}{2}$; $AC = 2a\cos\frac{\varphi}{2}$, а з трикутника $A_1AC (\angle A = 90°)$: $H = AA_1 = AC\,\mathrm{tg}\angle A_1CA = 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta$.

$$V = a^2\sin\varphi\, 2a\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta = 2a^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta.$$

Відповідь: $2a^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{tg}\beta.$

Задача 9. Основа прямої призми — трикутник, дві сторони якого b, а кут між ними α.

Через одну з цих сторін основи і протилежну вершину другої основи призми проведено переріз, який утворює з основами призми кут φ.

Обчисліть об'єм призми, якщо $b = 12$ см; $\alpha = 45°; \beta = 60°$.

Розв'язання. Нехай основою прямої призми (рис. 4.19) є трикутник ABC, у якого $AB = AC = b$, $\angle A = \alpha$.

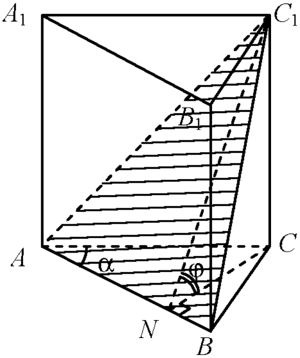


Рис. 4.19

Проведемо переріз призми через сторону AB однієї основи і вершину C_1 — другої; $CC_1 \perp (ABC)$.

Проведемо $CN \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри;

$C_1N \perp AB$ і за умовою $\angle C_1NC = \varphi$.

Із трикутника $ANC(\angle N = 90°)$ випливає: $CN = AC \sin \angle A = b \sin \alpha$, а з трикутника $C_1NC(\angle C = 90°)$:

$H = CC_1 = CN \operatorname{tg} \angle C_1NC = b \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi$.

$$S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle A = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha;$$

$$V = S_{осн} H;$$

$$V = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha b \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} b^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

Якщо $b = 12$ см; $\alpha = 45°$; $\beta = 60°$, то

$$V = \frac{1}{2} 12^3 \sin^2 45° \operatorname{tg} 60° = 864 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 432\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2} b^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$; $432\sqrt{3}$ (см^3).

Задача 10. Висота прямої трикутної призми дорівнює 5 м, її об'єм — 24 м^3. Площі бічних граней відносяться, як 17 : 17 : 16. Знайдіть сторони основи.

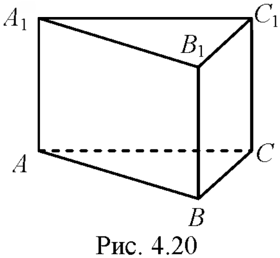


Рис. 4.20

Розв'язання. Нехай основою прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4.20) є трикутник ABC. AA_1 — висота призми; $AA_1 = 5$ м; $V = 24$ м^3.

За умовою

$$S_{AA_1B_1B} : S_{AA_1C_1C} : S_{BB_1C_1C} = 17 : 17 : 16.$$

$$S_{AA_1B_1B} = AA_1 \cdot AB; \quad S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC;$$

$S_{BB_1C_1C} = AA_1 \cdot BC$, тоді

$$S_{AA_1B_1B} : S_{AA_1C_1C} : S_{BB_1C_1C} = AB : AC : BC = 17 : 17 : 16.$$

Нехай $AB = 17x$ м, $AC = 17x$ м, $BC = 16x$ м, де $x > 0$.

$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$; $24 = S_{\Delta ABC} \cdot 5$, звідси

$S_{\Delta ABC} = \frac{24}{5} = 4,8$ (м²). $p = \frac{P}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} = 25x$ (м).

За формулою Герона маємо:

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$4,8 = \sqrt{25x(25x-17x)(25x-17x)(25x-16x)}$;

$4,8 = 5 \cdot 8 \cdot 3x^2$; $x^2 = \frac{1}{25}$; $x = \frac{1}{5}$.

Тому $AB = \frac{17}{5} = 3,4$ м, $AC = AB = 3,4$ м, $BC = \frac{16}{5} = 3,2$ м.

Відповідь: 3,4 м; 3,4 м; 3,2 м.

Задача 11. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 1 : 7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 і 37 см. Визначте площу повної поверхні паралелепіпеда.

Розв'язання. Оскільки протилежні грані прямокутного паралелепіпеда — рівні прямокутники, то заданими є довжини діагоналей суміжних бічних граней.

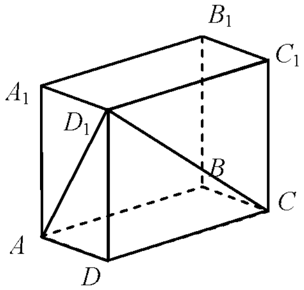


Рис. 4.21

Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.21) відрізки D_1A та D_1C — діагоналі суміжних бічних граней: $D_1A = 13$ см, $D_1C = 37$ см. Сторони DA і DC є ортогональними проекціями на площину основи діагоналей D_1A та D_1C відповідно. Оскільки більшій похилій відповідає довша проекція, то $AD < AC$ і $DA : CD = 1 : 7$. Нехай $AD = k$ (см), $CD = 7k$ (см), $k > 0$, $D_1D = H$ (см). Тоді з трикутників D_1DC і $D_1DA (\angle D = 90°)$ за теоремою Піфагора отримаємо:

$$\begin{cases} 13^2 = H^2 + k^2; \\ 37^2 = H^2 + 49k^2. \end{cases}$$

Звідси $37^2 - 13^2 = 48k^2$; $k = 5$.

Отже, $AD = 5$ см, $CD = 35$ см. $H = \sqrt{13^2 - k^2} = 12$ (см).

Тоді $S_{осн} = AD \cdot DC = 5 \cdot 35 = 175$ (см²);

$P = 2(AD + CD) = 2(5 + 35) = 80$ (см);

$S_б = P \cdot H = 80 \cdot 12 = 960$ (см^2);

$S_п = S_б + 2S_{осн} = 960 + 2 \cdot 175 = 1310$ (см^2).

Відповідь: 1310 см^2.

Задача 12. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

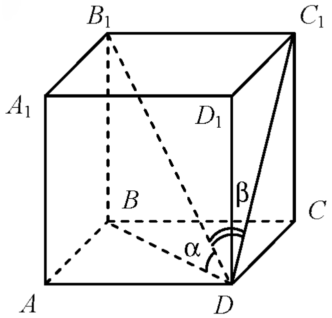


Рис. 4.22

Розв'язання. Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4.22) діагональ $B_1D = d$. Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, а $B_1C_1 \perp (D_1C_1C)$, то $\angle B_1DB$ і $\angle B_1DC_1$ — це кути, які діагональ B_1D утворює з площиною основи та з площиною бічної грані призми відповідно.

Згідно з умовою $\angle B_1DB = \alpha$, а $\angle B_1DC_1 = \beta$; $V = S_{осн}H$. Із трикутника $B_1BD(\angle B = 90°)$ маємо:

$B_1B = H = B_1D \sin\angle D = d \sin\alpha$;

$BD = B_1D\cos\alpha = d\cos\alpha$.

Із трикутника $B_1C_1D(\angle C = 90°)$ випливає:

$B_1C_1 = BC = B_1D \sin\angle D = d\sin\beta$, а з трикутника

$BCD(\angle C = 90°): BC^2 + CD^2 = BD^2$;

$d^2\sin^2\beta + CD^2 = d^2\cos^2\alpha$; $CD = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Тепер знаходимо: $S_{осн} = BC \cdot CD = d^2 \sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$;

$V = d^2\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}\, d\ \sin\alpha = d^3 \sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Відповідь: $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$.

Задача 13. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з катетами 6 і 8 дм. Через гіпотенузу однієї основи і вершину прямого кута другої основи проведено площину. Обчисліть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює $\sqrt{1201}$ дм^2.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — пряма трикутна призма $A_1C_1 = 6$ дм, $B_1C_1 = 8$ дм, $\angle C_1 = 90°$, CC_1 — висота призми (рис. 4.23);

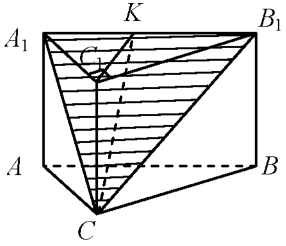


Рис. 4.23

$$V = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot C_1B_1 \cdot CC_1 = 24\, CC_1.$$

Проводимо $C_1K \perp A_1B_1$, отримаємо $CK \perp A_1B_1$, CK — висота ΔCA_1B_1, тому

$$CK = \frac{2S_{\Delta A_1CB_1}}{A_1B_1} = \frac{2\sqrt{1201}}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\sqrt{1201}}{5} \text{ (дм)}; \ C_1K = \frac{2S_{\Delta A_1B_1C_1}}{A_1B_1} =$$

$$= \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5} \text{ (дм)}.$$ У трикутнику CC_1K ($\angle C_1 = 90°$):

$$CC_1 = \sqrt{CK^2 - C_1K^2} = \sqrt{\frac{1201}{25} - \frac{576}{25}} = \frac{\sqrt{625}}{5} = \frac{25}{5} = 5 \text{ (дм)}.$$

Отже, $V = 24 \cdot 5 = 120$ (дм^3).

Відповідь: 120 дм^3.

Задача 14. Обчисліть об'єм похилої трикутної призми, площа однієї з бічних граней якої S, а відстань від площини цієї грані до протилежного ребра d.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — похила трикутна призма (рис. 4.24) $S_{CC_1B_1B} = S$; $KD \perp (CC_1B)$, $KD = d$. Через ребро BC проведемо площину, яка перпендикулярна до ребра AA_1 — це площина KCB. Проведемо перпендикуляр $KD \perp BC$. Тоді $V = S_{\text{пер}} l$, де $S_{\text{пер}}$ — площа перпендикулярного перерізу до ребра l. $l = AA_1$, тобто $V = S_{\Delta KBC} CC_1$. Оскільки $AA_1 \perp (KCB)$ і $CC_1 \parallel AA_1$, тоді $CC_1 \perp (KCB)$.

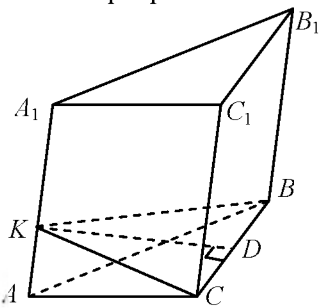


Рис. 4.24

Отже, $V = \frac{1}{2} KD \cdot BC \cdot CC_1 = \frac{1}{2} dS$.

Відповідь: $\frac{1}{2} dS$.

Задача 15. Основа похилої призми — паралелограм зі сторонами 3 і 6 дм та гострим кутом 45°. Бічне ребро призми дорівнює 4 дм і нахилено до площини основи під кутом 30°. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — похила призма (рис. 4.25), $ABCD$ — паралелограм, $AD = 3$ дм, $AB = 6$ дм, $\angle BCD = \angle BAD = 45°$, $AA_1 = 4$ дм. Проведемо $A_1O \perp (ABC)$, тоді $\angle A_1AO = 30°$. $A_1O = H$.

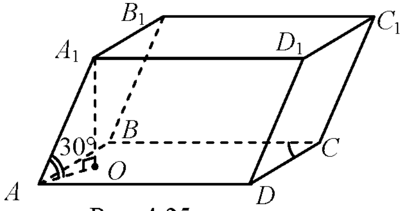


Рис. 4.25

Об'єм знаходимо за формулою $V = SH$, де $S = ab\sin\alpha$,

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 45° = 3 \cdot 6\frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}\ (\text{см}^2).$$

Оскільки $A_1O = \frac{1}{2}AA_1 = 2$ (см) (катет, що лежить проти кута 30°), то $V = S_{ABCD}A_1O = 9\sqrt{2} \cdot 2 = 18\sqrt{2}$ (дм³).

Відповідь: $18\sqrt{2}$ дм³.

Задача 16. Основа прямої призми — ромб з меншою діагоналлю, що дорівнює a і гострим кутом 2α. Через меншу діагональ нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи проведено переріз призми площиною. Перерізом є трикутник з кутом α при вершині. Визначте об'єм призми.

Розв'язання. Нехай основою прямої призми (рис. 4.26) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб $ABCD$, $AC = a$, $\angle ABC = 2\alpha$. Оскільки $AB_1 = CB_1$ — похилі, що мають рівні проекції AB і CB, то трикутник AB_1C рівнобедрений і $\angle AB_1C = \alpha$. Нехай O — точка перетину діагоналей AC і BD $(AC < BD)$, тоді

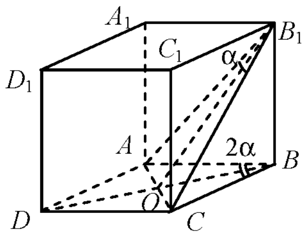


Рис. 4.26

$$AO = OC = \frac{a}{2},\ \angle OBC = \alpha.$$

Медіана B_1O у рівнобедреному трикутнику AB_1C є бісектрисою і висотою. Тому $\angle OB_1C = \frac{\alpha}{2}$, $B_1O \perp AC$.

Із трикутника $BOC(\angle O = 90°)$ випливає:

$$BC = \frac{OC}{\sin\angle B} = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

$$S_{\text{осн}} = BC^2 \sin 2\alpha = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a^2}{2}\text{ctg}\alpha.$$

Із трикутника $B_1OC(\angle O = 90°): B_1C = \frac{OC}{\sin\angle B_1} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, а з трикутника $B_1BC(\angle B = 90°)$:

$$B_1B = H = \sqrt{B_1C^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{a^2}{4\sin^2\alpha}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тоді

$$V = S_{\text{осн}}H = \frac{a^3\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\alpha}{2}}}{4\sin^2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1} =$$

$$= \frac{a^3\cos\alpha}{4\sin^2\alpha}\sqrt{\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1} = \frac{a^3 ctg\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\frac{a^3\text{ctg}\alpha\sqrt{1+2\cos\alpha}}{4\sin\alpha}$.

Задача 17. Основа прямої призми — рівнобічна трапеція $ABCD$ зі сторонами $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площа діагонального перерізу призми дорівнює 180 см^2. Обчисліть повну поверхню призми.

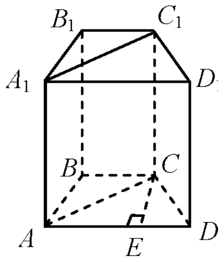


Рис. 4.27

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма (рис. 4.27). За умовою задачі $AB = CD = 13$ см, $BC = 11$ см, $AD = 21$ см. Площа діагонального перерізу ACC_1A_1 дорівнює 180 см^2. Оскільки призма пряма, то AA_1C_1C — прямокутник і його площа $S = AC \cdot AA_1$. У трапеції $ABCD$ проводимо висоту CE, тоді $DE = \dfrac{AD - BC}{2} = 5$ та $AE = AD - DE = 16$. Із прямокутних трикутників CDE і ACE знаходимо: $CE = \sqrt{CD^2 - DE^2} = 12$ (см), $AC = \sqrt{AE^2 + CE^2} = 20$ (см). Тоді $AA_1 = \dfrac{S}{AC} = \dfrac{180}{20} = 9$ (см).

Визначаємо периметр і площу основи призми:

$P = AB + BC + CD + AD = 58$ (см);

$S_{осн} = \dfrac{BC + AD}{2} CE = 192$ (см^2).

Отже, $S_{пов} = S_{біч} + 2S_{осн} = P \cdot AA_1 + 2S_{осн} = 58 \cdot 9 + 2 \cdot 192 = 906$ (см)^2.

Відповідь: 906 см^2.

Задача 18. Основа похилого паралелепіпеда — паралелограм $ABCD$, в якого $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм і $BD = 6$ дм. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 1 м^2. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — похилий паралелепіпед (рис. 4.28), площина діагонального перерізу якого AA_1C_1C перпендикулярна до площини основи. Крім того, за умовою $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм і $BD = 6$ дм, $S_{ACC_1A_1} = 1$ м^2 = 100 дм^2.

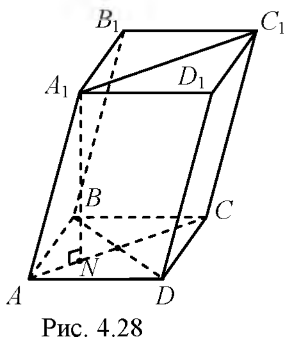


Рис. 4.28

За властивістю сторін і діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$, звідки $AC = 4\sqrt{5}$ дм. Проводимо висоту $A_1N = H$ паралелепіпеда $\left(N_1 \in AC\right)$ і визначимо її з паралелограма AA_1C_1C:

$$H=\frac{S_{AA_1C_1C}}{AC}=\frac{100}{4\sqrt{5}}=5\sqrt{5}\text{ (дм)};\ S_{\text{осн}}=2S_{\Delta ABD}.$$

Площу трикутника ABD визначаємо за формулою Герона:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $p=\frac{1}{2}(3+7+6)=8$ (дм);

$S_{\Delta ABD}=\sqrt{8\cdot 5\cdot 1\cdot 2}=4\sqrt{5}$ (дм^2).

Тому $S_{\text{осн}}=8\sqrt{5}$ (дм^2).

Отже, $V=S_{\text{осн}}H=8\sqrt{5}\cdot 5\sqrt{5}=200$ дм$^3=0,2$ (м^3).

Відповідь: 0,2 м^3.

4.3. Тематичне тестування

Рівень I

1. Основа призми — рівносторонній трикутник, площа якого дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Обчисліть об'єм призми, якщо її висота в $\sqrt{3}$ раз більша, ніж сторона основи.

А 162 см^3; **Б** $54\sqrt{3}$ см^3; **В** $10\sqrt{3}$ см^3; **Г** 120см^3; **Д** інша відповідь.

2. Радіус кола, вписаного в основу правильної трикутної призми, дорівнює $2\sqrt{3}$ см, бічне ребро цієї призми — 10 см. Обчисліть бічну поверхню призми.

А 240 см^2; **Б** $60\sqrt{3}$ см^2; **В** 360 см^2; **Г** $120\sqrt{3}$ см^2; **Д** інша відповідь.

3. Основа прямої призми — ромб зі стороною 7,5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Обчисліть бічну поверхню цієї призми.

А 300 см^2; **Б** 150 см^2; **В** 75 см^2; **Г** 100 см^2; **Д** інша відповідь.

4. Висота основи правильної трикутної призми дорівнює $2\sqrt{3}$ см, бічне ребро призми — 10 см. Обчисліть бічну поверхню призми.

А 180 см^2; **Б** 120 см^2; **В** 60 см^2; **Г** $60\sqrt{3}$ см^2; **Д** інша відповідь.

5. Обчисліть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони основи 6 і 8 см, а його діагональ нахилена до площини основи під кутом $45°$.

А 480 см^3; **Б** $96\sqrt{7}$ см^3; **В** $240\sqrt{2}$ см^3; **Г** 240 см^3; **Д** інша відповідь.

6. Площа діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда дорівнює 35 см^3. Обчисліть площу бічної поверхні паралелепіпеда, якщо сторони основи — 3 і 4 см.

А 98 см^2; **Б** 49 см^2; **В** 84 см^2; **Г** 96 см^2; **Д** інша відповідь.

7. Об'єм прямої призми, основа якої — правильний трикутник, дорівнює $18\sqrt{3}$ см^3, а її висота — 8 см. Знайдіть сторону основи призми.

А $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ см; **Б** 3 см; **В** $2\sqrt{3}$ см; **Г** $3\sqrt{3}$ см; **Д** інша відповідь.

8. У результаті гомотетії діагональ куба збільшилася втричі. З'ясуйте, у скільки разів збільшиться його об'єм.

А у тричі; **Б** у 9 разів; **В** у 6 разів; **Г** у 27 разів; **Д** інша відповідь.

9. Ортогональною проекцією одного з бічних ребер похилої чотирикутної призми є діагональ квадрата її основи. Укажіть кількість площин симетрії цієї призми.

А жодної; **Б** одна; **В** дві; **Г** три; **Д** інша відповідь.

10. Площа діагонального перерізу куба дорівнює 16 см^2. Знайдіть об'єм куба.

А $32\sqrt[4]{2}$ см^2; **Б** $64\sqrt{2}$ см^3; **В** 64 см^3; **Г** 32 см^2; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Об'єм куба, діагональ якого $\sqrt{3}$ см, дорівнює … .

А 8 см^3; **Б** $3\sqrt{3}$ см^3; **В** $2\sqrt{2}$ см^3; **Г** 1 см^3; **Д** інша відповідь.

2. У скільки разів потрібно збільшити кожен з трьох вимірів прямокутного паралелепіпеда, щоб об'єм його збільшився удвічі?

А У 8; **Б** У 2; **В** У $\sqrt{2}$; **Г** У $\sqrt[3]{2}$; **Д** інша відповідь.

3. Сторона основи прямокутного паралелепіпеда з квадратною основою *a,* а його діагональ нахилена до площини основи під кутом α. Об'єм паралелепіпеда дорівнює … .

А $\sqrt{2}a^3\mathrm{ctg}\alpha$; **Б** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3\mathrm{ctg}\alpha$; **В** $\sqrt{2}a^3\mathrm{tg}\alpha$; **Г** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3\mathrm{tg}\alpha$; **Д** інша відповідь.

4. Розгорткою бічної поверхні правильної трикутної призми є квадрат зі стороною 6 см. Об'єм призми дорівнює… .

А 8 см^3; **Б** $6\sqrt{3}$ см^3; **В** $6\sqrt{3}$ см^3; **Г** 12 см^3; **Д** інша відповідь.

5. Відстань від центра куба до ребра дорівнює 1 см. Об'єм куба дорівнює… .

А $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ см^3; **Б** $2\sqrt{2}$ см^3; **В** 8 см^3; **Г** 1 см^3; **Д** інша відповідь.

6. Кожне ребро похилого паралелепіпеда має довжину 1 см. Бічне ребро утворює із площиною основи кут 60°. Гострий кут основи також дорівнює 60°. Об'єм паралелепіпеда дорівнює… .

А $\frac{3}{8}$ см^3; **Б** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см^3; **В** $\frac{3}{4}$ см^3; **Г** $\frac{1}{4}$ см^3; **Д** інша відповідь.

7. Площі основи і бічної грані правильної чотирикутної призми відповідно дорівнюють 9 і 12 м^3. Об'єм призми дорівнює… .

А 108 м^3; **Б** 54 м^3; **В** 36 м^3; **Г** 72 м^3; **Д** інша відповідь.

8. Площа однієї з бічних граней похилої трикутної призми дорівнює S, а відстань від цієї грані до протилежного ребра дорівнює d . Об'єм призми дорівнює… .

А $\frac{1}{2}Sd$; **Б** Sd ; **В** $2Sd$; **Г** $\frac{1}{6}Sd$; **Д** інша відповідь.

9. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2, 4, 8 м^3. Об'єм паралелепіпеда дорівнює … .

А 64 м^3; **Б** 16 м^3; **В** $2\sqrt{2}$ м^3; **Г** 8 м^3; **Д** інша відповідь.

10. Ребро куба, яке дорівнює 2 см, збільшили на 2 см. На скільки збільшилася площа його повної поверхні?

А на 4 см^3; **Б** на 12 см^2; **В** на 24 см^2; **Г** на 72 см^2; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. У правильній трикутній призмі радіус описаного навколо основи кола дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Обчисліть висоту призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює 13 см.

