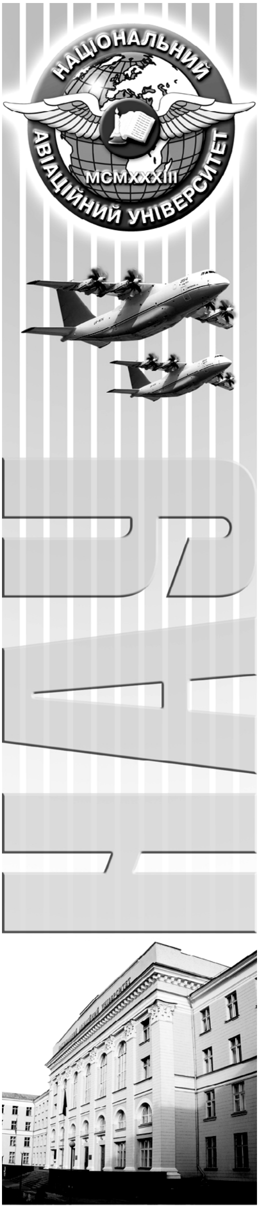
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет



VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МАТЕМАТИКА

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Практикум

Київ 2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

МАТЕМАТИКА

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Практикум

2-е видання, стереотипне

Київ 2012

УДК 512 (076)
ББК В1я7
М 34

Укладачі: *Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко, О.С. Муранов*

Рецензенти:
Р.М. Салімов – канд. техн. наук, доц. (Київський державний інститут декоративно-прикладного мистецтва і дизайну ім. М. Бойчука);
В.О. Дубко – д-р фіз.-мат. наук, проф. (Національний авіаційний університет);
П.В. Лук'янов – канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб. (Інститут гідромеханіки НАН України)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 5/11 від 16.06.2011 р.).

М 34 **Математика**. **Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи** : практикум / уклад. : Н.П. Муранова, Л.А. Харченко, Г.В. Шевченко, О.С. Муранов. – 2-е вид., стер. – К. : НАУ, 2012. – 96 с.

Викладено основні теоретичні відомості, розглянуто основні типи ірраціональних рівнянь, нерівностей, їх систем та способи їх розв'язання. Наведено приклади різних рівнів складності та вправи для самостійної роботи.

Для учнів 10-х, 11-х класів, слухачів підготовчих курсів, абітурієнтів, викладачів математики.

УДК 512 (076)
ББК В1я7

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.. 5

ПЕРЕДМОВА 6

Розділ 1. ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ...7

1.1. Загальні відомості..7

1.2. Тотожні перетворення ірраціональних виразів 9

Розділ 2. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ 18

2.1. Загальні відомості..18

2.2. Розв'язання ірраціональних рівнянь за допомогою властивостей арифметичного кореня n-го степеня. 19

2.3. Метод піднесення обох частин ірраціонального рівняння до одного й того самого степеня. 23

2.4. Метод введення нових змінних (метод заміни). 28

2.5. Метод зведення до еквівалентної системи раціональних рівнянь. 31

2.6. Штучні методи. 34

Перевірний тест 1 39

Розділ 3. ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ 43

3.1. Загальні відомості... 43

3.2. Розв'язання ірраціональних нерівностей піднесенням обох частин нерівності до одного й того самого степеня...................45

3.3 Нерівності вигляду $f(x)\sqrt{g(x)}>0,\ f(x)\sqrt{g(x)}<0,$ $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}>0, \dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}<0$ 50

3.4. Розв'язання ірраціональних нерівностей методом заміни 56

Перевірний тест 2 58

Розділ 4. СИСТЕМИ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ.. 61

4.1. Системи ірраціональних рівнянь.. 61

4.2. Системи ірраціональних нерівностей з однією невідомою... 69

Розділ 5. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРОМ....................... 75
5.1. Задачі з параметром, які розв’язуються графічно............... 75
5.2. Використання аналітичних методів при розв’язанні задач з параметрами... 79
ВІДПОВІДІ... 85
ДОДАТОК... 90
Список літератури.. 96

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

N – множина натуральних чисел;

Z – множина цілих чисел;

Q – множина