А 8 см; **Б** 4 см; **В** 5 см; **Г** 6 см; **Д** інша відповідь.

2. Знайдіть тангенс кута між діагоналлю куба і площиною однієї з його граней.

А 1; **Б** $\sqrt{2}$; **В** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **Г** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **Д** інша відповідь.

3. Основа прямої призми — ромб із стороною 5 см і діагоналлю 8 см. Обчисліть об'єм призми, якщо діагональ бічної грані дорівнює 13 см.

А 432 см^2; **Б** 288 см^2; **В** 144 см^2; **Г** 488 см^2; **Д** інша відповідь.

4. Основа прямої призми — прямокутник зі стороною 6 см і радіусом описаного кола 5 см. Обчисліть об'єм призми, якщо її діагональ 26 см.

А 384 см^3; **Б** 960 см^3; **В** 1152 см^3; **Г** 892 см^3; **Д** інша відповідь.

5. Основа прямої призми — прямокутна трапеція з основами 9 і 14 см і більшою бічною стороною 13 см. Обчисліть об'єм призми, якщо менша її діагональ 25 см.

А 3000 см^3; **Б** 1800 см^3; **В** 2760 см^3; **Г** 1200 см^3; **Д** інша відповідь.

6. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 9 см, а діагональ бічної грані — $\sqrt{65}$ см. Обчисліть об'єм призми.

А 112 см^3; **Б** 300 см^3; **В** 288 см^3; **Г** 308 см^3; **Д** інша відповідь.

7. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 9 см, а діагональ основи — $4\sqrt{2}$ см. Обчисліть повну поверхню призми.

А 144 см^2; **Б** 180 см^2; **В** 112 см^2; **Г** 198 см^2; **Д** інша відповідь.

8. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $4\sqrt{3}$ см^2, а діагональ бічної грані — 5 см. Обчисліть бічну поверхню призми.

А 96 см^2; **Б** 144 см^2; **В** 48 см^2; **Г** 36 см^2; **Д** інша відповідь.

9. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 і $\sqrt{18}$ см і утворюють кут $45°$, а менша діагональ паралелепіпеда — кут $45°$ з площиною основи. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

А $105\sqrt{2}$ см^3; **Б** 105 см^3; **В** $63\sqrt{2}$ см^3; **Г** 120 см^3; **Д** інша відповідь.

10. Основою прямої призми є прямокутник, уписаний у коло радіусом 6 см. Менша сторона прямокутника стягує дугу кола, яка дорівнює $60°$. Обчисліть об'єм призми, якщо площа її бічної поверхні дорівнює сумі площ основ.

А $324\left(\sqrt{3}-1\right)$ см^3; **Б** $108\left(2\sqrt{3}-3\right)$ см^3; **В** 108 см^3; **Г** $10\sqrt{3}$ см^3; **Д** інша відповідь.

4.4. Задачі для самостійної роботи

1. Основа прямої призми — трикутник з кутами α і β та радіусом описаного кола R. Діагональ бічної грані, що містить сторону, до якої ці кути є прилеглими, утворює з площиною основи кут γ. Визначте об'єм призми.

Відповідь: $4R^3 \sin\alpha \sin\beta \sin^2(\alpha+\beta)\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

2. Основа прямої призми — прямокутний трикутник з гострим кутом β. Діагональ більшої грані, що містить гіпотенузу, дорівнює d утворює з площиною основи кут α. Визначте об'єм призми.

Відповідь: $\dfrac{1}{4}d^2 \cos^2\alpha \sin\alpha \sin 2\beta$.

3. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми утворює з бічним ребром кут β. Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R. Обчисліть бічну поверхню призми, якщо $R = 10$ см; $\beta = 60°$.

Відповідь: $6R^2 \sin 2\beta$; $300\sqrt{3}$ см^2.

4. Основа прямої призми — рівнобічна трапеція з бічною стороною a і гострим кутом α. Діагоналі цієї трапеції взаємно перпендикулярні. Діагональ призми утворює з площиною основи кут γ. Обчисліть об'єм призми, якщо $a = 8$ см; $\alpha = 60°$; $\gamma = 60°$.

Відповідь: $\sqrt{2}a^3 \sin^3\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma$; $576\sqrt{2}$ см^3.

5. Основа прямої призми — прямокутна трапеція з тупим кутом β. Менша діагональ трапеції є бісектрисою тупого кута. Менша діагональ призми d утворює з площиною основи кут α. Визначте об'єм призми.

Відповідь: $\dfrac{1}{4}d^3 \cos^2\alpha \sin\alpha (2+\cos\beta)\,\mathrm{tg}\dfrac{\beta}{2}$.

6. Площі діагональних перерізів похилого паралелепіпеда 105 і 135 см^2, площі бічних граней відносяться, як 4 : 7. Обчисліть площу бічної поверхні.

Відповідь: 330 см^2.

7. Об'єм правильної восьмикутної призми дорівнює 8 м^3, а її висота 2,2 м. Знайдіть бічну поверхню призми.

Відповідь: $16\sqrt{2,2\left(\sqrt{2}-1\right)}$ м^2.

8. Основа похилого паралелепіпеда — ромб, сторона якого дорівнює 60 см. Площина діагонального перерізу, що проходить через більшу діагональ основи, перпендикулярна до площини основи. Площа цього перерізу дорівнює 72 дм^2. Знайдіть меншу діагональ основи, якщо бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 80 см і утворює з площиною основи кут $60°$.

Відповідь: 60 см.

9. Розміри прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 1 : 2 : 3. Повна поверхня паралелепіпеда дорівнює 352 см^2. Знайдіть його розміри.

Відповідь: 4 см; 8 см; 12 см.

10. Через три вершини куба, розміщені на кожній трійці ребер, що виходять із однієї вершини, проведено площину. Обчисліть об'єм багатогранника, обмеженого такими площинами, якщо ребро куба дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

Відповідь: $4\sqrt{3}$ см^3.

5. ПІРАМІДА

5.1. Теоретичні відомості

Пірамідою називають багатогранник, який складається з багатокутника (основи піраміди), точки, що не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, які з'єднують вершину піраміди з точками основи. Піраміду $SABCDEF$ показано на рис. 5.1.

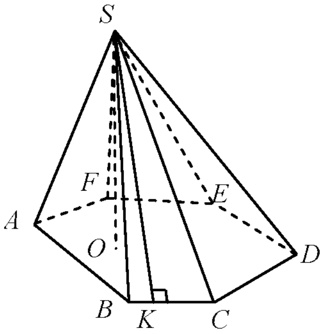


Рис. 5.1

Основа піраміди — багатокутник $ABCDEF$.

Точка S — вершина піраміди.

SO — висота піраміди $\left(SO = H,\ SO \perp (ABC)\right)$.

SK — висота бічної грані $\left(SK \perp BC,\ SK = h\right)$.

Висота піраміди — перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи.

Бічні грані — трикутники: SAB, SBC, SCD, SED, SFE, SAF зі спільною вершиною S.

Бічні ребра — відрізки, по яких перетинаються бічні грані: SA, SB, SC, SD, SE, SF.

Бічна поверхня піраміди дорівнює сумі площ бічних граней піраміди.

Повна поверхня піраміди дорівнює сумі бічної поверхні піраміди і площі основи піраміди: $S_{\text{пов}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}$.

Об'єм піраміди дорівнює добутку однієї третьої площі основи піраміди на її висоту $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$.

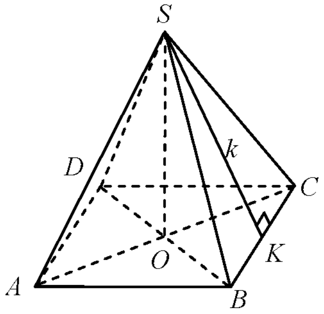


Рис. 5.2

Правильною називається піраміда, якщо її основа є правильним n-кутником, а основа висоти піраміди збігається з центром цього n-кутника (рис. 5.2).

Віссю правильної піраміди називається пряма, яка містить висоту піраміди.

Апофемою правильної піраміди називається висота бічної грані.

$SO = H$ — висота.

SO — вісь.

$SK = k$ — апофема.

Деякі види правильних пірамід

Трикутна	*Чотирикутна*	*Шестикутна*
ABC — правильний трикутник; O — точка перетину медіан (висот і бісектрис), центр вписаного і описаного кіл (рис. 5.3)	$ABCD$ — квадрат; O — точка перетину діагоналей, центр вписаного і описаного кіл (рис. 5.4)	$ABCDEF$ — правильний шестикутник; O — точка перетину діагоналей AD, BE, FC; центр вписаного і описаного кіл (рис. 5.5)

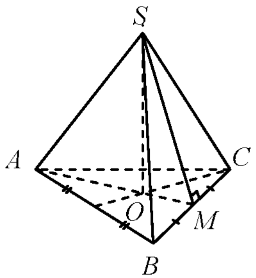


Рис. 5.3

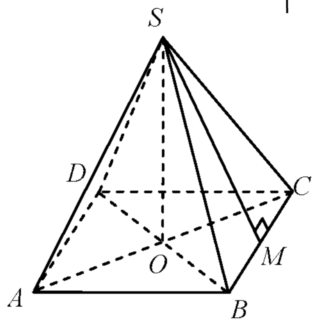


Рис. 5.4

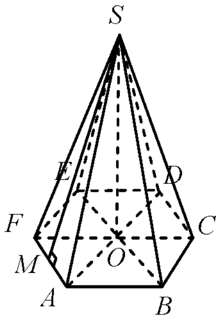


Рис. 5.5

Основні співвідношення правильної піраміди

Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда (рис. 5.6); $AB = BC = CD = DA = a$ — сторона основи; $\angle CDA = \angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = 90°$; $SA = SB = SC = SD = l$ — бічне ребро; $SO = H$ — висота, $SK = k$ — апофема; $\angle SKO = \alpha$ — лінійний кут двогранного кута при основі (кут нахилу бічної грані до площини основи); $\angle SAO = \beta$ — кут нахилу бічного ребра до площини основи. Всі бічні ребра рівні і однаково нахилені до основи; $\angle BSC = \gamma$ — плоский кут при вершині бічної грані.

$AO = R$ — радіус кола, описаного навколо основи; $OK = r$ — радіус кола, вписаного в основу; $ON \perp SC$; $\angle BND = \varphi$ — лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі SC ; $\Delta SAB = \Delta SBC = \Delta SCD = \Delta SAD$ — бічні грані є рівними рівнобедреними трикутниками і однаково нахилені до основи.

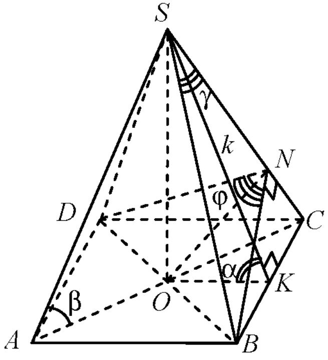


Рис. 5.6

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} SK = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} k \text{ ; } S_{\text{біч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha} \text{ ;}$$

$S_{\text{біч}} = S_{\text{біч.гр}} n$, де n — кількість граней.

Положення висоти у деяких видах пірамід

Теорема 1. Якщо всі бічні ребра піраміди рівні або рівно нахилені до площини основи, то вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи.

Теорема 2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до основи під одним і тим самим кутом або всі висоти бічних граней рівні, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди.

Теорема 3. Якщо тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди є висота цієї бічної грані (рис. 5.7):

$(ASC) \perp (ABC)$,

$SO \perp AC$, $SO \perp (ABC)$,

SO — висота піраміди.

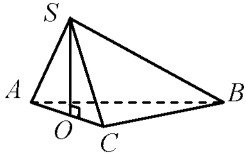


Рис. 5.7

Теорема 4.

Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро (рис. 5.8):

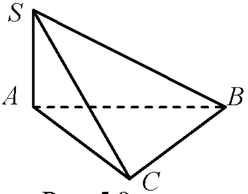


Рис. 5.8

$(SAB)\perp(ABC)$;

$(SAC)\perp(ABC)$;

$SA\perp(ABC)$;

SA — висота піраміди.

Теорема 5.

Якщо бічне ребро SA піраміди (рис. 5.9) утворює із суміжними сторонами основи (AC і AB) рівні кути ($\angle SAB=\angle SAC$), то вершина піраміди проеціюється на бісектрису кута між цими сторонами основи:

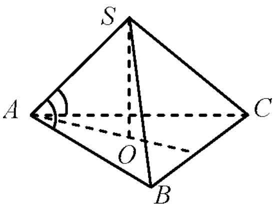


Рис. 5.9

SO — висота;

AO — бісектриса $\angle CAB$.

Зрізаною пірамідою називається частина піраміди, обмежена її основою і січною площиною, паралельною основі (рис. 5.10).

Основами зрізаної піраміди називають паралельні грані ABC і $A_1B_1C_1$.

Висотою зрізаної піраміди називається відстань між площинами її основ. $A_1O\perp(ABC)$, $A_1O=h$.

Правильною називається зрізана піраміда, основи якої — правильні багатокутники і пряма, що з'єднує центри основ, перпендикулярна до площин основ.

Бічною поверхнею зрізаної піраміди називається сума площ її бічних граней.

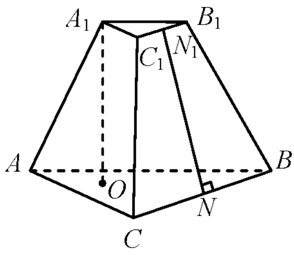


Рис. 5.10

Бічна поверхня правильної зрізаної піраміди $S_{біч}=\dfrac{P+P_1}{2}m$, де P і P_1 — периметри основ; $NN_1=m$ — апофема.

Об'єм зрізаної піраміди

$$V=\frac{h}{3}\left(S+S_1+\sqrt{SS_1}\right),$$

де h — висота зрізаної піраміди; S і S_1 — площі основ.

Теорема 6. Якщо в зрізану піраміду можна вписати кулю радіусом r, то $V = \frac{1}{3} S_п r$, де $S_п$ — площа повної поверхні зрізаної піраміди.

Теорема 7. Якщо задану піраміду $SABC$ перетинає площина, $A_1B_1C_1$ паралельна основі піраміди $(ABC) \| (A_1B_1C_1)$, то ця площина відтинає від заданої піраміди піраміду $SA_1B_1C_1$, подібну до даної.

$\frac{SO_1}{SO} = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB} = k$ — коефіцієнт подібності;

$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Правильним тетраедром називається піраміда, гранями якої є правильні трикутники.

5.2. *Зразки розв'язування задач*

Задача 1. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює β. Визначте бічну поверхню піраміди, якщо радіус кола, вписаного в бічну грань, дорівнює *r*. Обчисліть, якщо $r = 6$ см, $\beta = 60°$.

Розв'язання. Нехай $SABCD$ — правильна піраміда (рис. 5.11). Бічними гранями правильної піраміди є рівні між собою рівнобедрені трикутники. За умовою $\angle DSC = \beta$.

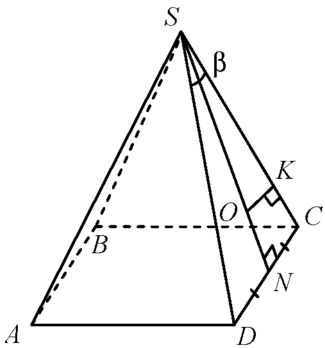


Рис. 5.11

Проведемо апофему SN грані DSC. Ця апофема є одночасно бісектрисою трикутника DSC, а тому центр O вписаного кола лежить на SN. Оскільки $ON \perp CD$, то ON є радіусом r зазначеного кола. Нехай K — точка дотику кола до ребра SC.

Тоді $OK \perp SC$ і $OK = r$. Із трикутника

$$SOK\left(\angle K = 90°, \angle S = \frac{\beta}{2}\right)$$

випливає: $SO = \dfrac{OK}{\sin\angle S} = \dfrac{r}{\sin\dfrac{\beta}{2}}$;

$$SN = SO + ON = \frac{r}{\sin\dfrac{\beta}{2}} + r = r\left(\frac{1+\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\right).$$

Із трикутника SND $(\angle N = 90^\circ)$ маємо:

$$DN = SN\text{tg}\angle S = r\frac{1+\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}}\text{tg}\frac{\beta}{2} = r\frac{1+\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}.$$

Ураховуючи, що $DN = NC$, знаходимо:

$$S_{\text{біч}} = 4\frac{DC\cdot SN}{2} = 4DN\cdot SN = 4r\frac{1+\sin\dfrac{\beta}{2}}{\cos\dfrac{\beta}{2}}r\frac{1+\sin\dfrac{\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}} = 8r^2\frac{\left(1+\sin\dfrac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}.$$

Якщо $r = 6$ см, $\beta = 60^\circ$, то $S_{\text{біч}} = 8\cdot 6^2 = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 432\sqrt{3}$ см^2.

Відповідь: $8r^2\dfrac{\left(1+\sin\dfrac{\beta}{2}\right)^2}{\sin\beta}$; $432\sqrt{3}$ см^2.

Задача 2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Визначте об’єм піраміди, якщо відстань від основи висоти до бічного ребра дорівнює l.

Розв’язання. Нехай $SABC$ — піраміда (рис. 5.12); $AB = BC$, $\angle CAB = \alpha$. Проведемо висоту SO. Проекціями бічних ребер SA, SB, SC є відповідно відрізки OA, OB, OC.

За умовою $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$.

Трикутники SAO, SBO, SCO мають спільний катет SO і рівні гострі кути. Тому $\Delta SAO = \Delta SBO = \Delta SCO$. Висоти рівних прямокутних трикутників, проведені до гіпотенуз, рівні. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер рівні. Проведемо з точки O перпендикуляр ON до ребра SB. За умовою $ON = l$.

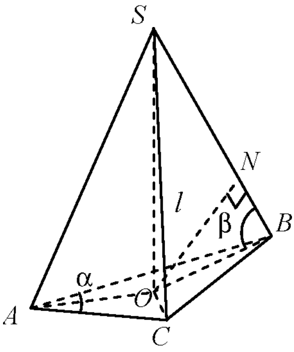


Рис. 5.12

Із трикутника $ONB(\angle N = 90°)$ маємо:

$OB = \dfrac{ON}{\sin\angle B} = \dfrac{l}{\sin\beta}$, а з трикутника

$SOB(\angle O = 90°): H = SO = OB\,\mathrm{tg}\beta = \dfrac{l}{\cos\beta}$.

Оскільки $OA = OC = OB$ (це випливає з рівності трикутників SAO, SBO, SCO), то точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, OB є радіусом кола. За наслідком з теореми синусів для трикутника ABC маємо

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2OB;\ BC = 2OB\sin\alpha = \frac{2l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Оскільки в трикутнику $ABC: AB = BC$ і $\angle B = 180° - 2\alpha$, то

$$S_{осн} = \frac{1}{2}AB\cdot BC\sin(180° - 2\alpha) = \frac{1}{2}\left(\frac{2l\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^2\sin 2\alpha = \frac{2l^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\beta}.$$

Тоді $V = \dfrac{1}{3}S_{осн}H = \dfrac{1}{3}\dfrac{2l^2\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\beta}\dfrac{l}{\cos\beta} = \dfrac{4l^3\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{3\sin\beta\sin 2\beta}$.

Відповідь: $\dfrac{4l^3\sin^2\alpha\sin 2\alpha}{3\sin\beta\sin 2\beta}$.

Задача 3. В основі піраміди лежить ромб з гострим кутом α. Усі бічні грані піраміди утворюють з площиною основи кут β. Визначте повну поверхню піраміди, якщо її висота дорівнює H.

Розв'язання. Нехай $SABCD$ — піраміда (рис. 5.13), $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = \alpha$, $SO = H$ — висота піраміди. Точка O — центр кола, вписаного в ромб, і точка перетину його діагоналей. Проведемо $SM \perp AD (M \in AD)$.

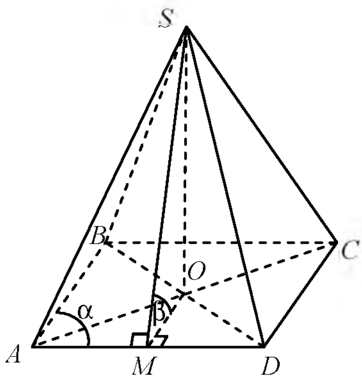


Рис. 5.13

Тоді $OM \perp AD$ і за умовою $\angle SMO = \beta$.

Із трикутника $SMO(\angle O = 90°)$ маємо: $OM = H\text{ctg}\beta$. Із трикутника $AOM\left(\angle M = 90°, \angle A = \frac{\alpha}{2}\right)$ випливає:

$AO = \frac{OM}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{H\text{ctg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а з трикутника $AOD(\angle O = 90°)$:

$$OD = AO\,\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{H\,\text{ctg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{H\,\text{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Тоді

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}2AO \cdot 2OD = 2\frac{H\,\text{ctg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}\frac{H\,\text{ctg}\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4H^2\text{ctg}^2\beta}{\sin\alpha}.$$

Оскільки $S_{\text{біч}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta}$, то

$$S_{\text{п}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = S_{\text{осн}} + \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\beta} = \left(\frac{1+\cos\beta}{\cos\beta}\right)S_{\text{осн}} = \frac{4H^2\text{ctg}^2\beta(1+\cos\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$
$$= \frac{8H^2\text{ctg}^2\beta(1+\cos\beta)}{\sin 2\alpha}.$$

В і д п о в і д ь: $\frac{8H^2\text{ctg}^2\beta(1+\cos\beta)}{\sin 2\alpha}$.

Задача 4. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Визначте об'єм піраміди.

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — піраміда (рис. 5.14), $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha < 90°$.

Тоді за умовою задачі перпендикулярним до площини основи є грані PAD і PAB, а отже, і пряма PA їх перетину. Тому відрізок PA — висота піраміди. Проведемо висоту PK грані PDC; $PK \perp DC$. За теоремою про три перпендикуляри $AK \perp CD$. За умовою задачі $\angle PKA = \beta$.

Проведемо з точки A перпендикуляр AN до грані PDC. Нехай $AN = d$. Покажемо, що точка N належить висоті PK грані PDC.

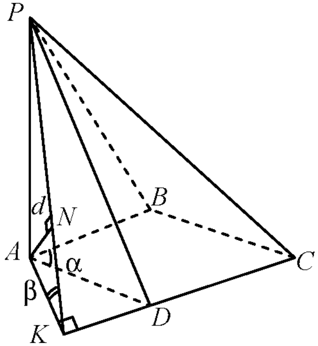


Рис. 5.14

Дійсно, пряма CD перпендикулярна до висоти PK і її проекції AK на площину основи. Тому пряма CD перпендикулярна до площини PKA. Оскільки площина PDC містить пряму CD, то вона також перпендикулярна до площини PKA. Тоді AN перпендикулярний до площини PDC і лежить у площині PKA, і тому його основа N належить ребру PK.

Із трикутника $ANK(\angle N = 90°)$ маємо: $AK = \dfrac{d}{\sin\beta}$, а з трикутника $PAK(\angle A = 90°): H = PA = AK\mathrm{tg}\beta = \dfrac{d}{\cos\beta}$.

Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle ADK = \alpha$.

Із трикутника $AKD(\angle K = 90°)$ випливає:

$$AD = \frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta\,\sin\alpha}.$$

Тоді $S_{\text{осн}} = AD^2\sin\alpha = \dfrac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha}$.

Отже, $V = \dfrac{1}{3}S_{\text{осн}}H = \dfrac{1}{3}\dfrac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha}\dfrac{d}{\cos\beta} = \dfrac{d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha} =$

$$= \frac{2d^3}{3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha}.$$

Відповідь: $\dfrac{2d^3}{3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha}$.

Задача 5. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює H, а кут між стороною основи і бічним ребром — α. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди, якщо $H = 2$ см; $\alpha = 60°$.

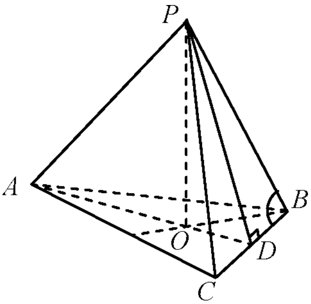


Рис. 5.15

Розв'язання. Нехай $PABC$ — піраміда (рис. 5.15). Оскільки піраміда правильна, її основою є правильний трикутник ABC, а висота проходить через центр O цього трикутника. За умовою $PO = H$, $\angle PBC = \alpha (0° < \alpha < 90°)$.

Позначимо: $PB = b$. З прямокутного трикутника $PBO (\angle O = 90°)$ маємо: $OB = \sqrt{b^2 - H^2}$.

Проведемо апофему PD бічної грані.

Із прямокутного трикутника $PBD (\angle D = 90°)$ випливає: $BD = b \cos\alpha$, а з трикутника $OBD (\angle D = 90°)$: $BD = OB \cos\angle OBD$; $b\cos\alpha = \sqrt{b^2 - H^2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Далі маємо $b^2 \cos^2\alpha = \frac{3}{4}(b^2 - H^2)$, звідки $b^2 = \dfrac{H^2}{1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha}$.

Позначимо через S площу трикутника PBC.

$S = \frac{1}{2} PB \cdot BC \sin\alpha = \frac{1}{2} b\, 2b \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2} b^2 \sin 2\alpha.$

Позначивши через $S_б$ площу бічної поверхні піраміди, отримуємо:

$$S_б = 3S = \frac{3}{2} b^2 \sin 2\alpha = \frac{3}{2}\,\frac{H^2 \sin 2\alpha}{1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha}. \qquad (1)$$

За заданих числових значень параметрів маємо:

$$S_б = \frac{3}{2}\,\frac{4\sin 120°}{1 - \frac{4}{3}\cos^2 60°} = \frac{3}{2}\,\frac{4\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}\,\frac{2\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}\ \text{см}^2.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\frac{H^2\sin 2\alpha}{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}$; $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см^2.

Задача 6. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Знайдіть відношення бічної поверхні піраміди до поверхні описаної навколо піраміди кулі.

Розв'язання. Нехай $PABCD$ — правильна чотирикутна піраміда (рис. 5.16). Її основою є квадрат $ABCD$, а висота проходить через центр O цього квадрата. Позначимо: $PC=b$, $\angle BPC=\alpha$.

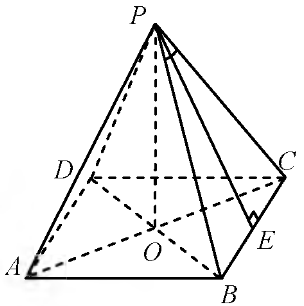


Рис. 5.16

Проведемо апофему PE бічної грані PBC. $CE=b\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC=2CE=2b\sin\frac{\alpha}{2}$; $OC=\frac{BC}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}b\sin\frac{\alpha}{2}$. Із прямокутного трикутника $POC(\angle O=90°)$ маємо:

$$PO=\sqrt{PC^2-OC^2}=\sqrt{b^2-2b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=b\sqrt{\cos\alpha}.$$

Центр кулі, описаної навколо піраміди, лежить на прямій PO, отже, трикутник PAC уписаний у велике коло описаної кулі радіусом R. Зазначимо, що $PO=PA\cdot\sin\angle PAO$, звідки

$2R\cdot PO=2R\cdot PA\sin\angle PAO$.

За теоремою синусів $2R\sin\angle PAO=PC=PA$, отже, $2R\cdot PO=PA^2$. З урахуванням знайденого для PO значення маємо $2Rb\sqrt{\cos\alpha}=b^2$, звідки $R=\frac{b}{2\sqrt{\cos\alpha}}$. Позначимо через $S_к$ площу поверхні кулі: $S_к=4\pi R^2=\frac{\pi b^2}{\cos\alpha}$, а через $S_б$ — бічну поверхню піраміди $S_б=4S_{\Delta PBC}=4\frac{1}{2}PC^2\sin\alpha=2b^2\sin\alpha$.

Тоді $\frac{S_б}{S_к}=2b^2\sin\alpha:\frac{\pi b^2}{\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\pi}$.

Відповідь: $\dfrac{\sin 2\alpha}{\pi}$.

Задача 7. У правильній трикутній піраміді відстань від центра вписаної в неї кулі до сторони основи дорівнює d. Визначте повну поверхню піраміди, якщо бічні грані її нахилені до площини основи під кутом φ.

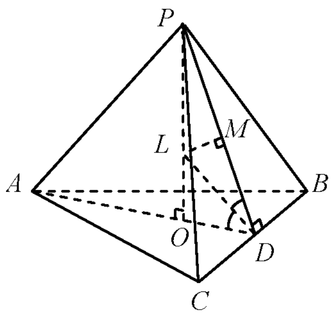


Рис. 5.17

Розв'язання. Нехай $PABC$ — правильна трикутна піраміда (рис. 5.17), в основі якої правильний трикутник ABC, а висота проходить через центр O цього трикутника. PD — апофема бічної грані PBC. $\angle PDO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC. За умовою задачі

$$\angle PDO = \varphi\left(0° < \varphi < 90°\right).$$

Нехай DL — бісектриса $\angle PDO$. LM — перпендикуляр, проведений із точки L на апофему PD.

Оскільки $BC \perp AD$ і $BC \perp PD$, то пряма $BC \perp (PDA)$ і $LD \perp BC$. Крім того, $LM \perp PD$ за побудовою, отже, LM — перпендикуляр, проведений з точки L до площини PBC.

Отже, точка L однаково віддалена від граней PBC і ABC, бо за властивістю бісектриси DL $LM = LO$. Оскільки піраміда правильна, точка L однаково віддалена від усіх її граней і тому є центром вписаної кулі. LD — це відстань від центра кулі до сторони BC основи піраміди. За умовою $LD = d$. Крім того, $\angle LDO = \dfrac{\varphi}{2}$. Із прямокутного трикутника LDO маємо: $DO = LD\cos\dfrac{\varphi}{2} = d\cos\dfrac{\varphi}{2}$. Оскільки трикутник ABC правильний, то $AC = 2\sqrt{3}DO = 2\sqrt{3}d\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

Нехай $S_о$ — площа основи, а $S_б$ і S відповідно площі бічної та повної поверхні піраміди. Відомо, що $S_б = \dfrac{S_о}{\cos\varphi}$.

$$S = S_б + S_о = \frac{S_о}{\cos\varphi} + S_о = S_о\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right); \qquad (1)$$

$$S_о = AC^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 12d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

Тепер з формули (1) дістанемо: $S = 3\sqrt{3}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right).$

Відповідь: $3\sqrt{3}d^2\cos^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} + 1\right).$

Задача 8. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться, як 1 : 2, висота піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з більшою основою кут $45°$. Обчисліть площі основ піраміди.

Розв'язання. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна зрізана піраміда (рис. 5.18), $A_1C_1 : AC = 1:2$, O і O_1 — центри основ. Тоді OO_1 — висота піраміди, $OO_1 = 3$ см. Площина AOO_1 проходить через вершину повної піраміди і тому містить бічне ребро A_1A зрізаної піраміди. Звідси випливає, що AA_1O_1O — плоский чотирикутник.

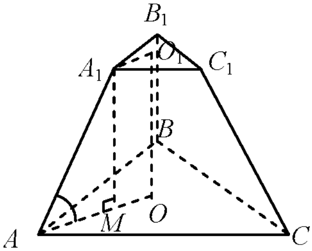


Рис. 5.18

Крім того, ця площина перетинає паралельні площини основ піраміди по прямих A_1O_1 і AO і містить її висоту, а тому $A_1O_1 \parallel AO$ і $AO \perp OO_1$. Таким чином, AA_1O_1O — прямокутна трапеція. Проведемо висоту A_1M цієї трапеції. Оскільки $A_1M \parallel O_1O$, то $A_1M \perp (ABC)$. Тоді відрізок MA є проекцією бічного ребра A_1A на площину ABC. За умовою $\angle A_1AM = 45°$.

Із трикутника $A_1MA (\angle M = 90°)$ випливає:

$AM = A_1M \operatorname{ctg} 45° = O_1O \cdot 1 = 3$ см.

Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні і тому відношення радіусів O_1A_1 і OA кіл, описаних навколо цих трикутників, дорівнює відношенню сторін: $O_1A_1 : OA = 1:2$; $OA = 2\cdot O_1A_1$. Враховуючи, що

$O_1A_1 = OM$, маємо: $OA = 2 \cdot OM$. Отже, точка M — середина відрізка OA. Тому $OA = 2AM = 6$ см. Знаходимо площу бічної основи через радіус OA описаного кола: $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}6^2 = 27\sqrt{3}$ (см^2).

Оскільки $A_1C_1 : AC = 1:2$, то $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ см^2.

Відповідь: $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см^2 і $27\sqrt{3}$ см^2.

Залежність між кутами у правильній *n*-кутній піраміді

Серед кутів, що розглядаються в правильній *n*-кутній піраміді, найчастіше в задачах трапляються такі кути (рис. 5.19):

1) $\alpha = \angle OBD$ — кут нахилу бічної грані до площини основи;
2) $\beta = \angle OA_2D$ — кут нахилу бічного ребра до площини основи;
3) $\gamma = \angle A_2DA_3$ — плоский кут при вершині піраміди;
4) $\delta = \angle A_1CA_3$ — двогранний кут при бічному ребрі DA_2.

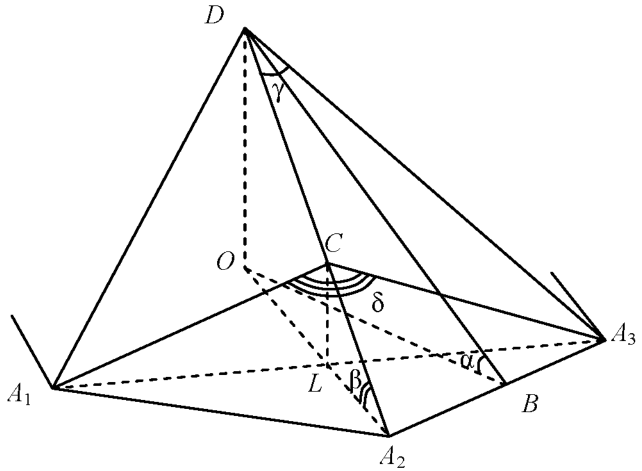


Рис. 5.19

Формули, що зв'язують будь-які два із зазначених кутів, назвемо ***формулами переходу***. Зазначимо, що на рис. 5.19 $A_1C \perp DA_2$, $A_3C \perp DA_2$, тому і $CL \perp DA_2$. DB — апофема.

Отже, $OA_2 = R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$; $OB = r = \dfrac{a}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{180^\circ}{n}$, де $a = A_1A_2 =$ $= A_2A_3$ — сторона основи; A_2L — бісектриса, медіана, висота рівнобедреного трикутника $A_1A_2A_3$.

Тому $A_3L = A_1L = A_1A_2 \sin\angle A_1A_2O$.

Але $\angle A_1A_2O = \dfrac{\angle A_1A_2A_3}{2} = \dfrac{180^\circ(n-2)}{2n} = 90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}$.

Тоді $A_3L = A_1L = a\sin\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = a\cos\dfrac{180^\circ}{n}$;

$$A_2L = A_1A_2\cos\angle A_1A_2O = a\cos\left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n}\right) = a\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Розглянемо задачу 12.343 зі збірника за редакцією М. І. Сканаві, в якій використаємо розглянуті співвідношення.

Лінійний кут двогранного кута, утвореного двома суміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди, у два рази більший за плоский кут при вершині піраміди. Потрібно знайти плоский кут при вершині піраміди.

Розв'язання. Нехай $SABCD$ — правильна піраміда (рис. 5.20); $\angle DSC = \gamma$ — плоский кут при вершині S; $\angle BKD = \delta$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі SC, якщо $n = 4$, отримаємо:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\delta}{2}}.$$

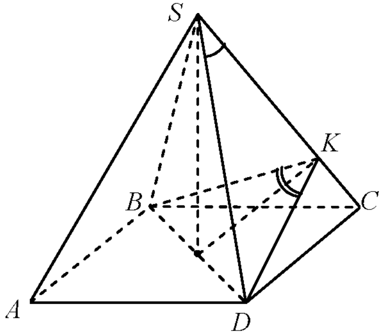


Рис. 5.20

За умовою $\delta = 2\gamma$. Тоді:

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2\sin^2\gamma};$$

$$(1+\cos\gamma)(1-\cos^2\gamma) = 1 \ (\cos\gamma \ne 0);$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \gamma = \arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Відповідь: $\gamma = \arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Формули переходу між кутами правильної піраміди

Кут	Загальна формула	$n=3$	$n=4$	$n=6$
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\operatorname{tg}\alpha \cos\frac{180^\circ}{n} = \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$	$\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha = 2\mathrm{t}$
$\alpha \leftrightarrow \gamma$	$\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$	$\sqrt{3}\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$	$\cos\alpha = \sqrt{3}\mathrm{t}$
$\gamma \leftrightarrow \beta$	$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{180^\circ}{n}\cos\beta$	$2\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{3}\cos\beta$	$\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\beta$	$2\sin\frac{\gamma}{2} = \mathrm{co}$
$\gamma \leftrightarrow \delta$	$\cos\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{\delta}{2}}$	$\cos\frac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}$	$\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$	$2\cos\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{}}{\mathrm{sin}}$

5.3. Тематичне тестування

Рівень I

1. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту збільшити втричі, а сторону основи зменшити втричі?

А зменшиться втричі; **Б** не зміниться; **В** збільшиться втричі; **Г** зменшиться в 9 разів; **Д** інша відповідь.

2. Висота бічної грані правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см. Ця грань нахилена до площини основи під кутом $60°$. Об'єм піраміди дорівнює… .

А $32\sqrt{3}$ см^3; **Б** $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ см^3; **В** $16\sqrt{3}$ см^3; **Г** 48 см^3; **Д** інша відповідь.

3. Об'єм правильної трикутної піраміди V. Якщо бічні ребра попарно перпендикулярні, то їх довжина дорівнює… .

А $\sqrt{6V}$; **Б** $\sqrt[3]{2V}$; **В** $\sqrt[3]{6V}$; **Г** $\sqrt[3]{3V}$; **Д** інша відповідь.

4. Правильна трикутна піраміда перетинається площиною, що проходить через висоту піраміди паралельно стороні основи. Відношення об'ємів частин піраміди дорівнює… .

А 1:1; **Б** 2:3; **В** 3:4; **Г** 4:5; **Д** інша відповідь.

5. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди удвічі більша від площі її основи. Двогранний кут при основі піраміди дорівнює… .

А. $60°$; **Б.** $30°$; **В.** $45°$; **Г.** $\arccos\dfrac{1}{3}$; **Д** інша відповідь.

6. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см, а площа основи — 36 см^2. Об'єм піраміди дорівнює… .

А 24 см^3; **Б** 36 см^3; **В** 72 см^3; **Г** 48 см^3; **Д** інша відповідь.

7. В основі піраміди лежить прямокутник зі сторонами a і b. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи і перетинаються по ребру довжиною c. Об'єм піраміди дорівнює…

А $\dfrac{1}{3}abc$; **Б** $\dfrac{1}{2}abc$; **В** $\dfrac{1}{6}abc$; **Г** $\dfrac{2}{3}abc$; **Д** інша відповідь.

8. Площа бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнює 100 см^2, її бічна грань нахилена до площини основи під кутом $60°$. Площа основи дорівнює… .

А 200 см^2; **Б** 50 см^2; **В** $\frac{200}{13}$ см^2; **Г** $\frac{50}{13}$ см^2; **Д** інша відповідь.

9. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту навпіл. У якому відношенні вона ділить об'єм піраміди?

А 1 : 1; **Б** 1 : 2; **В** 1 : 7; **Г** 1 : 8; **Д** інша відповідь.

10. Основа піраміди — квадрат із стороною a. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші утворюють з нею кут α. Об'єм піраміди дорівнює… .

А $\frac{1}{3}a^3\mathrm{ctg}\alpha$; **Б** $\frac{1}{3}a^3\mathrm{tg}\alpha$; **В** $\frac{4}{3}a^3\mathrm{ctg}\alpha$; **Г** $\frac{4}{3}a^3\mathrm{tg}\alpha$; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $30°$. Обчисліть об'єм піраміди.

А $12\sqrt{3}$ см^3; **Б** $36\sqrt{6}$ см^3; **В** $\frac{1296\sqrt{21}}{49}$ см^3; **Г** $1296\sqrt{21}$ см^3; **Д** інша відповідь.

2. Радіус кола, описаного навколо основи правильної чотирикутної піраміди, дорівнює $3\sqrt{2}$ см, а апофема — 10 см. Обчисліть бічну поверхню піраміди.

А 90 см^2; **Б** 180 см^2; **В** 360 см^2; **Г** 120 см^2; **Д** інша відповідь.

3. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 12 см і утворює з площиною основи кут $60°$.

А $144\sqrt{3}$ см^3; **Б** $36\sqrt{3}$ см^3; **В** 144 см^3; **Г** $20\sqrt{3}$ см^3; **Д** інша відповідь.

4. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а плоский кут при вершині $60°$. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

А $16\sqrt{3}$ см^2; **Б** $\frac{16}{\sqrt{3}}$ см^2; **В** $2\sqrt{3}$ см^3; **Г** 16 см^3; **Д** інша відповідь.

5. Основа піраміди — прямокутник із сторонами 8 і 6 см. Дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи. Най-

більше бічне ребро нахилене до площини основи під кутом $60°$. Обчисліть об’єм піраміди.

А $144\sqrt{3}$ см^3; **Б** $160\sqrt{3}$ см^3; **В** 144 см^3; **Г** $100\sqrt{3}$ см^3; **Д** інша відповідь.

6. Основа піраміди — прямокутний трикутник, катет якого дорівнює 6 см і гіпотенуза — 12 см. Обчисліть об’єм піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $30°$.

А 216 см^3; **Б** 72 см^3; **В** 36 см^3; **Г** 144 см^3; **Д** інша відповідь.

7. Основою піраміди є прямокутник зі сторонами 6 і 15 см. Висота піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

А 126 см^2; **Б** 150 см^2; **В** 200 см^2; **Г** 192 см^2; **Д** інша відповідь.

8. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

А 9 см; **Б** 8 см; **В** 3 см; **Г** 6 см; **Д** інша відповідь.

9. Площі основи та бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнюють відповідно 36 та 60 см^2. Знайдіть апофему цієї піраміди.

А 3 см; **Б** 2,5 см; **В** 1,5 см; **Г** 5 см; **Д** інша відповідь.

10. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом $45°$. Знайдіть сторону основи піраміди.

А 3 см; **Б** 6 см; **В** 5 см; **Г** 4 см; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. Бічні грані правильної трикутної піраміди, об’єм якої дорівнює $4\sqrt{3}$ см^3, попарно перпендикулярні. Бічне ребро піраміди дорівнює… .

А $\sqrt{3}$ см; **Б** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ см; **В** $2\sqrt{3}$ см; **Г** $\frac{3}{\sqrt{3}}$ см; **Д** інша відповідь.

2. Нехай *SABCD* — правильна чотирикутна піраміда, *M* — середина ребра *SC*. Відношення об’ємів пірамід *SABCD* і *SMBD* дорівнює… .

А 4:1; **Б** 3:2; **В** 5:2; **Г** 2:1; **Д** інша відповідь.

3. Знайдіть висоту правильної трикутної піраміди, бічна поверхня якої дорівнює $60\sqrt{3}$ см^2, а повна поверхня — $108\sqrt{3}$ см^2.

А 5 см; **Б** 3 см; **В** $3\sqrt{2}$ см; **Г** $3\sqrt{3}$ см; **Д** інша відповідь.

4. Знайдіть величину двогранного кута при основі правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічні ребра нахилені до площини основи під кутом $60°$.

А $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$; **Б** $\operatorname{arctg}3$; **В** $\operatorname{arctg}\sqrt{6}$; **Г** $\arccos\frac{2}{3}$; **Д** інша відповідь.

5. Сторони основ правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнюють 1 і 9 м. Обчисліть площу перерізу, проведеного через сторону однієї основи і протилежну їй сторону другої основи, якщо відомо, що бічна грань утворює з площиною більшої основи кут $45°$.

А 30 м^2; **Б** 36 м^2; **В** $5\sqrt{41}$ м^2; **Г** $\sqrt{41}$ м^2; **Д** інша відповідь.

6. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a, а площа бічної поверхні — S. Знайдіть кут між суміжними бічними гранями.

А $\operatorname{arctg}\frac{a^2}{S}$; **Б** $\arccos\frac{a^2}{S}$; **В** $\pi-\operatorname{arcctg}\frac{a^2}{S}$;

Г $\pi-\arccos\frac{a^4}{S^2}$; **Д** інша відповідь.

7. Основою піраміди є трикутник із сторонами 13, 14, 15 см. Бічне ребро проти середньої за значенням сторони основи перпендикулярне до площини основи і дорівнює 16 см. Обчисліть площу повної поверхні піраміди.

А 448 см^2; **Б** 392 см^2; **В** 408 см^2; **Г** 432 см^2; **Д** інша відповідь.

8. Основою піраміди $MABCD$ є квадрат із стороною 10 см. Ребро MB перпендикулярне до площини основи. Грані MAD і MCD утворюють з площиною основи кут $45°$. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

А $100\left(\sqrt{2}+1\right)$ см^2; **Б** $10\left(\sqrt{2}+1\right)$ см^2;

В $100\sqrt{2}$ см^2; **Г** $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ см^2; **Д** інша відповідь.

9. З основи висоти правильної трикутної піраміди на бічне ребро опущено перпендикуляр завдовжки 6 см. Двогранний кут між бічною гранню і основою піраміди дорівнює $60°$. Обчисліть об'єм піраміди.

А $168\sqrt{2}$ см^3; **Б** $63\sqrt{21}$ см^3; **В** $62\sqrt{3}$ см^3;
Г 192 см^3; **Д** інша відповідь.

10. Відповідні сторони основ зрізаної трикутної піраміди відносяться, як 1 : 2. Через одну зі сторін меншої основи паралельно протилежному бічному ребру проведено площину. У якому відношенні ця площина ділить об'єм зрізаної піраміди?

А 1 : 2; **Б** 2 : 3; **В** 1 : 3; **Г** 3 , :4; **Д** інша відповідь.

5.4. Задачі для самостійної роботи

1. Основою піраміди є трапеція, паралельні сторони і висота якої відповідно дорівнюють 30, 48 і 13 см. Бічні ребра піраміди дорівнюють по 65 см. Знайдіть висоту піраміди.

Відповідь: 60 см.

2. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутами $60°$. Обчисліть площі бічних граней, якщо основою піраміди є трикутник із сторонами 7, 15 і 20 см.

Відповідь: 28 см^2; 60 см^2; 80 см^2.

3. Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 1 і 2 дм. Висота піраміди дорівнює 8 дм і проходить через вершину прямого кута основи. Визначте площу більшої бічної грані піраміди.

Відповідь: 9 дм^2.

4. Основа піраміди — прямокутний трикутник, менші сторони якого дорівнюють 6 і 8 см, вершина піраміди проектується на основу і віддалена від неї на 24 см. У піраміду вписано куб так, що чотири його вершини лежать на основі, а бічні грані відповідно паралельні катетам основи піраміди. Знайдіть ребро куба.

Відповідь: 3 см.

5. Основа піраміди — квадрат із стороною 12 см. Одне з бічних ребер дорівнює 35 см і перпендикулярне до площини основи. Визначте площу поверхні піраміди.

Відповідь: 1008 см^2.

6. Визначте радіус кулі, вписаної в піраміду, основою якої є ромб. Діагоналі ромба дорівнюють 6 і 8 см, а висота піраміди — 1 см і проходить через центр основи.

Відповідь: 0,48 см.

7. Основа піраміди — прямокутник з діагоналлю, що дорівнює d, і кутом $60°$ між діагоналями. Кожне з бічних ребер утворює з площиною основи кут $45°$. Обчисліть об'єм піраміди.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}d^3}{24}$.

8. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює α, радіус кола, вписаного в бічну грань — r. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

Відповідь: $6r^2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cosec}\alpha$.

9. Бічні грані правильної трикутної піраміди, об'єм якої V, нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть повну поверхню піраміди.

Відповідь: $\sqrt{3}\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}(3V\operatorname{ctg}\alpha)^{\frac{2}{3}}$.

10. Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні; їх площі дорівнюють 6, 4 і 3 м^2. Визначте об'єм піраміди.

Відповідь: 4 м^3.

11. Бічна поверхня трикутної піраміди S, кожне з бічних ребер дорівнює l. Знайдіть плоскі кути при вершині піраміди, якщо вони утворюють арифметичну прогресію з різницею $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: якщо $\frac{\pi}{4}<\alpha\le\frac{\pi}{3}$, то $\alpha; \alpha-\frac{\pi}{4}; \alpha+\frac{\pi}{4}$;

якщо $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\alpha-\frac{\pi}{4}; \alpha; \alpha+\frac{\pi}{4}$.

12. Визначте об'єм правильної трикутної зрізаної піраміди, сторони основ якої дорівнюють 30 і 20 м, а бічна поверхня являє собою суму площ основ.

Відповідь: 1900 м^3.

6. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

6.1. Теоретичні відомості

Циліндр

Циліндром (круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають точки цих кругів. Круги називаються основами циліндра. Відрізки, що сполучають відповідні точки кругів, називаються твірними (рис. 6.1).

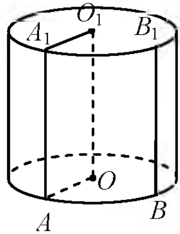


Рис. 6.1

AA_1; BB_1 — твірні циліндра.

Циліндр називається прямим, якщо його твірні перпендикулярні до площини основ.

Радіусом циліндра називається радіус його основи: $OA = R$.

Висотою циліндра називається відстань між площинами його основ; OO_1 — висота.

Властивості циліндра

1. Основи циліндра рівні і паралельні:

$OA = O_1A_1 = R;\ (OAB) \parallel (O_1A_1B_1);$

O — центр нижньої основи; O_1 — центр верхньої основи.

2. Твірні циліндра паралельні і рівні: $AA_1 = BB_1;\ AA_1 \parallel BB_1$.

3. Висота циліндра дорівнює твірній: $H_{\text{цил}} = AA_1 = BB_1 = OO_1$.

4. У разі обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр (рис. 6.2).

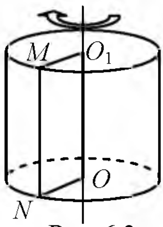


Рис. 6.2

$ONMO_1$ — прямокутник.

OO_1 — вісь утвореного циліндра.

$R_{\text{цил}} = ON = O_1M;\ H_{\text{цил}} = NM = OO_1$.

Площа поверхні та об'єм циліндра

Бічна поверхня $S_{\text{б}} = 2\pi RH$.

Повна поверхня $S_{\text{пов}} = 2\pi R(R + H)$.

Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$.

Перерізи циліндра площинами

1. Осьовий переріз циліндра.

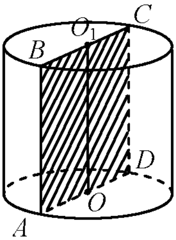


Рис. 6.3

ABCD — осьовий переріз (переріз, який проходить через вісь OO_1). *ABCD* — прямокутник (якщо *ABCD* — квадрат, то циліндр називається рівностороннім) (рис. 6.3).

AB і *CD* — твірні циліндра. $AB = H_{цил}$; $AD = 2R$.

2. Переріз циліндра площиною, паралельною його осі (рис. 6.4).

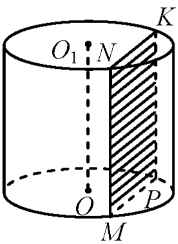


Рис. 6.4

MNKP — переріз циліндра площиною, паралельною його осі.

MNKP — прямокутник.

MN і *KP* — твірні циліндра.

$MN = H_{цил}$.

3. Переріз циліндра площиною, паралельною його основам.

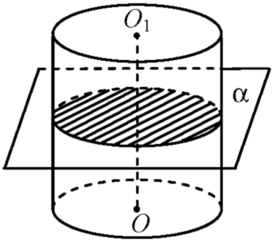


Рис. 6.5

Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи (рис. 6.5):

$R_{пер} = R_{цил}$.

Конус

Конусом (круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга, точки, яка не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, що сполучають задану точку з точками кола (рис. 6.6).

Круг — основа конуса. Точка *S* — вершина конуса.

Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи — твірні. SA, SB — твірні конуса.

Конус називається прямим, якщо $SO \perp (AOB)$; O — центр круга основи.

Властивості конуса

1. Твірні конуса рівні: $SA = SB = \ldots$.

2. $H_{\text{кон}} = SO$; $SO \perp (AOB)$.

3. У разі обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус (рис. 6.7).

Трикутник AOS — прямокутний, $\angle AOS = 90°$;
пряма SO — вісь конуса; $R_{\text{кон}} = AO$;
$H_{\text{кон}} = SO$; AS — твірна; $AS = L$.

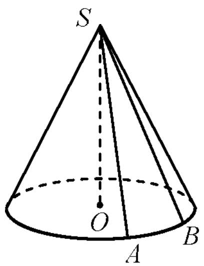


Рис. 6.6

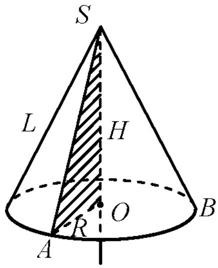


Рис. 6.7

Площа поверхні та об'єм конуса

Бічна поверхня конуса $S_{\text{б}} = \pi RL$.

Повна поверхня конуса $S_{\text{пов}} = \pi R(R + L)$.

Об'єм конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, де R — радіус основи; L — твірна; H — висота конуса.

Перерізи конуса площинами

1. Осьовий переріз конуса.

Трикутник ASB — осьовий переріз (переріз, який проходить через вісь SO) (рис. 6.8).

Трикутник ASB — рівнобедрений. $SA = SB$ (SA і SB — твірні).

2. Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину (рис. 6.9).

Трикутник MSN — рівнобедрений.

$SM = SN$ (SM і SN — твірні).

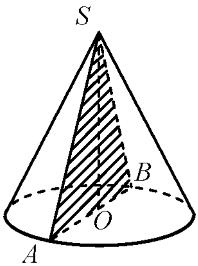


Рис. 6.8

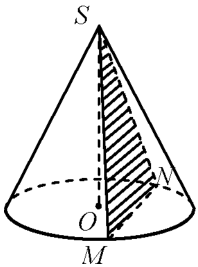


Рис. 6.9

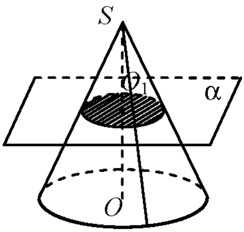


Рис. 6.10

3. Переріз конуса площиною, паралельною його основі (рис. 6.10). Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.

$$\frac{R_{\text{кон}}}{R_{\text{пер}}} = \frac{SO}{SO_1}.$$

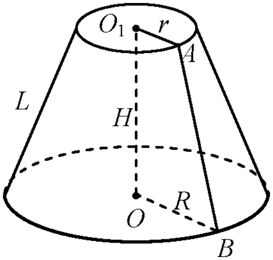


Рис. 6.11

Зрізаний конус

Зрізаним конусом називається частина конуса, обмежена його основою і площиною перерізу, паралельного основі (рис. 6.11).

Висотою зрізаного конуса називається відстань між площинами його основ: $OO_1 = H_{\text{зріз.кон}}$, де O і O_1 — центри основ зрізаного конуса. $AB = l$ — твірна конуса. $AO_1 = r$, $BO = R$ — радіуси зрізаного конуса.

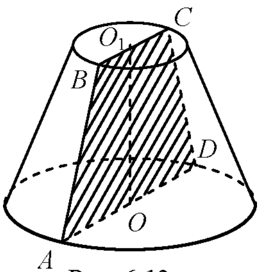


Рис. 6.12

Властивості зрізаного конуса

1. **Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція (рис. 6.12).**

$ABCD$ — осьовий переріз.

$BC \parallel AD$; $AB = DC$ — твірні.

$BC = 2r$; $AD = 2R$; $OO_1 \perp AD$;

$OO_1 = H$.

2. У разі обертання прямокутної трапеції $ABOO_1$ навколо осі, яка проходить через бічну сторону, перпендикулярну до основ, утворюється зрізаний конус (рис. 6.13).

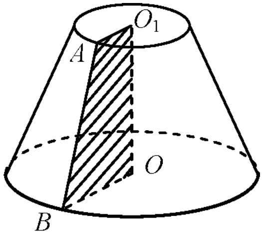


Рис. 6.13

Площа поверхні та об'єм зрізаного конуса

Бічна поверхня зрізаного конуса — $S_б = \pi l(R+r)$.

Повна поверхня зрізаного конуса — $S_п = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2$.

Об'єм зрізаного конуса $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$,

де l — твірна; R і r — радіуси основ.

Сфера і куля

Сферою називається множина всіх точок простору, що містяться на відстані R від заданої точки O. У разі обертання півкола навколо його діаметра утворюється сфера (рис. 6.14).

Кулею називається множина всіх точок простору, що містяться від заданої точки O на відстані, не більшій за відстань R. У разі обертання півкруга навколо його діаметра одержимо кулю. Сфера є поверхнею кулі. Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.

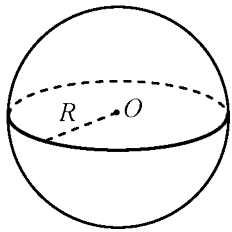


Рис. 6.14

Переріз кулі площиною

Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину (рис. 6.15).

O — центр кулі; O_1 — центр круга перерізу.

$OO_1 \perp \alpha$. Із трикутника OO_1A випливає: $R_{пер} = \sqrt{R^2_{кулі} - OO_1^2}$.

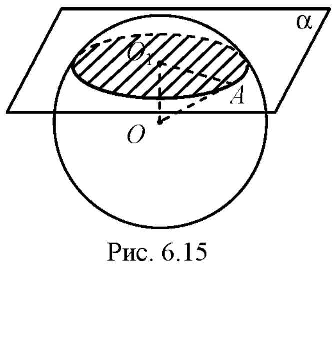


Рис. 6.15

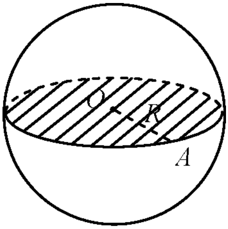


Рис. 6.16

Переріз, що проходить через центр кулі, — великий круг (рис. 6.16); $R_{\text{вел.кр}} = R_{\text{кулі}}$.

Переріз сфери будь-якою площиною є коло.

Площа сфери $S = 4\pi R^2$.

Об'єм кулі $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

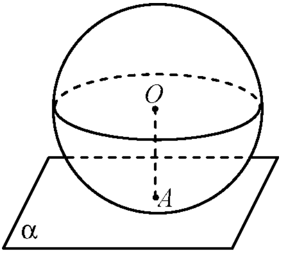


Рис. 6.17

Площина, яка проходить через точку A кульової поверхні і перпендикулярна до радіуса, проведеного у точку A, називається дотичною площиною. Точка A називається точкою дотику. Дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику (рис. 6.17).

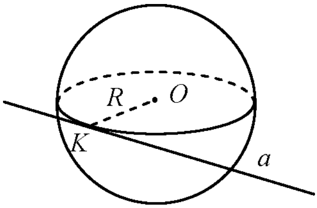


Рис. 6.18

Пряма, яка має з кулею тільки одну спільну точку, називається дотичною до кулі (і до сфери). $a \perp R$ (рис. 6.18)

Частини кулі

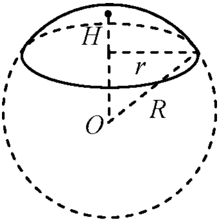


Рис. 6.19

Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї січна площина (рис. 6.19).

Об'єм $V = \dfrac{1}{3}\pi H^2 \left(3R - H\right)$.

Площа сегментної поверхні:

$S_{\text{б}} = 2\pi RH$;

$S_{\text{пов}} = \pi\left(2RH + r^2\right)$;

$r^2 = H\left(2R - H\right)$.

Тіло, утворене обертанням кругового сектора навколо радіуса, що обмежує його, називається кульовим сектором (рис. 6.20).

Об'єм $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Площа повної поверхні:

$$S_{\text{пов}} = \pi R\left(2H + \sqrt{2HR - H^2}\right).$$

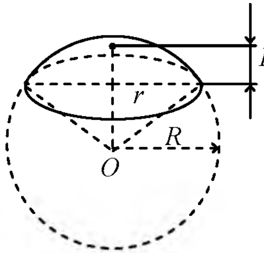


Рис. 6.20

6.2. Зразки розв'язування задач

Задача 1. У циліндрі площа основи Q, а площа осьового перерізу S. Обчисліть об'єм циліндра.

Розв'язання. Нехай задано циліндр (рис. 6.21), у якого $ABCD$ — осьовий переріз; OO_1 — висота.

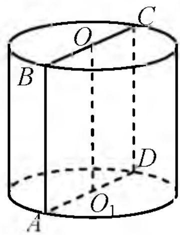


Рис. 6.21

За умовою $S_{\text{осн}} = Q$, $S_{ABCD} = S$. Знайдіть V циліндра. Нехай $AB = OO_1 = H$, $BO = R$, тоді $V = \pi R^2 H$.

За умовою задачі $\pi R^2 = Q$, $2RH = S$, звідки

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}};\quad H = \frac{S}{2R} = \frac{S}{2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}} = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}}.$$

Тоді $V_{\text{цил}} = \pi\frac{Q}{\pi}\cdot\frac{S}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \frac{SQ}{2}\sqrt{\frac{\pi}{Q}} = \frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}S\sqrt{\pi Q}$.

Задача 2. Радіус основи рівностороннього циліндра R, через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму, яка нахилена до площини основи під кутом α. Обчисліть відстань від цієї прямої до осі циліндра.

Розв'язання. Нехай центри основ циліндра O і O_1; A і B_1 — задані точки. Побудуємо $BB_1 \parallel OO_1$. За ознакою паралельності прямої і площини $OO_1 \parallel (ABB_1)$, тому всі точки прямої OO_1 однаково віддалені від площини ABB_1 (рис. 6.22).

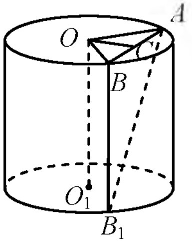


Рис. 6.22

Ця відстань буде і відстанню між прямими OO_1 і AB_1, бо їх спільний перпендикуляр буде перпендикуляром, опущеним із деякої точки прямої OO_1 на площину ABC.

Якщо $AC = CB$, то $OC \perp AB$. Оскільки площини AOB і ABB_1 перпендикулярні (за ознакою), то $OC \perp (ABB_1)$.

Оскільки $BB_1 \perp (ABO)$, то $\angle BAB_1 = \alpha$.

За умовою задачі циліндр рівносторонній, тому $BB_1 = 2R$, отже,

$$AB = BB_1 \operatorname{ctg}\alpha = 2R\operatorname{ctg}\alpha\,; \;\; AC = \frac{1}{2}AB = R\operatorname{ctg}\alpha\,.$$

Із трикутника $OAC(\angle C = 90°)$ маємо:

$$OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{R^2 - R^2\operatorname{ctg}^2\alpha} = R\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Відповідь: $R\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}.$

Задача 3. Паралельно осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ утвореного перерізу l нахилена до площини основи під кутом β. Визначте об'єм циліндра.

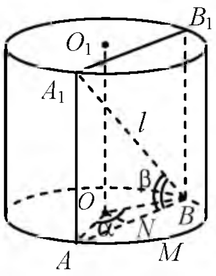


Рис. 6.23

Розв'язання. Нехай задано циліндр, вісь якого OO_1 (рис. 6.23).

Перерізом циліндра площиною, яка паралельна його осі OO_1 і перетинає основу, є прямокутник. Нехай це прямокутник AA_1B_1B, у якого $A_1B = l$, і дуга AMB дорівнює α. Тоді $\angle AOB = \alpha$.

Оскільки $AA_1 \perp (AOB)$, то проекцією діагоналі A_1B на площину основи є хорда AB. Тому $\angle A_1BA = \beta$.

Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$.

Із трикутника $AA_1B(\angle A = 90°)$ випливає:

$H = AA_1 = l\sin\angle ABA_1 = l\sin\beta$.

$$AB = l\cos\angle ABA_1 = l\cos\beta\,. \;\; \angle AON = \frac{\alpha}{2}\,. \;\; AN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}l\cos\beta\,.$$

З точки O проведемо перпендикуляр ON до хорди AB. Оскільки трикутник AOB рівнобедрений, то $\angle AON=\frac{\alpha}{2}$; $AN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}l\cos\beta$.

Із трикутника $AON(\angle N=90°)$ маємо:

$$R=OA=\frac{AN}{\sin\angle AON}=\frac{l\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Тоді $V=\pi R^2H=\pi\left(\frac{l\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 l\sin\beta=\frac{\pi l^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Відповідь: $\frac{\pi l^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 4. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яка стягує дугу α. Цю хорду видно із центра верхньої основи під кутом φ. Обчисліть площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R.

Розв'язання. Перерізом циліндра площиною, яка паралельна його осі OO_1 і перетинає нижню основу, є прямокутник (рис. 6.24).

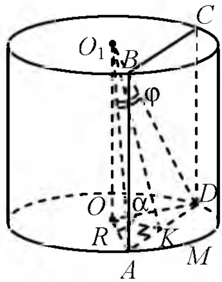


Рис. 6.24

Нехай це прямокутник $ABCD$ і нехай дуга AMD дорівнює α. Тоді $\angle AOD=\alpha$. За умовою задачі $\angle AO_1D=\varphi$, $OA=OD=R$.

Площа перерізу $ABCD$ становить:

$S_{ABCD}=AD\cdot AB$.

З точки O проведемо перпендикуляр OK до хорди AD. Оскільки трикутник AOD рівнобедрений, то $\angle AOK=\frac{\alpha}{2}$. Із трикутника $OAK\left(\angle K=90°\right)$ випливає:

$$AK=OA\sin\angle AOK=R\sin\frac{\alpha}{2},\ AD=2\cdot AK=2R\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Трикутник AO_1D рівнобедрений. $O_1K \perp AD$; $\angle AO_1K = \frac{\varphi}{2}$.

Із трикутника $AO_1K\left(\angle K = 90°\right)$ маємо:

$$AO_1 = \frac{AK}{\sin\angle AO_1K} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

$$AB = OO_1 = \frac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}};$$

$$S_{ABCD} = AD\cdot AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\frac{R}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

Відповідь: $\frac{2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

Задача 5. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з вершини під кутом α, а з центра основи — під кутом β. Визначте бічну поверхню конуса, якщо відстань від центра його основи до середини твірної дорівнює d.

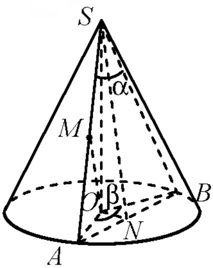


Рис. 6.25

Розв'язання. Нехай перерізом конуса площиною є трикутник SAB, SO — висота конуса, точка M — середина твірної AS. За умовою $\angle ASB = \alpha$, $AOB = \beta$, $OM = d$ (рис. 6.25). Бічна поверхня конуса $S_{\text{біч}} = \pi Rl$, де $R = OA$ — радіус основи; $l = SA$ — довжина твірної.

У трикутнику $SOA(\angle O = 90°)$ точка M — середина гіпотенузи SA є центром описаного кола навколо трикутника SOA. Тому $MS = MA = MO$. Тоді $SA = 2MO = 2d$.

З вершини S проведемо перпендикуляр SN до хорди AB. За теоремою про три перпендикуляри, $ON \perp AB$. Оскільки $SA = SB$, то висота SN є бісектрисою і медіаною трикутника ASB.

Тому $\angle NSA = \frac{\alpha}{2}$ і $AN = NB$. Аналогічно $\angle NOA = \frac{\beta}{2}$.

Із трикутника $SNA(\angle N = 90°): NA = SA \sin \angle NSA = 2d \sin \frac{\alpha}{2}$, а з трикутника $ONA(\angle N = 90°): OA = \dfrac{NA}{\sin \angle NOA} = \dfrac{2d \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$.

Тоді $S_б = \pi OA \cdot SA = \pi \dfrac{2d \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} 2d = \dfrac{4\pi d^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$.

Відповідь: $\dfrac{4\pi d^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$.

Задача 6. Знайдіть кут нахилу твірної конуса до площини основи, якщо осьовий переріз конуса рівновеликий квадрату, вписаному в основу конуса.

Розв'язання. Нехай задано конус, трикутник APB якого — осьовий переріз.

За умовою $S_{\Delta APB} = S_{AMBN}$, де $AMBN$ — квадрат, вписаний в основу конуса.

PA — твірна, PO — висота, тоді AO — проекція твірної PA на площину основи (рис. 6.26). Отже, кут PAO — шуканий. Нехай $AO = R$, тоді $BN = AN = AM = MB = R\sqrt{2}$.

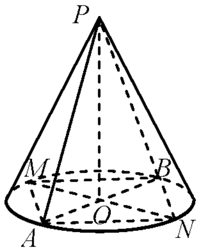


Рис. 6.26

$S_{AMBN} = (BN)^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$. $S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} AB \cdot PO$, де $AB = 2AO = 2R$, $S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} 2R \cdot PO = R \cdot PO$.

За умовою $S_{\Delta APB} = S_{AMBN}$, тому $R \cdot PO = 2R^2$, звідки $PO = 2R$.

Із трикутника $AOP(\angle O = 90°)$ маємо: $\mathrm{tg}\angle PAO = \frac{PO}{AO} = \frac{2R}{R} = 2$;

$\angle PAO = \mathrm{arctg}2$.

Відповідь: $\mathrm{arctg}2$.

Задача 7. Площа основи конуса дорівнює Q, кут нахилу твірної до площини основи φ. Знайдіть площу перерізу, проведену через дві твірні, кут між якими дорівнює β. Обчисліть, якщо $Q = 2\pi$ см^2; $\beta = 30°$; $\varphi = 60°$.

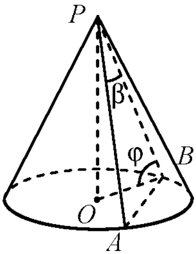


Рис. 6.27

Розв'язання. Нехай є конус, висота якого — PO; PA і PB — твірні (рис. 6.27). За умовою $\angle APB = \beta$, $S_{\text{осн}} = Q$. Оскільки $PO \perp (ABO)$, PB — похила, OB — її проекція на площину основи, то $\angle OBP = \varphi$.

Нехай $OB = R$. За умовою задачі $\pi R^2 = Q$, тому $R = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$. Із трикутника $POB(\angle O = 90°)$ маємо:

$$PB = \frac{OB}{\cos\angle OBP} = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}\cos\varphi};$$

Оскільки $PA = PB$ і $\angle APB = \beta$, то

$$S_{\Delta APB} = \frac{1}{2} PB^2 \sin\angle APB = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{\pi}\cos\varphi}\right)\sin\beta = \frac{Q\sin\beta}{2\pi\cos^2\varphi}.$$

Якщо $Q = 25\pi$ см^2; $\beta = 30°$; $\varphi = 60°$, то

$$S_{\Delta APB} = \frac{25\pi\sin 30°}{2\pi(\cos 60°)^2} = \frac{25\pi\frac{1}{2}}{2\pi\frac{1}{4}} = 25\ (\text{см}^2).$$

Відповідь: $\frac{Q\sin\beta}{2\pi\cos^2\varphi}$; 25 (см^2).

Задача 8. Радіуси двох куль дорівнюють 13 і 15 дм, а відстань між їх центрами — 14 дм. Визначте довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

Розв'язання. Нехай задано дві кулі $(O_1; R_1)$ і $(O_2; R_2)$ (рис. 6.28). За умовою $R_1 = 13$ дм, $R_2 = 15$ дм, $O_1O_2 = 14$ дм.

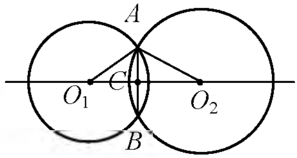


Рис. 6.28

Якщо відстань між центрами двох куль менша від суми їх радіусів, то їх поверхні перетинаються по колу.

У цьому випадку $O_1O_2 < R_1 + R_2$, тому сфери $(O_1; R_1)$ і $(O_2; R_2)$ перетинаються.

Ця площина перетинає кожну сферу по її великому колу, які перетинатимуться в точках A і B. З планіметрії відомо, що $O_1O_2 \perp AB$.

Нехай $O_1O_2 \cap AB = C$. Відрізок CA буде радіусом кола, по якому перетинаються сфери куль. Нехай $O_1C = x$, тоді $O_2C = 14 - x$.

Із трикутника $O_1AC\,(\angle C = 90°)$ випливає: $AC^2 = O_1A^2 - O_1C^2$, $AC^2 = O_1A^2 - x^2$.

Із трикутника $O_2AC\,(\angle C = 90°)$ маємо:

$$AC^2 = O_2A^2 - O_2C^2,\ AC^2 = O_2A^2 - (14 - x)^2.$$

Звідси дістаємо:

$$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2;\ x = 5,$$

тому $CA = \sqrt{O_1A^2 - O_1C^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$. А довжина кола ($C$, CA) дорівнює $2\pi CA = 24\pi$.

Відповідь: 24π дм.

Задача 9. Сторони трикутника дорівнюють 13, 14 і 15 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі — 5 см.

Розв'язання. Нехай O — центр кулі, ABC — трикутник; K, L, M — точки дотику його сторін до відповідної сфери. Відомо, що пряма, яка дотикається до сфери, має з нею єдину спільну точку. Точками K, L і M визначається площина, яка перетинає сферу по колу f із центром у точці O_1 (рис. 6.29).

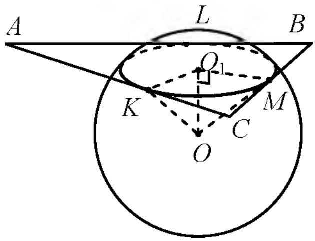


Рис. 6.29

Це коло матиме з кожною стороною трикутника ABC по єдиній спільній точці, тобто коло f буде вписаним у трикутник ABC.

Радіус O_1M цього кола знайдемо за формулою $r = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}$.

За формулою Герона

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84 \text{ (см}^2\text{)};$$

$O_1M = r = \dfrac{2 \cdot 84}{42} = 4$ (см). Оскільки $O_1O \perp (ABC)$, то $\angle OO_1M = 90°$ (за означенням прямої, перпендикулярної до площини).

Отже, $OO_1 = \sqrt{OM^2 - O_1M^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (см).

Відповідь: 3 см.

Задача 10. Визначте об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі — 75см.

Розв'язання. Розглянемо осьовий переріз $AOBD$ кульового сектора.

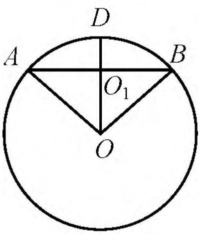


Рис. 6.30

Оскільки $V_{\text{сек}} = \dfrac{2}{3}\pi R^2 H$, де R — радіус кулі, а $H = O_1D$ — висота відповідного сегмента, то для розв'язання задачі потрібно знайти H (рис. 6.30).

Якщо $OD \perp AB$, то $OD \cap AB = O_1$ і AO_1 є радіусом кола його основи. За умовою задачі $O_1A = 60$ см і $R = 75$ см, тому

$OO_1 = \sqrt{R^2 - O_1A^2} = 45$ (см); $H = OD - OO_1 = 75 - 45 = 30$ (см);

$V = \dfrac{2}{3}\pi 75^2 \cdot 30 = 112\,500\,\pi$ (см^3).

Відповідь: $112\,500\,\pi$ см^3.

6.3. Тематичне тестування

Рівень І

1. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см. Обчисліть площу основи конуса.

А 36π см^2; **Б** 108 см^2; **В** 144π см^2; **Г** 81 см^2; **Д** інша відповідь.

2. Чому дорівнює об'єм конуса, радіус основи якого R, а висота дорівнює радіусу основи?

А $3\pi R^3$; **Б** $2\pi R^2$; **В** πR^3; **Г** $\frac{1}{3}\pi R^3$; **Д** інша відповідь.

3. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, радіус основи якого дорівнює 3 см, а твірна у три рази більша за радіус.

А 27π см^2; **Б** 81π см^2; **В** 12π см^2; **Г** 30π см^2; **Д** інша відповідь.

4. Точка A — довільна точка простору. Яку геометричну фігуру утворюють усі точки простору, відстань від яких до точки A не більша за n?

А коло; **Б** круг; **В** сферу; **Г** кулю; **Д** інша відповідь.

5. Визначте відношення об'ємів двох куль, радіуси яких дорівнюють 3 і 6 см.

А 1 : 3; **Б** 1 : 8; **В** 1 : 2; **Г** 1 : 4; **Д** інша відповідь.

6. Об'єм однієї кулі у 27 разів більший за об'єм другої кулі. Чому дорівнює радіус першої кулі, якщо радіус другої кулі дорівнює 2 см?

А 6 см; **Б** 12 см; **В** 27 см; **Г** 4 см; **Д** інша відповідь.

7. Точка A — довільна точка простору. Яку геометричну фігуру утворюють усі точки простору, віддалені від точки A на відстань n?

А коло; **Б** круг; **В** сферу; **Г** кулю; **Д** інша відповідь.

8. Визначте відношення площ поверхонь двох сфер, радіуси яких дорівнюють 5 і 10 см.

А 1 : 5; **Б** 1 : 2; **В** 1 : 8; **Г** 1 : 4; **Д** інша відповідь.

9. Осьовим перерізом циліндра є квадрат, площа якого дорівнює 16 см^2. Обчисліть повну поверхню циліндра.

А 12π см^2; **Б** 18π см^2; **В** 20π см^2;

Г24π см^2; **Д** інша відповідь.

10. Об'єм циліндра дорівнює 18 см^3. Чому буде дорівнювати його об'єм, якщо радіус основи збільшити у два рази?

А 36π см^3; **Б** 54π см^3; **В** 72π см^3;

Г 90π см^3; **Д** інша відповідь.

Рівень II

1. Осьовий переріз циліндра — прямокутник, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{3}$ см, і утворює з основою кут $30°$. Об'єм циліндра дорівнює… .

А $72\sqrt{3}\pi$ см^3; **Б** 72 см^3; **В** $18\sqrt{3}$ см^3;

Г $24\sqrt{3}\pi$ см^3; **Д** інша відповідь.

2. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює 24π см^2, а його об'єм — 48π см^3. Знайдіть його висоту.

А 4 см; **Б** 3 см; **В** 2 см; **Г** 8 см; **Д** інша відповідь.

3. Діагоналі осьового перерізу циліндра взаємно перпендикулярні. Радіус його основи дорівнює 2 см. Обчисліть об'єм циліндра.

А 16π см^3; **Б** 32π см^3; **В** 24π см^3;

Г 8π см^3; **Д** інша відповідь.

4. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник з кутом при вершині $120°$ і бічною стороною 8 см. Обчисліть радіус основи конуса.

А 4 см; **Б** $4\sqrt{3}$ см; **В** 8 см; **Г** 16 см; **Д** інша відповідь.

5. Твірна конуса утворює з площиною основи кут $60°$ і дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Обчисліть об'єм конуса.

А $81\sqrt{3}\pi$ см^3; **Б** 81π см^3; **В** 243 см^3;

Г 729π см^3; **Д** інша відповідь.

6. Два конуси мають однакову площу бічної поверхні. Знайдіть відношення радіусів їх основ, якщо твірна першого конуса в три рази більша за твірну другого.

А 1 : 3; **Б** 1 : $\sqrt{3}$; **В** 1 : 9; **Г** $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; **Д** інша відповідь.

7. Радіуси основ циліндра і конуса рівні, висота циліндра дорівнює 8 см, а конуса — 6 см. Визначте відношення об'єму циліндра до об'єму конуса.

А4:3; **Б**1:1; **В**4:1; **Г**3:1; **Д** інша відповідь.

8. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 8 і 5 см, а висота — 4 см. Обчисліть площу бічної поверхні зрізаного конуса.

А 39 π см^2; **Б** 65 π см^2; **В** 40 π см^2; **Г** 200 см^2; **Д** інша відповідь.

9. Об'єм кулі дорівнює V м^3. Площа перерізу кулі площиною, що проходить через центр кулі, дорівнює… .

А $2\sqrt[3]{\frac{9}{2}\pi V^2}$; **Б** $\sqrt[3]{\frac{9}{2}\pi V^2}$; **В** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{9}{2}\pi V^2}$;

Г $2\pi\sqrt[3]{\frac{2\pi^2}{9V^2}}$; **Д** інша відповідь.

10. Об'єми двох куль відносяться, як 27 : 64. Як відносяться площі їх поверхонь?

А 9 : 16; **Б** 4 : 5; **В** 3 : 8; **Г** 3 : 4; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $\frac{6}{\pi}$ см^2. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра.

А 12 см^2; **Б** 6 см^2; **В** 6 π см^2; **Г** 18 см^2; **Д** інша відповідь.

2. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з його більшою стороною кут α. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням цього прямокутника навколо його меншої сторони.

А $\pi d^2 \sin 2\alpha$; **Б** $2\pi d^2 \sin 2\alpha$; **В** $\pi d^2 \cos 2\alpha$;

Г $\pi d^2 \sin \alpha$; **Д** інша відповідь.

3. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який є квадратом зі стороною 6 см і відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої дорівнює $90°$. Обчисліть об'єм циліндра.

А 36 π см^3; **Б** 72 π см^3; **В** 108 π см^3; **Г** 216 π см^3; **Д** інша відповідь.

4. Квадрат обертається навколо своєї діагоналі. Обчисліть об'єм тіла обертання, якщо сторона квадрата дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

А $\frac{128\pi}{3}$ см^3; **Б** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ см^3; **В** $\frac{16\pi}{3}$ см^3;

Г $\frac{8\pi}{3}$ см^3; **Д** інша відповідь.

5. Твірна конуса дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α. Визначте відстань від центра основи конуса до твірної.

А $l\sin\alpha$; **Б** $l\sin^2\alpha$; **В** $l\cos^2\alpha$; **Г** $\frac{1}{2}l\sin 2\alpha$; **Д** інша відповідь.

6. Із паперового круга радіусом 12 см вирізали сектор із центральним кутом $120°$ і згорнули його у формі конуса. Знайдіть радіус основи цього конуса.

А 3 см; **Б** $2\sqrt{3}$ см; **В** 4 см; **Г** $4\sqrt{2}$ см; **Д** інша відповідь.

7. В основі конуса проведемо хорду завдовжки 12 см, яку видно із центра основи під кутом $120°$. Обчисліть об’єм конуса, якщо його твірна дорівнює 8 см.

А 32π см^3; **Б** 128π см^3; **В** 81π см^3; **Г** 64π см^3; **Д** інша відповідь.

8. Довжина лінії перетину сфери і площини, яка віддалена від її центра на 12 см, дорівнює 10π см. Обчисліть площу сфери.

А 676π см^2; **Б** $\frac{676}{3}$ см^2; **В** 576π см^2;

Г 484π см^2; **Д** інша відповідь.

9. Через кінець радіуса кулі проведемо переріз, який утворює з цим радіусом кут $30°$. Обчисліть площу поверхні кулі, якщо площа перерізу дорівнює 36π см^2.

А 186π см^2; **Б** 192π см^2; **В** 164π см^2;

Г 216π см^2; **Д** інша відповідь.

10. У скільки разів треба зменшити діаметр кулі, щоб її об’єм зменшився утричі?

А у $\sqrt[3]{9}$; **Б** у 3; **В** у $\sqrt{3}$; **Г** у $\sqrt[3]{3}$; **Д** інша відповідь.

6.4. Задачі для самостійної роботи

1. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу, як $\pi : 4$. Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу.

Відповідь: $90°$.

2. У циліндрі проведено паралельно осі площину, що відтинає від кола основи дугу $120°$. Висота циліндра 10 см; віддаль осі циліндра до січної площини дорівнює 2 см. Обчисліть площу перерізу.

Відповідь: $40\sqrt{3}$ см^2.

3. Обчисліть об’єм конуса за площею Q основи і бічною поверхнею S.

Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(S^2-Q^2)Q}{\pi}}$.

4. Об’єм конуса V. Висота його поділена на три рівні частини і через точки поділу проведені площини, паралельні основі. Обчисліть об’єм середньої частини конуса.

Відповідь: $\frac{7}{27}V$.

5. На одній основі побудовано конус і рівновеликий йому циліндр. Паралельно основі проведено площину через середину висоти циліндра. Як відносяться площі утворених перерізів конуса і циліндра?

Відповідь: 25 : 36.

6. Прямокутний трикутник з катетами a і b обертається навколо гіпотенузи. Обчисліть об’єм і поверхню тіла обертання.

Відповідь: $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\pi ab(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

7. Через вершину конуса проведено площину, що перетинає його основу по хорді, яку видно з центра основи під кутом β, а з вершини — під кутом α. Визначте бічну поверхню конуса, якщо площа перерізу дорівнює S.

Відповідь: $\frac{\pi S}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$.

8. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 і 16 м^2. Через середину висоти цього конуса паралельно його основі проведено площину. Знайдіть площу перерізу.

Відповідь: 9 м^2.

9. Радіус кулі дорівнює 63 см. Точка лежить на дотичній площині на віддалі 16 см від точки дотику. Знайдіть її найкоротшу віддаль від поверхні кулі.

Відповідь: 2 см.

10. Переріз кулі площиною, що розміщена на відстані 12 см від її центра, має площу 25 π см^2. Знайдіть площу поверхні кулі.

Відповідь: 676 π см^2.

7. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

7.1. Теоретичні відомості

Можливі типи комбінацій геометричних тіл

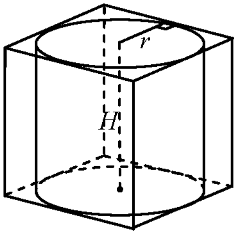


Рис. 7.1

1. Циліндром, вписаним у призму, називається циліндр, основи якого круги, вписані в основи призми, а бічна поверхня циліндра дотикається до бічних граней призми (рис. 7.1).

Радіус циліндра r. Вісь циліндра збігається з висотою призми H.

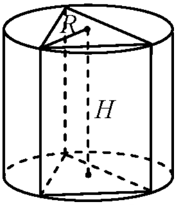


Рис. 7.2

2. Циліндр називається описаним навколо призми, якщо його основи — круги описані навколо основ призми, а твірні збігаються з ребрами призми. Радіус циліндра R (рис. 7.2).

Вісь циліндра збігається з висотою призми H.

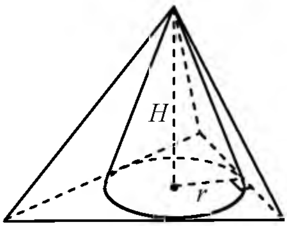


Рис. 7.3

3. Конусом, вписаним у піраміду, називається конус, основа якого — круг, вписаний у багатокутник основи піраміди, вершина збігається з вершиною піраміди, бічна поверхня конуса дотикається до бічних граней піраміди (рис. 7.3). Радіус вписаного в основу піраміди кола (круга) перпендикулярний до сторони багатокутника, який лежить в основі піраміди і є проекцією твірної конуса на площину основи.

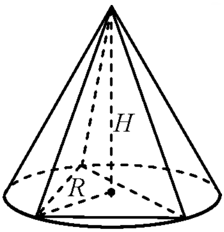


Рис. 7.4

4. Конус називається описаним навколо піраміди, якщо його основа — круг, описаний навколо основи піраміди, вершина збігається з вершиною піраміди, а твірні — з ребрами піраміди (рис. 7.4).

Висоти конуса і піраміди збігаються.

5. У будь-який прямий конус можна вписати прямий циліндр (рис. 7.5). При цьому:

$$\frac{r}{R}+\frac{h}{H}=1.$$

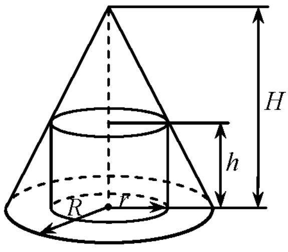


Рис. 7.5

6. Куля називається описаною навколо циліндра, якщо основи циліндра є паралельними перерізами кулі (рис. 7.6).

Центр описаної кулі лежить на середині висоти циліндра, яка проходить через вісь циліндра. $ABCD$ — осьовий переріз циліндра.

$$R^2=\left(\frac{H}{2}\right)^2+r^2.$$

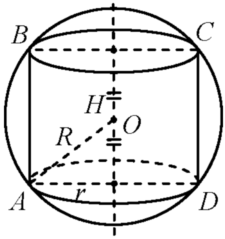


Рис. 7.6

7. Куля називається описаною навколо конуса, якщо основа конуса є перерізом кулі (сфери), а вершина конуса лежить на поверхні кулі (рис. 7.7)

$$R^2=(H-R)^2+r^2.$$

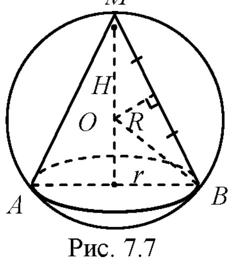


Рис. 7.7

8. Центр вписаної кулі лежить на осі конуса і збігається з центром кола, вписаного в трикутник, який є осьовим перерізом конуса (рис. 7.8).

Трикутник ASB — осьовий переріз конуса; $SO_1=H$, AO — бісектриса $\angle SAO_1$;

$$\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}.$$

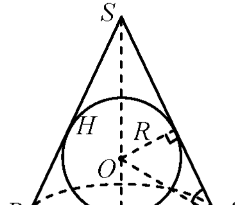


Рис. 7.8

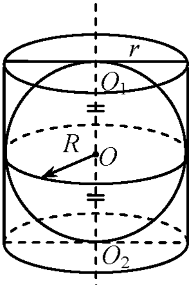


Рис. 7.9

9. Куля називається вписаною в циліндр (конус), якщо основи (основа) і всі твірні, які утворюють циліндр (конус), дотикаються до кулі (рис. 7.9).

$O_1O_2 = H$; $R = r$; $2R = H$.

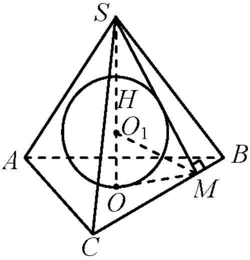


Рис. 7.10

10. Куля називається вписаною в піраміду, якщо всі грані піраміди дотикаються до кулі. $SO = H$; SMO — лінійний кут (рис. 7.10).

$(OM \perp BC;\ SM \perp BC) MO_1$ — бісектриса кута SMO; OO_1 — радіус вписаної кулі, OM — радіус кола, вписаного в основу піраміди.

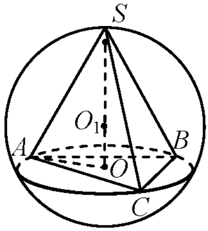


Рис. 7.11

11. Куля називається описаною навколо піраміди, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі (рис. 7.11).

O_1 — центр описаної кулі;

$AO_1 = BO_1 = CO_1 = SO_1 = R$.

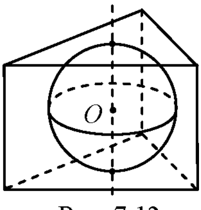


Рис. 7.12

12. Куля називається вписаною в багатогранник, якщо всі грані багатогранника дотикаються до кулі (рис. 7.12). Багатогранник у цьому випадку називається описаним навколо кулі (сфери).

Центр кулі, вписаної в багатогранник, рівновіддалений від усіх його граней. Він є точкою перетину півплощин, проведених через ребра двогранних кутів, утворених двома суміжними гранями, які ділять цей кут навпіл. Відстань від центра кулі до його граней — його радіус.

13. Куля називається описаною навколо багатогранника, якщо всі вершини багатогранника лежать на поверхні кулі (сфери). У цьому випадку багатогранник вписаний у кулю (рис. 7.13).

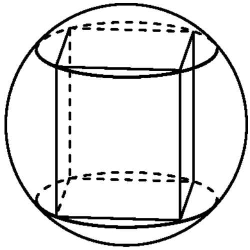


Рис. 7.13

Центр кулі, описаної навколо багатогранника, рівновіддалений від усіх його вершин, тобто є точкою перетину площин, проведених через середини ребер багатогранника перпендикулярно до них. Відстань від центра кулі до вершини багатогранника — його радіус.

14. Кулю можна описати навколо призми, тільки, якщо вона пряма і її основа є багатокутником, вписаним у коло. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині висоти призми, яка з'єднує центри кіл, описаних навколо основ призми (рис. 7.14).

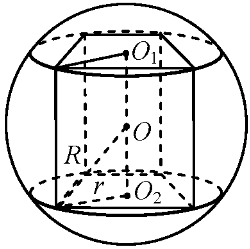


Рис. 7.14

O — центр кулі; R — радіус кулі; $O_1O_2 = H$ — висота призми; r — радіус кола, описаного навколо основи призми

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2 .$$

7.2. Тренувальні вправи

Опорні задачі

Розглянемо деякі опорні задачі на комбінації геометричних тіл, які значно полегшать і пришвидшать процес розв'язування геометричних задач на комбінації багатогранників і тіл обертання.

Опорна задача 1. У кулю радіусом R вписано конус, твірна якого l і нахилена до площини основи під кутом α. Доведіть, що для такої комбінації тіл справедливі співвідношення:

$$l = 2R\sin\alpha ;$$

$$l^2 = 2RH , \qquad (1)$$

де H — довжина висоти конуса.

Розв'язання. Розглянемо переріз кулі площиною, яка проходить через вісь конуса (рис. 7.15). У перерізі утворюється круг, у який вписано рівнобедрений трикутник ABC $(AC = BC)$.

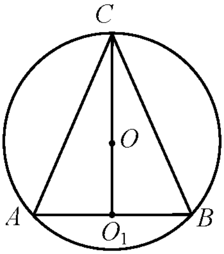


Рис. 7.15

Висота CO_1 трикутника є висотою конуса з вершиною C. Центр описаної навколо конуса кулі розміщено на висоті конуса або на її продовженні за площину основи. За умовою в трикутнику $ABC: AC = BC = l$ і $\angle CAB = \angle CBA = \alpha$. За наслідком із теореми синусів маємо: $l = 2R\sin\alpha$. Оскільки із трикутника $ACO_1: H = l\sin\alpha$, то, помноживши обидві частини останньої рівності на l, дістанемо: $l^2 = 2RH$.

Задача 1. Обчисліть площу поверхні кулі, описаної навколо конуса, висота якого H, а кут в осьовому перерізі конуса при вершині β.

Розв'язання. За умовою в трикутнику $ABC: CO_1 = H$ і $\angle ACB = \beta$. Тоді $\angle CAO_1 = 90° - \frac{\beta}{2}$. Із трикутника ACO_1 маємо:

$$AC = \frac{CO}{\cos\angle ACO_1} = \frac{H}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Записуємо співвідношення $l = 2R\sin\alpha$ з опорної задачі 1 для знаходження радіуса кулі, описаної навколо цього конуса:

$$R = \frac{1}{2\sin\alpha}: R = \frac{AC}{2\sin\angle CAO_1} = \frac{\frac{H}{\sin\frac{\beta}{2}}}{2\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{H}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Визначаємо площу поверхні описаної кулі:

$$S = 4\pi\left(\frac{H}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}\right)^2 = \frac{\pi H^2}{\cos^4\frac{\beta}{2}}.$$

Відповідь: $\frac{\pi H^2}{\cos^4\frac{\beta}{2}}$.

Опорна задача 2. Кулю радіусом R вписано в конус, радіус основи якого r, а твірна нахилена до площини основи під кутом β. Доведіть, що для такої комбінації тіл правильні співвідношення:

$$R = r\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}; \qquad (2)$$

$$R = \frac{Hr}{l+r}, \qquad (3)$$

де H і l — довжини висоти і твірної конуса відповідно.

Розв'язання. Центр кулі, вписаної в конус, лежить на висоті конуса. Розглянемо переріз комбінації тіл площиною осьового перерізу конуса. У перерізі утворюється рівнобедрений трикутник ABC (рис. 7.16), у який вписано коло з центром у точці O_1, що належить висоті CO трикутника. Це коло є більшим колом вписаної в конус кулі, тому його радіус OO_1 дорівнює R. Центр O_1 є точкою перетину бісектрис кутів ACB і CAO трикутника ABC. Оскільки за умовою $\angle CAO = \alpha$, то $\angle O_1OA = \frac{\alpha}{2}$, AO — радіус основи конуса; $AO = r$.

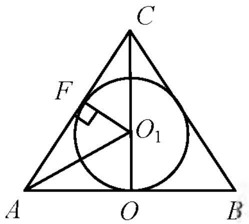


Рис. 7.16

Із трикутника O_1AO випливає:

$$OO_1 = AO\,\mathrm{tg}\angle O_1AO = r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Із трикутника CAO за властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо: $\frac{AC}{AO} = \frac{CO_1}{OO_1}$ або $\frac{1}{r} = \frac{H-R}{R}$, звідки $lR = Hr - rR$, $R = \frac{Hr}{l+r}$.

Задача 2. Кулю радіусом R вписано в конус. Обчисліть об'єм конуса, якщо його твірна утворює з площиною основи кут α.

Розв'язання. Для розв'язання задачі скористаємося рис. 7.16 опорної задачі 2. Із трикутника AOO_1 випливає:

$AO = OO_1\,\mathrm{ctg}\angle OAO_1 = R\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а з трикутника

$$CAO : CO = AO \operatorname{tg}\angle CAO = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha .$$

Знайдемо об'єм конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi AO^2 \cdot CO = \frac{\pi}{3}R^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\pi}{3}R^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha .$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3}R^3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Опорна задача 3. Піраміду, в якій усі бічні ребра дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом α, вписано в кулю радіусом R. Доведіть, що для такої комбінації тіл правильні співвідношення:

$$l = 2R\sin\alpha ; \quad (4)$$

$$l^2 = 2HR , \quad (5)$$

де H — довжина висоти піраміди.

Доведення. Оскільки піраміду вписано в кулю, то всі її вершини належать поверхні кулі. Площа основи піраміди перетинає поверхню кулі по колу, описаному навколо основи піраміди. Нехай $MABCD$ — піраміда, в якій усі бічні ребра дорівнюють l і нахилені до площини основи під кутом α (рис. 7.17).

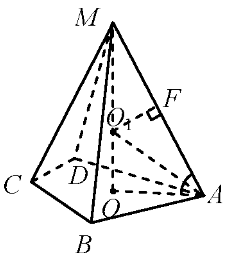


Рис. 7.17

MO — висота піраміди. Розглянемо трикутник MAO. За умовою $\angle MAO = \alpha$. Нехай $45° < \alpha < 90°$, тоді точка O_1 — центр описаної кулі, належить висоті піраміди (в іншому випадку на продовженні висоти за площину основи чи на основі піраміди).

Проведемо $O_1F \perp MA$, дістанемо прямокутний трикутник MO_1F. $\angle MO_1F = \angle MAO = \alpha$. Оскільки O_1F — висота рівнобедреного трикутника MO_1A, то точка F — середина ребра MA, тому $MF = \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}l$.

Із трикутника MO_1F маємо: $MF = MO_1 \sin\angle MO_1F$, тобто $\frac{1}{2}l = R\sin\alpha$ і $l = 2R\sin\alpha$. Помножимо обидві частини останньої рівності на l і, враховуючи, що $l\sin\alpha = H$, маємо: $l^2 = 2RH$.

Задача 3. У кулю радіусом R вписано правильну трикутну піраміду. Знайдіть об'єм піраміди, якщо бічне ребро утворює з висотою кут α.

Розв'язання. Нехай $MABC$ — піраміда. висота якої MO; $\angle OMA = \alpha$ за умовою (рис. 7.18). Тоді $\angle MAO = 90° - \alpha$.

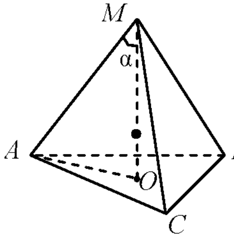


Рис. 7.18

Використовуючи формулу (4), маємо $AM = 2R\sin\angle MAO = 2R\cos\alpha$.

Із трикутника MAO маємо:

$$MO = AM\sin\angle MAO = 2R\cos^2\alpha,$$

$$AO = AM\cos\angle MAO =$$
$$= 2R\cos\alpha\sin\alpha = R\sin 2\alpha.$$

Сторона основи піраміди $AB = AO\sqrt{3} = R\sqrt{3}\sin 2\alpha$.

Площа основи $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}3R^2\sin^2 2\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2\sin^2 2\alpha$.

Об'єм піраміди $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}MO = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot R^2\sin^2 2\alpha$.

$2R\cos^2\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^3\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha$.

Опорна задача 4. Кулю радіусом R вписано в піраміду, в якій усі бічні грані нахилені до площини основи під кутом β і радіус кола, вписаного в основу піраміди, дорівнює r. Доведіть що для цієї комбінації тіл правильне співвідношення:

$$R = r\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}; \tag{6}$$

$$R = \frac{Hr}{h+r}, \tag{7}$$

де H — довжина висоти піраміди; h — довжина висоти бічної грані піраміди, проведеної з вершини піраміди.

Розв'язання. Розглянемо піраміду, в якій усі бічні грані однаково нахилені до площини основи. Висота такої піраміди перетинає її основу в центрі вписаного в неї кола, і в таку піраміду можна вписати кулю, центр якої належить висоті піраміди. Доведемо це.

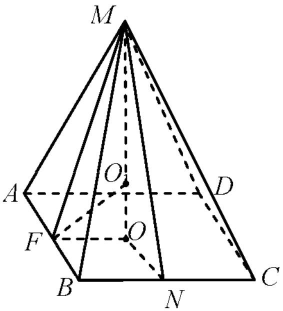


Рис. 7.19

Нехай $MABCD$ — піраміда (рис. 7.19), усі бічні грані якої однаково нахилені до площини основи і MO — її висота: $\angle MFO$ і $\angle MNO$ — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи AB і BC відповідно. За умовою $\angle MFO = \angle MNO$. $\Delta MFO = \Delta MNO$, за спільним катетом MO і гострим кутом. Звідси $OF = ON$. Тоді точка O рівновіддалена від сторін основи піраміди. Отже, точка O — центр вписаного кола. Проведемо бісектор двогранного кута при ребрі основи піраміди (наприклад, при ребрі AB). Цей бісектор перетинає площину лінійного кута MFO по бісектрисі FO_1 (O_1 — точка, в якій бісектриса кута MFO перетинає висоту MO піраміди). Очевидно, що точка O_1 — однаково віддалена від усіх граней піраміди. Тому вона є центром вписаної в піраміду кулі. Отже, якщо в піраміді всі бічні грані однаково нахилені до площини основи, то в таку піраміду можна вписати кулю, центр якої лежить на висоті піраміди. Доведемо співвідношення (6) і (7).

Нехай $MABCD$ — піраміда з висотою MO; $\angle MFO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи. За умовою $\angle MFO = \beta$. Точка O_1 — центр вписаної кулі; OO_1 — її радіус.

FO_1 бісектриса $\angle MFO$, тому $\angle O_1FO = \frac{\beta}{2}$, OF — радіус кола, вписаного в основу піраміди.

За умовою $OF = r$ і $OO_1 = R$.

Із трикутника O_1FO випливає: $OO_1 = OF\,\mathrm{tg}\angle O_1FO$ або $R = r\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$.

За властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника маємо $\frac{MO_1}{OO_1} = \frac{MF}{OF}$.

Перепишемо отриману рівність, ураховуючи позначення: $\frac{H-R}{R} = \frac{h}{r}$, звідки $R = \frac{HR}{h+r}$.

Задача 4. Відношення об'єму правильної трикутної піраміди до об'єму вписаної в неї кулі дорівнює $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$. Визначте кут нахилу бічної грані до площини основи піраміди.

Розв'язання. Нехай $MABC$ — задана в умові трикутна піраміда; MO — її висота (рис. 7.20). Оскільки піраміда правильна, то точка O — основа висоти і є центром кола, вписаного в правильний трикутник ABC. Центр кулі, вписаної в піраміду, — точка O_1 належить висоті MO піраміди. Кут MFO — лінійний кут двогранного кута, який бічна грань MBC утворює із площиною основи, кут MFO — шуканий. OO_1 — радіус кулі, вписаної в піраміду, OF — радіус кола, вписаного у трикутник ABC.

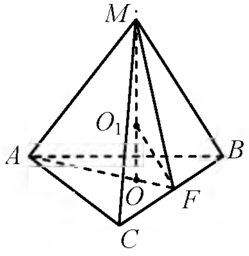


Рис. 7.20

Нехай $O_1O = R$, $OF = r$, $\angle MFO = \beta$.

Згідно з рівністю (6) $R = r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Виразимо відношення об'єму піраміди до об'єму кулі. У трикутнику ABC за відомими співвідношеннями $AB = 2OF\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}$. Знайдемо площу трикутника ABC.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2 3\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}r^2.$$

Із трикутника MOF маємо: $MO = OF\operatorname{tg}\angle MFO = r\operatorname{tg}\beta$.

Знайдемо об'єм піраміди:

$$V_п = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}MO = \frac{1}{3}3r^2\sqrt{3}r\operatorname{tg}\beta = r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta.$$

Об'єм кулі, вписаної в піраміду, становить:

$$V_к = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}.$$

Тоді $\frac{V_п}{V_к} = \frac{r^3\operatorname{tg}\beta\sqrt{3}}{4\pi\operatorname{tg}^3\frac{\beta}{2}} = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

За умовою задачі $\frac{V_п}{V_к} = \frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

Отже, $\dfrac{3\sqrt{3}\operatorname{tg}\beta}{4\pi\operatorname{tg}^3\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4\pi}$. Звідси $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}^3\dfrac{\beta}{2}}=9$, оскільки

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\beta}{2}},\text{ тоді } 2-9\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+9\operatorname{tg}^4\frac{\beta}{2}=0;\ \beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Тоді $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ або $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Отже, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ або $\beta=2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{3}$ або $2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

7.3. Зразки розв'язування задач

Задача 1. Знайдіть величину плоского кута при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо центр сфери, вписаної в піраміду та описаної навколо неї, збігаються.

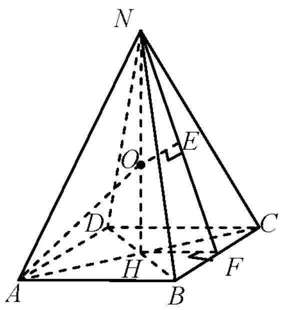


Рис. 7.21

Розв'язання. Піраміда правильна, отже, в основі квадрат $ABCD$ і висота NH проходить через центр квадрата; O — центр сфери, описаної навколо піраміди (рис. 7.21). E — точка дотику з гранню BNC. NF — апофема грані BNC.

Сфера дотикається до основи піраміди у точці H.

Трикутники NOE і OAH рівні за гіпотенузою і катетом, тоді $AH=NE=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, якщо взяти $AB=a$. $HF=FE$ як відрізки дотичних, проведених до сфери з однієї точки. Тоді отримаємо $EF=\dfrac{a}{2}$; $NF=NE+EF=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}+\dfrac{a}{2}$.

У трикутнику NBF:

$$\operatorname{tg}\angle BNF = \frac{BF}{NF} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}+\frac{a}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1;$$

$$\operatorname{tg}\angle BNC = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = 1 \Rightarrow \angle BNC = 45^\circ.$$

Відповідь: 45°.

Задача 2. Кут між твірною конуса і його висотою дорівнює β. Відстань від центра описаної навколо конуса кулі до основи його висоти l. Знайдіть радіус основи і висоту конуса.

Розв'язання. Розглянемо осьовий переріз комбінації даних тіл. Осьовим перерізом кулі буде круг (радіус якого дорівнює радіусу кулі), а осьовим перерізом конуса буде рівнобедрений трикутник (основа якого дорівнює діаметру основи конуса, а висота — висоті конуса). Оскільки коло описано навколо конуса, то круг буде описано навколо трикутника. Кут між твірною конуса і його висотою є кутом між висотою рівнобедреного трикутника і його стороною ($\angle BSO_1 = \angle ASO_1 = \beta$). Залежно від величини кута β центр описаного навколо трикутника кола може розміщуватися:

1) якщо $0^\circ < \beta < 45^\circ$, всередині трикутника ABS на висоті SO_1 (рис. 7.22);

2) якщо $0^\circ < \beta < 90^\circ$, поза трикутником ABS на продовженні висоти (рис. 7.23).

У кожному з цих випадків $OO_1 = l$.

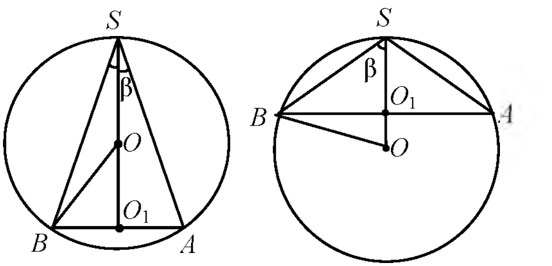


Рис. 7.22 Рис. 7.23

З'єднаємо в кожному з цих випадків точки O і B.

Для випадку 1:

$\angle O_1OB = 2\beta$ (як центральний кут, що відповідає вписаному куту BSO_1).

Тоді з прямокутного трикутника BOO_1: $R_{осн} = BO_1 = l\,\mathrm{tg}2\beta$, а з прямокутного трикутника SBO_1: $H_{кон} = SO_1 = BO_1,\ \mathrm{ctg}\beta = l\,\mathrm{tg}2\beta\,\mathrm{ctg}\beta$.

Для випадку 2:

$\angle O_1OB = 2\angle SAB = 2(90° - \beta) = 180° - 2\beta$.

Тоді з прямокутного трикутника BOO_1:

$R_{осн} = BO_1 = l\,\mathrm{tg}(180° - 2\beta) = -l\,\mathrm{tg}2\beta$, а з прямокутного трикутника SBO_1 маємо: $H_{кон} = SO_1 = BO_1,\ \mathrm{ctg}\beta = -l\,\mathrm{tg}2\beta\,\mathrm{ctg}\beta$. Якщо $\beta = 45°$, тоді точки O і O_1 збігаються.

Оскільки за умовою $OO_1 = l \neq 0$, робимо висновок, що цей випадок не задовольняє умови задачі.

Відповідь: $R = l\,\mathrm{tg}2\beta$; $H = l\,\mathrm{tg}2\beta\,\mathrm{ctg}\beta$.

Задача 3. У правильній чотирикутній піраміді відстань від середини висоти піраміди до бічної грані дорівнює d. Визначте радіус основи і твірну вписаного в піраміду конуса, якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом α.

Розв'язання. Якщо конус вписано в піраміду, то їх вершини збігаються, а основу конуса вписано в основу піраміди (рис. 7.24). Тоді збігаються їх висоти, тобто SO — висота піраміди і конуса.

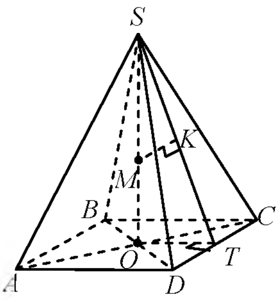


Рис. 7.24

Побудуємо лінійний кут двогранною кута при ребрі DC, проводимо $TO \perp DC$ і з'єднуємо точки S і T за теоремою про три перпендикуляри $ST \perp DC$.

Тоді STO — лінійний кут двогранного кута при ребрі DC. Тоді $(STO) \perp (SDC)$. Проведемо в площині STO, $MK \perp ST$, де точка M — середина висоти.

Тоді $MK \perp (SDC)$, тобто MK — відстань від середини висоти до бічної грані SDC, отже, $MK = d$.

Оскільки $OT \perp DC$, то OT — радіус вписаного в основу піраміди кола і тоді ST — твірна конуса, а OT — її проекція на площину основи, тобто STO — це кут нахилу твірної конуса до площини основи $\angle STO = \alpha$. Тоді $\angle SMK = \angle STO = \alpha$. Із прямокутного трикутника SMK маємо: $SM = \dfrac{MK}{\cos\alpha} = \dfrac{d}{\cos\alpha}$. Точка M — середина SO, тому $SO = 2SM = \dfrac{2d}{\cos\alpha}$.

Із прямокутного трикутника SOT знаходимо радіус основи конуса OT і твірну конуса ST:

$$OT = SO\,\mathrm{ctg}\alpha = \frac{2d}{\sin\alpha} : ST = \frac{SO}{\sin\alpha} = \frac{2d}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Відповідь: $\dfrac{2d}{\sin\alpha}$; $\dfrac{2d}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

7.4. Тематичне тестування

Рівень I

1. У правильну трикутну призму вписано циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндра і призми.

А $3:\sqrt{3}$; **Б** $\sqrt{3}:9$; **В** 1:3; **Г** $1:\sqrt{3}$; **Д** інша відповідь.

2. Навколо циліндра описано правильну трикутну призму. Знайдіть об'єм циліндра, якщо всі ребра призми дорівнюють 3 см.

А 9π см^3; **Б** 12π см^3; **В** $4{,}5\pi$ см^3; **Г** 6π см^3; **Д** інша відповідь.

3. У циліндр, висота якого дорівнює 4 см, вписано кулю. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра.

А 8 см^2; **Б** 16π см^2; **В** $\dfrac{4\pi}{3}$ см^2; **Г** 100 см^2; **Д** інша відповідь.

4. У куб з ребром 2 см уписано циліндр. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює…

А $2\sqrt{2}\pi$ см^2; **Б** 3π см^2; **В** 2π см^3; **Г** 4π см^3; **Д** інша відповідь.

5. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму— циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.

А 8 : 1; **Б** 3 : 1; **В** 4 : 1; **Г** 5 : 2; **Д** інша відповідь.

6. Правильну чотирикутну піраміду вписано у сферу. Обчисліть об’єм піраміди, якщо радіус сфери дорівнює 12 см, а радіус кола, описаного навколо основи піраміди, 6 см.

А $144\left(\sqrt{3}+2\right)$ см^3; **Б** $72\left(\sqrt{3}+2\right)$ см^3;

В $432\left(\sqrt{3}-2\right)$ см^3; **Г** $144\sqrt{3}$ см^3;

Д інша відповідь.

7. Ребра прямокутного паралелепіпеда 4, 6 і 12 см. Знайдіть радіус описаної кулі.

А 8 см; **Б** 6 см; **В** 7 см; **Г** 9 см; **Д** інша відповідь.

8. Радіус кулі 9 дм. У неї вписано правильну чотирикутну призму, висота якої 14 дм. Знайдіть сторону основи призми.

А 6 дм; **Б** 7 дм; **В** 9 дм; **Г** 8 дм; **Д** інша відповідь.

9. Знайдіть бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр з ребром a.

А $\frac{\pi a^2}{4}$; **Б** $\frac{\pi a^2}{8}$; **В** $\frac{1}{3}\pi a^2$; **Г** $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$;

Д інша відповідь.

10. У конус, висота якого 20 см, вписано правильну трикутну піраміду. Діаметр основи конуса 40 см. Знайдіть відношення площ бічних поверхонь піраміди і конуса.

А $\frac{2\sqrt{34}}{3\pi}$; **Б** $\frac{3\sqrt{30}}{8\pi}$; **В** $\frac{2\sqrt{15}}{\pi}$; **Г** $\frac{2\sqrt{30}}{3\pi}$;

Д інша відповідь.

7.5. Задачі для самостійної роботи

Рівень I

Задача 1. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Діагональ грані, що проходить через основу трикутника, дорівнює l і нахилена до основи під кутом β.

Визначте бічну поверхню циліндра, описаного навколо призми.

Відповідь: $\frac{\pi l^2 \sin^2\beta}{2\sin 2\alpha}$.

Задача 2. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Діагональ бічної грані дорівнює l і утворює з площиною основи кут β. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в цю призму.

Відповідь: $\frac{1}{2}\pi l^2 \sin 2\beta \sin \alpha$.

Задача 3. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.

Відповідь: 4 : 1.

Задача 4. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює α. Визначте площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота H.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}\pi H^2}{\cos\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}$.

Задача 5. Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут γ. Визначте об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює b.

Відповідь: $\frac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$.

Задача 6. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з площиною основи кут α. Обчисліть об'єм піраміди, якщо радіус описаної кулі R.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}R^3 \sin^2 2\alpha \sin^2 \alpha$.

Задача 7. Основою прямої призми є рівнобедрена трапеція з гострим кутом α. Діагональ трапеції є бісектрисою гострого кута. Діагональ бічної грані, що містить бічну сторону трапеції, дорівнює l і утворює з площиною основи кут γ. Визначте об'єм циліндра, описаного навколо призми.

Відповідь: $\frac{\pi l^3 \cos^2\gamma \sin\gamma}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 8. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Визначте площу бічної поверхні конуса.

Відповідь: $\pi d^2 \cos\varphi \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}$.

Задача 9. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині — α. Визначте об'єм конуса, вписаного в піраміду.

Відповідь: $\dfrac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{24 \sin\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 10. У правильній трикутній піраміді апофема дорівнює m, а плоский кут при вершині — β. Визначте об'єм конуса, вписаного в піраміду.

Відповідь: $\dfrac{\pi m^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \sqrt{9 - 3\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}}{27}$.

Рівень II

Задача 1. Знайдіть радіус сфери, вписаної в піраміду, основою якої є ромб; довжини діагоналей ромба дорівнюють 6 і 8 см. Висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей основи і має довжину 1 см.

Відповідь: $\frac{12}{25}$ см.

Задача 2. В основі призми лежить прямокутний трикутник з катетом b і протилежним кутом β. Діагональ грані, яка містить цей катет, нахилена до основи під кутом α. Знайдіть площу поверхні описаної сфери.

Відповідь: $\dfrac{\pi b^2 \left(1 + \sin^2\beta \operatorname{tg}^2\alpha\right)}{\sin^2\beta}$.

Задача 3. У піраміді $SABC$ $AB = SC$, ребро SC нахилено до площини основи ABC під кутом $60°$. Вершини A, B, C і середини бічних ребер піраміди належать сфері, радіус якої 1 см. Знайдіть довжину висоти піраміди.

Відповідь: $\sqrt{3}$ см.

Указівка: довести, що середина відрізка AB — центр сфери.

Задача 4. Основою прямої призми є прямокутний трикутник, висота якого h проведена через вершину прямого кута, та утворює з одним із катетів кут α. Знайдіть об'єм призми, якщо відомо, що в призму вписано сферу.

Відповідь: $\dfrac{2h^3}{\sin 2\alpha(1+\cos\alpha+\sin\alpha)}$.

Задача 5. У правильну трикутну піраміду вписано циліндр, вісь якого містить висоту піраміди, а його осьовий переріз — квадрат. Обчисліть площу бічної поверхні циліндра, якщо сторона основи і висота піраміди дорівнюють a і $2\sqrt{3}a$ відповідно.

Відповідь: $\dfrac{2\pi a^2}{49}$.

Задача 6. У конусі відомі радіус основи R і величина α кута між твірною і площиною основи. У цей конус вписано пряму трикутну призму з рівними ребрами так, що її основа лежить у площині основи конуса. Визначте довжину її ребра.

Відповідь: $\dfrac{3R}{3\operatorname{ctg}\alpha+\sqrt{3}}$.

Задача 7. Кожне ребро правильної шестикутної призми, вписаної в конус, має довжину a. Обчисліть об'єм конуса, якщо кут в його осьовому перерізі дорівнює $60°$.

Відповідь: $\dfrac{1}{9}\pi a^3\left(\sqrt{3}+1\right)^3$.

Задача 8. У конус вписано куб так, що одне ребро куба лежить на діаметрі основи конуса, центр куба належить висоті конуса. Знайдіть відношення об’ємів конуса і куба.

Відповідь: $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}\left(53-7\sqrt{3}\right)$.

Задача 9. У правильній трикутній піраміді бічна грань нахилена до основи під кутом φ. Визначте площу бічної поверхні піраміди, якщо радіус кулі, вписаної в піраміду, дорівнює R.

Відповідь: $\frac{3\sqrt{3}R^2\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}$.

Задача 10. Конус уписано в кулю, радіус якої R. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині його осьового перерізу α.

Відповідь: $2\pi R^2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$.

8. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ БАГАТОГРАННИКІВ

8.1. Теоретичні відомості

Задачі на побудову перерізів багатогранників трапляються серед завдань незалежного оцінювання знань учнів. Для правильної побудови перерізу необхідно чітко знати аксіоми стереометрії і наслідки з них.

Побудувати переріз означає накреслити багатокутник у площині перерізу, за яким ця площина перетинає грані багатогранника.

Слідом перерізу на площині називається пряма перетину цієї площини з площиною перерізу.

Основні правила побудови перерізів

1. Якщо задано (або побудовано) дві точки площини перерізу на одній грані багатогранника, то слідом перерізу в цій площині є пряма, яка проходить через ці точки.

2. Якщо задано (або побудовано) пряму перетину площини перерізу з основою багатогранника (слід на основі) і є точка, що належить певній бічній грані, то треба визначити точку перетину сліду з цією бічною гранню (вона є точкою перетину сліду зі спільною прямою основи і бічної грані).

3. Точку перетину площини перерізу з основою можна визначити як точку перетину якої-небудь прямої в площині перерізу з її проекцією на площину основи.

Розглянемо побудову перерізів багатокутників методом слідів

Приклад 1. Побудувати переріз піраміди $DABC$ площиною, яка проходить через точки M, N, P.

Ця площина перетинає ребро DA в точці M, а ребро DB — у точці N, отже, площину ADB вона перетинає по прямій MN (рис. 8.1). Аналогічно площину DBC вона перетинає по прямій NP. Однією з точок перетину цієї площини і площини нижньої грані є точка P.

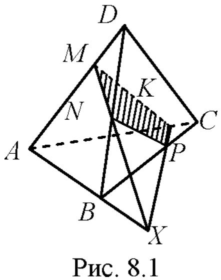


Рис. 8.1

Оскільки пряма MN належить площині перерізу, то друга шукана точка може бути знайдена як точка перетину прямої MN з площиною ABC. Очевидно, що ця точка X належить перетину прямих MN і AB. Тоді пряма XP є перетином площини перерізу з площиною ABC. Пряму XP називають слідом січної площини на площині ABC. Точка K — перетин прямої XP з ребром AC. Сполучаємо точку K з точкою M. Чотирикутник $MNPK$ — шуканий переріз.

Приклад 2. Побудувати переріз паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки M, K, N.

Указівка: Побудову виконано на рис. 8.2.

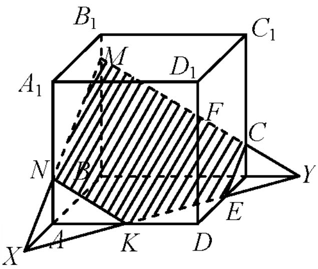


Рис. 8.2

Приклад 3. Побудувати переріз піраміди $EABCD$ площиною, що проходить через точки M, N і K (рис. 8.3).

На рис. 8.3 виконано побудову шуканого перерізу. Пряма XY — слід перетину січної площини з площиною ABC, пряма MY — слід січної площини на площині AED, пряма MX — слід січної площини на площині ABE, пряма NL — слід січної площини на площині CEB і пряма FK — слід січної площини на площині DEC.

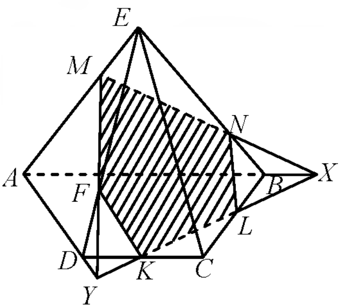


Рис. 8.3

Приклад 4. На бічних ребрах AA_1, BB_1, CC_1 чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точки K, P, T. Побудувати переріз призми площиною, яка проходить через ці точки.

Розв'язання. Нехай прямі PK і BA перетинаються у точці M, а прямі PT і BC у точці N (рис. 8.4). Точки M і N належать площині основи призми і січній площині. Пряма MN — лінія перетину цих площин. Якщо вона перетинає сторони основи призми в точках E і F, то п'ятикутник $KPTEF$ — шуканий переріз.

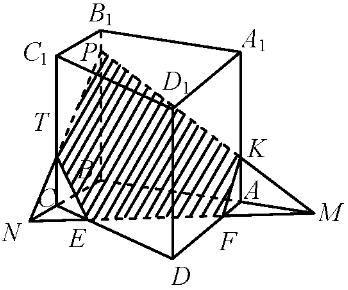


Рис. 8.4

Якщо ж пряма MN не перетинає основу призми (рис. 8.5), знаходимо точку Q перетину прямих MN і AD. Потім — точку E, в якій пряма KQ перетинає ребро DD_1. Чотирикутник $KPTE$ — шуканий переріз. Якщо точки K, P, T розміщено так, що $KP \parallel AB$ і точки перетину цих прямих не існує, тоді проводимо $MN \parallel AB$. Закінчуємо побудову, як у попередньому випадку (рис. 8.6).

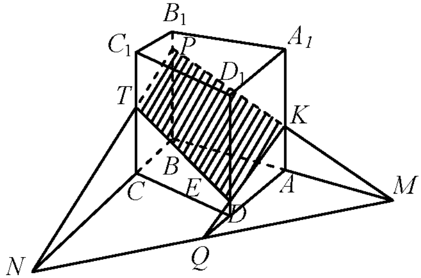


Рис. 8.5

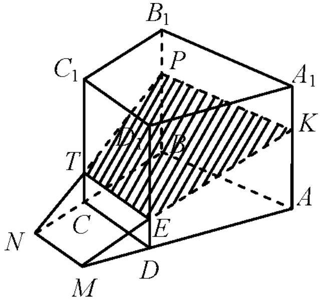


Рис. 8.6

Якщо виявиться, що $KP \parallel AB$ і $PT \parallel BC$, тоді січна площина паралельна площині основи. У цьому випадку на ребрі DD_1 позначаємо точку E таку, що $KE \parallel AD$.

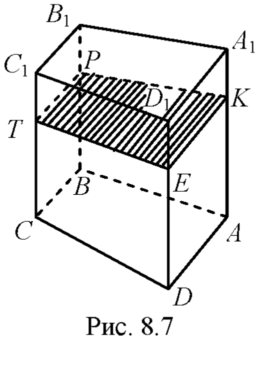


Рис. 8.7

Чотирикутник $KPTE$ — шуканий переріз (рис. 8.7). Метод слідів незручний, якщо точка перетину прямої з площиною не потрапляє на аркуш паперу або побудова займає більшу частину аркуша. У цьому випадку зручніше використовувати метод внутрішнього (паралельного або центрального) проектування.

Приклад 5.

Для побудови шуканого перерізу призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N, K треба побудувати точку L перетину площини MNK з ребром CC_1. Використаємо метод паралельного проектування. Нехай L — шукана точка на ребрі CC_1 (рис. 8.8).

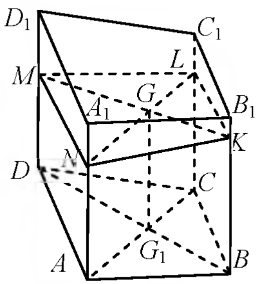


Рис. 8.8

Паралельною проекцією перерізу $MNKL$ на площину нижньої грані буде багатокутник $DABC$ проекцією відрізка MK є відрізок DB, а проекцією відрізка LM — відрізок CD. (Напрям проектування паралельний бічному ребру призми).

За такого проектування точка G перетину відрізків MK і NL перейде в точку G_1 перетину відрізків BD і AC. Звідси випливає така побудова: проводимо відрізки BD і AC, позначаємо точку G_1 — точку їх перетину. Проводимо через точку G_1 пряму, паралельну бічному ребру призми, і позначаємо точку G її перетину з відрізком MK. Точка перетину ребра CC_1 з прямою NG є шуканою точкою L. Розглянемо задачу на побудову перерізу методом центрального проектування.

Приклад 6.

Побудувати переріз піраміди $EABCD$ площиною, що проходить через точки M, N, K (рис. 8.9).

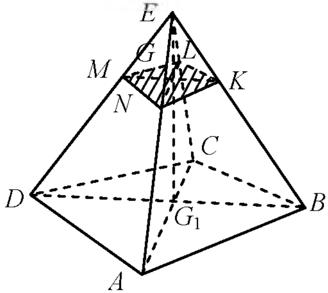


Рис. 8.9

Візьмемо за центр проектування точку E. Тоді проекцією відрізка MK на площину основи піраміди є відрізок DB. Нехай точка G_1 є точкою перетину відрізків DB і AC.

Вона є проекцією точки G ($G = MK \cap EG_1$). Точку L відшукаємо як перетин прямої NG з ребром EC.

Шуканий переріз — багатокутник $MNKL$.

Приклад 7. Побудувати переріз піраміди $DABC$ (рис. 8.10) площиною, яка проходить через точки M, N, P (M належить грані DAC, N — грані ADB, P — ребру CB). Розглянемо проектування з центром D на площину ABC. Проекцією відрізка MN є відрізок M_1N_1. Точка X_1 — проекція точки

$$X\left(X_1 = M_1N_1 \cap AP, X = MN \cap DX_1\right).$$

Таке проектування переводить пряму PX у пряму PX_1. Точка K перетину прямої PX і ребра AD належить шуканому перерізу. Чотирикутник $KEPL$ — шуканий переріз.

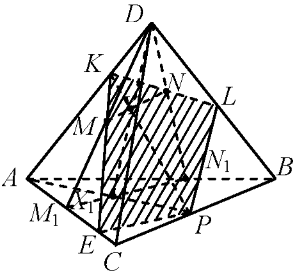


Рис. 8.10

8.2. *Завдання для самостійної роботи*

1. Побудуйте переріз куба площиною, яка проходить через точки M, P, K (рис. 8.11).

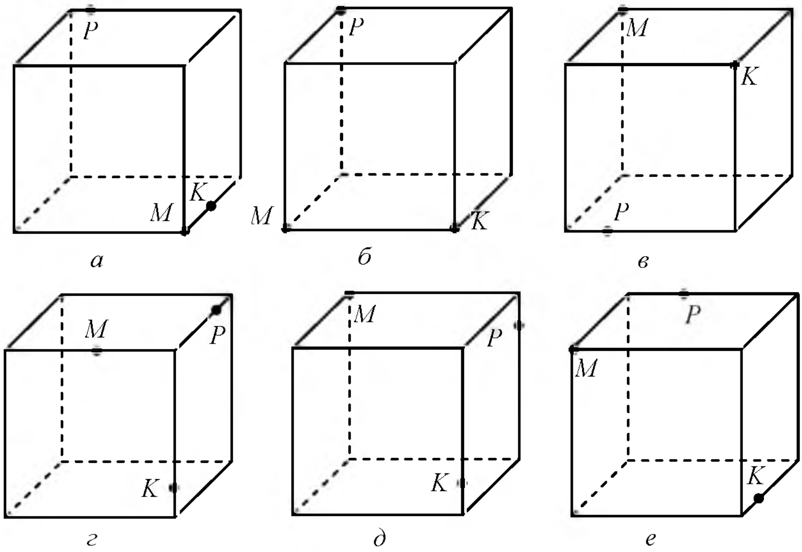


Рис. 8.11

2. Побудуйте перетин багатогранника площиною, яка проходить через точки M, P, K (рис. 8.12). Точка K належить площині α.

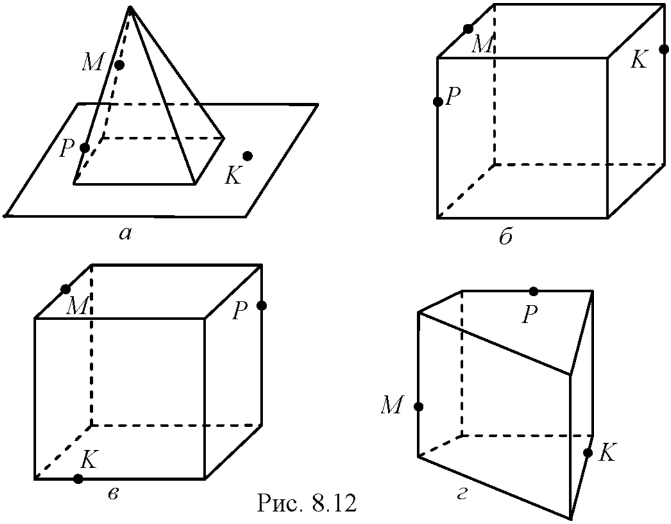
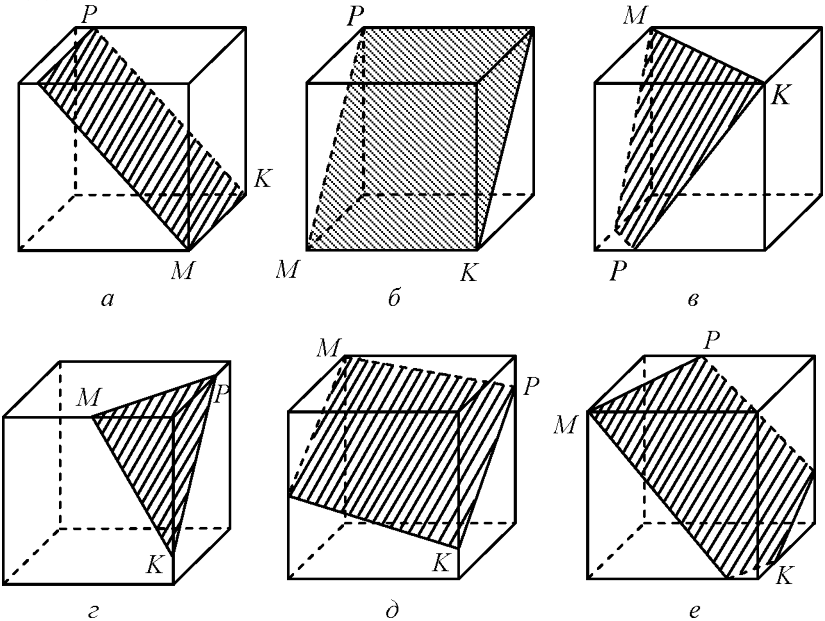


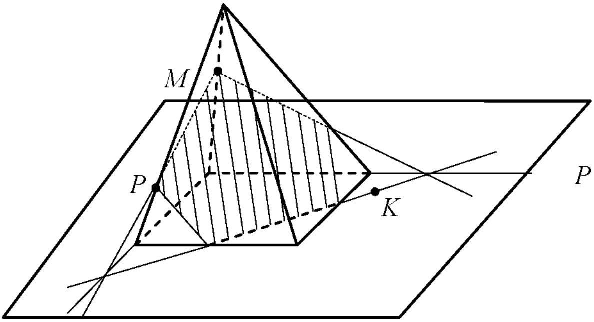
Рис. 8.12

Відповіді

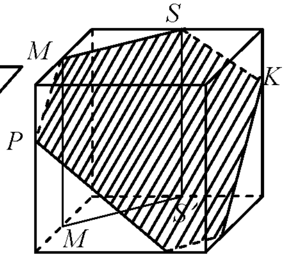
До завдання 1:



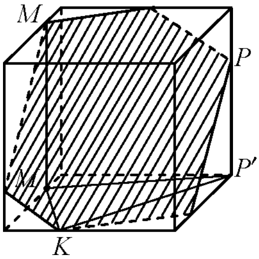
До завдання 2:



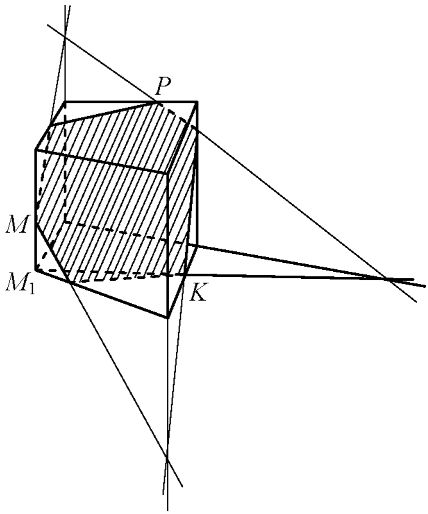
а



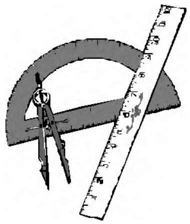
б



в



г



ПІДСУМКОВЕ ТЕСТУВАННЯ З СТЕРЕОМЕТРІЇ

Рівень І

1. Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Площа бічної грані цієї призми дорівнює 48 см^2. Обчисліть діагональ бічної грані.

А 6 см; **Б** 8 см; **В** $6\sqrt{2}$ см; **Г** 10 см; **Д** 12 см.

2. Визначте відстань від вершини A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до площини BDD_1B_1, якщо ребро куба дорівнює 6 $\sqrt{2}$ см.

А 7 см; **Б** 4 см; **В** 6 см; **Г** 12 см; **Д** $6\sqrt{2}$ см.

3. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його нижньої основи дорівнює 4 см.

А $(4+2\sqrt{2})$ см; **Б** $2\sqrt{6}$ см; **В** $4\sqrt{2}$ см;
Г 24 см; **Д** інша відповідь.

4. Визначте кут між ребром A_1D_1 і діагоналлю BD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

А 45°; **Б** 90°; **В** 30°; **Г** 60°; **Д** неможливо визначити.

5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 45°. Обчисліть об’єм піраміди.

А 72 см^3; **Б** 18 см^3; **В** 54 см^3; **Г** 21 см^3; **Д** інша відповідь.

6. Площі основи та бічної поверхні правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 36 та 60 см^2 відповідно. Знайдіть апофему цієї піраміди.

А 5 см; **Б** 2,5 см; **В** 6 см; **Г** 12 см; **Д** 10 см.

7. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом 6 см і гіпотенузою 12 см. Знайдіть об’єкт піраміди, якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 30°.

А 216 см^3; **Б** 72 см^3; **В** 96 см^3 ; **Г** 192 см^3; **Д** 36 см^3.

8. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди дорівнює 60°, а бічне ребро — 6 см. Обчисліть площу бічної поверхні піраміди.

А 27 см^2; **Б** 27 $\sqrt{3}$ см^2; **В** 54 см^2; **Г** 54$\sqrt{3}$ см^2; **Д** інша відповідь.

9. Обчисліть площу бічної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см і довжина кола основи — 12 π см.

А 48 π см^2; **Б** 60 π см^2; **В** 96 π см^2; **Г** 120 π см^2; **Д** 288 см^2.

10. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник, периметр якого дорівнює 36 см. Обчисліть площу основи конуса.

А 36 π см^2; **Б** 108 π см^2; **В** 144 см^2; **Г** 81 см^2; **Д** 72 см^2.

Рівень II

1. У конусі твірна нахилена до площини основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм конуса, якщо радіус його основи дорівнює 2$\sqrt{3}$ см.

А 6 π см^3; **Б** 4 $\sqrt{3}$ π см^3; **В** 72 π см^3; **Г** 8 π см^3; **Д** 24 π см^3.

2. Об'єм циліндра дорівнює 18 см^3. Обчисліть об'єм конуса, радіус основи якого дорівнює радіусу основи циліндра, а висота у два рази менша за висоту циліндра.

А 16 см^3; **Б** 12 см^3; **В** 9 см^3; **Г** 3 см^3; **Д** 6 см^3.

3. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Обчисліть об'єм циліндра.

А 48 см^3; **Б** 32 см^3; **В** 96 π см^3; **Г** 16 π см^3; **Д** інша відповідь.

4. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює $\frac{6}{\pi}$ см^2. Визначте площу бічної поверхні циліндра.

А 12 см^2; **Б** 6 см^2; **В** 18 см^2; **Г** 6 π см^2; **Д** інша відповідь.

5. Кулю, радіус якої 5 см, перетинає площина, що віддалена від центра кулі на 4 см. Знайдіть площу перерізу, що утворився.

А 9 π см^2; **Б** 6 π см^2; **В** π см^2 ; **Г** 9 см^2 ; **Д** 3 π см^2.

6. Довжина діагоналі прямокутного паралелепіпеда більша від його розмірів на 20, 9 і 5 см. Обчисліть об'єм паралелепіпеда.

А 698 см^3; **Б** 756 см^3; **В** 392 см^3; **Г** 408 см^3; **Д** 900 см^3.

7. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів дорівнюють 6 і 8 см^2. Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.

А 20 см^2; **Б** 48 см^2; **В** 36 см^2; **Г** 40 см^2; **Д** інша відповідь.

8. В основі прямої призми з меншою діагоналлю 6 см і гострим кутом 60° лежить паралелограм. Через більшу діагональ нижньої основи і вершину тупого кута верхньої основи проводимо переріз, який утворює з площиною основи кут 60°. Знайдіть об’єм призми.

А 198 см^3; **Б** 162 см^3; **В** 192 см^3; **Г** 308 см^3; **Д** інша відповідь.

9. В основі прямої призми висотою 8 см лежить квадрат зі стороною 6 см. У призмі побудовано переріз, який є перпендикулярним до діагоналі бічної грані й проходить через вершину основи. Знайдіть площу перерізу.

А 48 см^2; **Б** 32 см^2; **В** 45 см^2; **Г** 27 см^2; **Д** інша відповідь.

10. Обчисліть об’єм правильного тетраедра, якщо радіус кола, описаного навколо його грані, дорівнює 6 см.

А $27\sqrt{6}$ см^3;**Б** $27\sqrt{3}$ см^3; **В** 54 см^3;

Г $54\sqrt{6}$ см^3; **Д** інша відповідь.

Рівень III

1. Основа піраміди — трикутник зі сторонами 4, 13 і 15 см. Висота цієї піраміди проходить через вершину меншого кута основи. Відстань від вершини піраміди до прямої, що є меншою стороною основи, дорівнює 37 см. Обчисліть об’єм піраміди.

А 392 см^3; **Б** 208 см^3; **В** 280 см^3; **Г** 840 см^3; **Д** інша відповідь.

2. У правильній трикутній піраміді відношення площі бічної поверхні до площі основи дорівнює $\sqrt{3}$. Знайдіть плоский кут при вершині піраміди (у градусах).

А 90°; **Б** 60°; **В** 45°; **Г** 30°; **Д** інша відповідь.

3. В основі піраміди лежить ромб зі стороною 4 см і тупим кутом 120°. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом 60°. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

А $(24+16\sqrt{3})$ см^2; **Б** $40\sqrt{3}$ см^2;

В $(16+8\sqrt{3})$ см^2; **Г** $24\sqrt{3}$ см^2; **Д** інша відповідь.

4. Дві концентричні кулі мають радіуси r = 5см і R = 13 см. До меншої кулі проведено дотичну площину. Знайдіть площу перерізу більшої кулі цією площиною.

А 144 π см^2; **Б** 81 π см^2; **В** 225 π см^2;

Г 169 см^2; **Д** інша відповідь.

5. Вершини квадрата зі стороною $3\sqrt{2}$ см лежать на поверхні кулі, а відстань від центра кулі до площини квадрата дорівнює 4 см. Обчисліть об'єм кулі.

А $\frac{488\pi}{3}$ см^3; **Б** $\frac{500\pi}{3}$ см^3; **В** 100 π см^3;

Г 100 $\sqrt{2}$ π см^3; **Д** інша відповідь.

6. Твірна зрізаного конуса дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 60°. Діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл. Знайдіть площу повної поверхні зрізаного конуса.

А 168 π см^2; **Б** 192 π см^2; **В** 176 π см^2;

Г 108 π см^2; **Д** інша відповідь.

7. Площа основи конуса дорівнює 9 π см^2, повна поверхня — 24 π см^2. Обчисліть об'єм конуса.

А 108 π см^3; **Б** 92 π см^3; **В** 96 π см^3; **Г** 12 π см^3; **Д** 36 π см^3.

8. Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, віддалений від неї на відстань 2 см і є квадратом. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює $8\sqrt{3}$ π см^2. Знайдіть площу перерізу.

А 12 см^2; **Б** **8** см^2; **В** $16\sqrt{3}$ см^2; **Г** 8 см^2; **Д** інша відповідь.

9. У рівносторонньому циліндрі, радіус основи якого дорівнює $\sqrt{6}$ см, через точку кола верхньої основи і точку кола нижньої основи проведено пряму, яка нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначте відстань від цієї прямої до осі циліндра.

А 2 см; **Б** 6 см; **В** $\sqrt{6}$ см; **Г** 4 см; **Д** інша відповідь.

10. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, якщо відомо, що його об'єм дорівнює 240 π см^3, а площа бічної поверхні — 120 π см^2.

А 17 см; **Б** 24 см; **В** 18 $\sqrt{3}$ см; **Г** $17\sqrt{3}$ см; **Д** інша відповідь.

ДОДАТКИ

Планіметрія

Співвідношення між тригонометричними функціями кутів трикутника ($\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ — кути трикутника ABC)

1. $\sin\angle A+\sin\angle B+\sin\angle C=4\cos\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle B}{2}\cos\frac{\angle C}{2}$.
2. $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$.
3. $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$.
4. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geq\sqrt{3}$.
5. $\frac{1}{\sin\frac{\angle A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\angle B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{\angle C}{2}}\geq 6$.

Розв’язування прямокутних трикутників
(a, b — катети; c — гіпотенуза; $\gamma=90°$)

Дано	Знайти	Розв’язок
Катет і протилежний кут. *Приклад*: a, α	β, b c, S	1. $\beta=90°-\alpha$; 2. $b=\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 3. $c=\frac{\alpha}{\sin\alpha}$; 4. $S=\frac{a^2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.
Катет і прилеглий кут. *Приклад*: b, α	β, a c, S	1. $\beta=90°-\alpha$; 2. $a=b\operatorname{tg}\alpha$; 3. $c=\frac{b}{\cos\alpha}$; 4. $S=\frac{b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Дано	Знайти	Розв'язок
Гіпотенуза і кут. *Приклад*: c, α	β, a b, S	1. $\beta = 90° - \alpha;$ 2. $a = c\sin\alpha;$ 3. $b = c\cos\alpha;$ 4. $S = \dfrac{c^2}{4}\sin 2\alpha;$
Два катети. *Приклад*: a, b	α, β c, S	1. $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}, \alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{a}{b};$ 2. $\beta = 90° - \alpha;$ 3. $c = \sqrt{a^2 + b^2};$ 4. $S = \dfrac{ab}{2}.$
Гіпотенуза і катет. *Приклад*: c, a	α, β b, S	1. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c},\ \alpha = \arcsin\dfrac{a}{c};$ 2. $\beta = 90° - \alpha;$ 3. $b = \sqrt{c^2 - a^2};$ 4. $S = \dfrac{ac}{2}\sin\beta.$

Окремі випадки правильних багатокутників

(n — кількість сторін правильного багатокутника)

n	R	r	S
3	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{a}{2}$	a^2
5	$a\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}}$	$a\sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}}$	$\dfrac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$
6	a	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	$a\sqrt{1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$	$\dfrac{a}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$	$2a^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Трикутники

І. Трикутники (a, b, c — сторони трикутника ABC; $\angle A, \angle B, \angle C$ — внутрішні кути трикутника ABC).

1. $a = 2R\sin\angle A.$

2. $R = \dfrac{abc}{4S}.$

3. $r = \dfrac{S}{p}$, $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right).$

4. Якщо $\angle C = 90°$, тоді $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

5. $r = (p-a)\operatorname{tg}\dfrac{\angle A}{2}$

6. $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

7. $l_a = \dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{\angle A}{2}$.

8. $l_a^2 = bc - b_1c_1$.

9. $S = \dfrac{1}{2}a\,h_a = \dfrac{1}{2}bc\sin\angle A.$

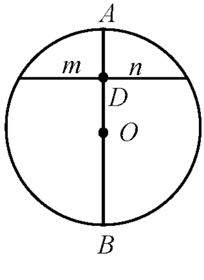
10. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

11. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (теорема косинусів).

12. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

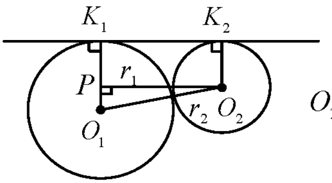
Коло, круг

1



$mn = R^2 - OD^2;$
$d^2 = R^2 - mn.$

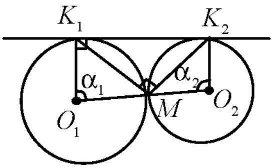
2



$O_2P \perp O_1K_1$;
$K_1K_2 = O_2P$;

$$O_2P = \sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2} = 2\sqrt{r_1r_2}.$$

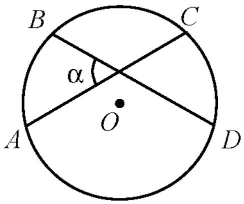
3



$$O_1K_1 \parallel O_2K_2 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2 = 180^\circ;$$

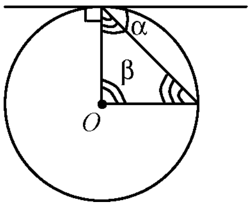
$$\left.\begin{aligned}\angle MK_1K_2 &= \frac{\alpha_1}{2}\\ \angle MK_2K_1 &= \frac{\alpha_2}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle K_1MK_2 = 180^\circ - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = 90^\circ.$$

4



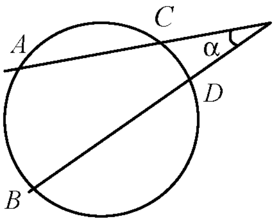
$$\alpha = \frac{\cup AB + \cup CD}{2}.$$

5



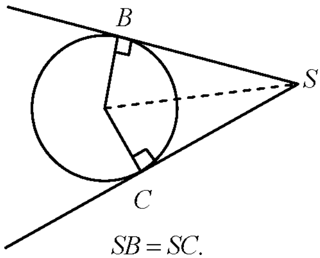
$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

6



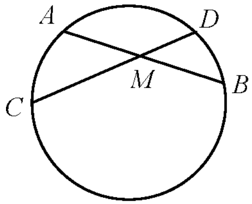
$$\alpha = \frac{\cup AB - \cup CD}{2}.$$

7



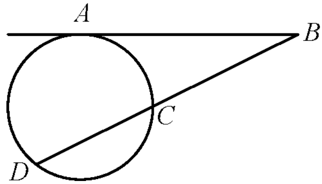
$SB = SC.$

8



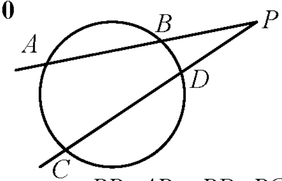
$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

9



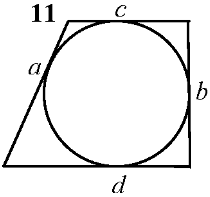
$$AB^2 = CB \cdot BD.$$

10



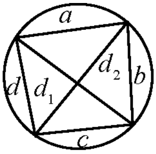
$$BP \cdot AP = PD \cdot PC.$$

11



$$a + b = c + d;$$
$$S = pr.$$

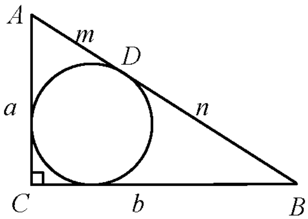
12



$$ac + bd = d_1 d_2$$

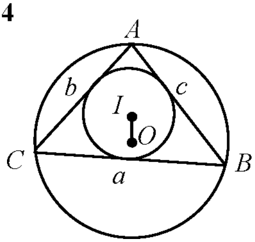
(теорема Птолемея)

13



$$r = \frac{a+b-c}{2};$$
$$R = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2};$$
$$S = mn;$$
$$m = AD,\ \ n = DB.$$

14



$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\alpha};$$
$$r = \frac{S}{P} = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2};$$
$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ (формула Ейлера)}.$$

Стереометрія

Позначення: $a, b, c\ldots$ — прямі; $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ — площини, $\varphi, \omega, \psi\ldots$ — кути.

Багатогранники

1. Теорема Ейлера:

$$m - n + k = 2,$$

де m — кількість граней; n — кількість ребер; k — кількість вершин.

2. Властивість паралельних перерізів у піраміді

$$Q_1 : Q_2 = h_1^2 : h_2^2,$$

де Q_1 і Q_2 — площі перерізів; h_1 і h_2 — відстані перерізів від вершини піраміди.

3. Властивість діагоналі прямокутного паралелепіпеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

де d — діагональ; a, b, c — виміри паралелепіпеда.

4. Бічна поверхня прямої призми

$$S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} h,$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи; h — висота призми.

5. Повна поверхня прямокутного паралелепіпеда

$$S_{\text{пов}} = 2(ab + ac + bc).$$

6. Бічна поверхня похилої призми

$$S_{\text{біч}} = P_{\text{пр.пер}} l,$$

де $P_{\text{пр.пер}}$ — периметр перпендикулярного перерізу; l — бічне ребро призми.

7. Повна поверхня правильної піраміди

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}.$$

8. Бічна поверхня правильної піраміди

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} n a h_{\text{а}},$$

де n — кількість сторін основи; a — сторона основи; $h_{\text{а}}$ — апофема бічної грані.

9. $S_{\text{біч}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, де $S_{\text{осн}}$ — площа основи; φ — кут нахилу бічної грані до основи.

10. Повна поверхня піраміди $S_{\text{пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}}$.

11. Бічна поверхня правильної зрізаної піраміди

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} n(a+b) h_{\text{ab}},$$

де n — кількість сторін основи; a та b — сторони нижньої і верхньої основ; h_{ab} — апофема бічної грані зрізаної піраміди.

12. Об'єм прямокутного паралелепіпеда $V = abc$. Об'єм куба $V_{\text{куб}} = a^3$.

13. Об'єм призми

$$V = S_{\text{осн}} H,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи; H — висота призми (загальна формула для прямої та похилої призм).

14. Об'єм похилої призми

$$V = S_{\text{пр.пер}}\, l,$$

де $S_{\text{пр.пер}}$ — площа перпендикулярного перерізу; l — бічне ребро.

15. Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи; H — висота піраміди.

16. Об'єм зрізаної піраміди

$$V_{\text{зр.пір}} = \frac{1}{3} H \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$$

де S_1, S_2 — площі верхньої і нижньої основ; H — висота зрізаної піраміди.

Тіла обертання

1. Бічна поверхня циліндра

$$S_{\text{біч}} = 2\pi R H,$$

де R — радіус основи; H — висота циліндра.

2. Повна поверхня циліндра $S_{\text{пов}} = 2\pi R(H + R)$.

3. Бічна поверхня конуса

$$S_{\text{біч}} = \pi R L,$$

де R — радіус основи; L — твірна конуса.

4. Повна поверхня конуса $S_{\text{пов}} = \pi R(L+R)$.

5. Бічна поверхня зрізаного конуса

$$S_{\text{біч.зр.кон}} = \pi(r+R)L,$$

де R і r — радіуси верхньої та нижньої основ; L — твірна конуса.

6. Повна поверхня зрізаного конуса

$$S_{\text{пов.зр.кон}} = \pi(r+R)L + \pi\left(r^2 + R^2\right).$$

7. Поверхня кулі (площа сфери)

$$S = 4\,\pi R^2,$$

де R — радіус кулі.

8. Площа сегментної поверхні

$$S_{\text{сег.пов}} = 2\pi RH,$$

де R — радіус кулі, з якої вирізано кульовий сегмент; H — висота сегмента.

9. Об'єм циліндра

$$V = \pi R^2 H,$$

де R — радіус основи; H — висота циліндра.

10. Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

де R — радіус основи; H — висота конуса.

11. Об'єм зрізаного конуса $V_{\text{зр.кон}} = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

12. Об'єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, де R — радіус кулі.

13. Об'єм кульового сегмента

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

де R — радіус кулі, з якої вирізано кульовий сегмент; H — висота сегмента.

14. Об'єм кульового сектора

$$V_{\text{к.сек}} = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

де R — радіус кулі, з якої вирізано кульовий сектор; H — висота відповідного кульового сегмента.

ВІДПОВІДІ

Тематичне тестування. Трикутники

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	Б	Г	Г	В	Д	Б	А	Б	В	Г
ІІ	Г	В	В	А	А	Г	Б	Г	Б	В
ІІІ	В	В	Д	Д	Д	А	Б	Б	В	Г

Тематичне тестування. Багатокутники

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	Б	А	Г	Г	Б	Г	А	Б	Б	В
ІІ	А	Б	В	В	А	Д	Г	Г	Г	В
ІІІ	А	Г	Г	Д	В	А	Д	Б	А	А

Тематичне тестування. Коло, круг та їх частини

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
В	Б	Г	Б	В	А	В	А	Г	Б

Підсумкове тестування з планіметрії

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	Б	В	А	В	Б	Б	Б	В	Б	А
ІІ	Б	А	Г	Б	А	А	А	Г	В	Б
ІІІ	Б	В	А	Г	Б	А	В	Г	В	Г

Тематичне тестування. Призма

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	А	В	А	Б	А	А	Б	Г	Б	А
ІІ	Г	Г	В	Б	В	В	В	А	Г	Г
ІІІ	В	В	Г	В	В	А	А	Г	Б	А

Тематичне тестування. Піраміда

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	А	Б	В	Г	А	Г	В	Б	Г	Б
ІІ	В	Г	А	А	Б	В	А	А	Г	Б
ІІІ	В	А	Г	Г	Б	Б	В	А	Б	А

Тематичне тестування. Тіла обертання

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	А	Г	А	Г	Б	А	В	Г	Г	В
ІІ	В	Б	А	Б	Б	А	В	Б	В	А
ІІІ	Б	А	В	В	Г	В	Г	А	Б	Г

Тематичне тестування. Комбінації геометричних тіл

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	В	Б	Г	В	А	В	Г	А	Б

Підсумкове тестування зі стереометрії

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
І	Г	В	Б	А	Б	А	Д	Б	Б	А
ІІ	Д	Г	Г	Б	А	Б	А	Б	В	Г
ІІІ	В	А	А	А	Б	В	Г	Б	А	А

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Апостолова Г. В.* Планіметрія в опорних схемах / Г. В. Апостолова. — К. : Факт, 2000. — 64 с.

2. *Апостолова Г. В.* Геометрія: дворівневий підруч. для загальноосвіт. навч. закл./ Г. В. Апостолова. — К. : Генеза, 2008.— 272 с.

3. *Геометрія* : підруч. для 10–11 кл. загальноосвітніх навч.закл. / [Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова]. — К. : Вежа, 2004. — 224 с.

4. *Геометрія* : підруч. для 10—11 кл. з поглибл. вивч. математики в середніх загальноосвітніх навч. заклад. / [Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, В. М. Владіміров, Н. Г. Владімірова]. — К. : Освіта, 2000. — 239 с.

5. *Бевз Г. П.* Методика розв'язування стереометричних задач / Г. П. Бевз. — К. : Радянська шк., 1988. — 190 с.

6. *Програма* для класів з поглибленим вивчення математики. 8—11 класи / [М. Бурда, М. Жалдак, Т. Колесник та ін.]. — М., К. : Шкільний світ, 2001.

7. *Гальперіна А. Р.* Математика. Типові тестові завдання: Збірник / А. Р. Гальперіна, О. Я. Михеєва. — Х. : Веста, 2009. — 128 с.

8. *Кушнір І. А.* Трикутник і тетраедр у задачах. / І. А. Кушнір. —К. : Радянська шк., 1991.

9. *Математика*. Тести. 5—12 класи : посіб./ [В. І. Лагно, О. А. Москаленко, В. О. Марченко та ін.]. — 2-ге вид., стер. — К. : Академвидав, 2009. — 320 с.

10. *Погорєлов О. В.* Геометрія. Стереометрія : підруч. для 10—11 кл. серед. шк. / О. В. Погорєлов. — 6-е вид. — К. :Освіта, 2001. — 128 с.

11. *Програма* для класів з поглибленим вивченням математики (8—9 класи) : Математична газета. — № 6, 2008.

12. *Робочі* навчальні програми з дисципліни «Математика» для підготовчих курсів. — К. : Видавництво НАУ, 2008.

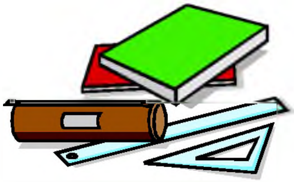
13. *Роєва Т. Г.* Геометрія у таблицях. 7–9 класи : навч. посіб. / Т. Г. Роєва, Л. Я. Синельник, С.А. Кононенко. — Х. : Вид. група «Академія», 2001. — 152 с.

14. *Романюк В. Я.* Геометрія. Завдання для письмового екзамену в 9-х класах / В. Романюк, М. Собко. — Львів : ВНТЛ, 1997. — 63 с.

15. *Тадеєв В. О.* Геометрія. 10 клас : дворівневий підруч. — Тернопіль : Навчальна книга. — Богдан, 2003. —243 с.

16 *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии (планиметрия) / И. Ф. Шарыгин. — М. : Наука, 1986. — 189 с.

17. *Литвиненко Г. М.* Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту учнів 10—11 класів / Г. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець. — Харків : ББН, 201. — 164 с.



ЗМІСТ

Навчальне видання

МУРАНОВА Наталія Петрівна
ЛОГВИН Марина Миколаївна
НЕСТЕРЕНКО Любов Іванівна
МУРАНОВ Олександр Сергійович

ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний посібник

Редактор *Р. М. Шульженко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *О.О. Крусь*
Комп'ютерна верстка *Л. Т. Колодіної*

Підп. до друку 11.05.10. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 12,32. Обл.-вид. арк. 13,25.
Тираж 500 пр. Замовлення № 112-1.

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»
03680. Київ – 58, проспект Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002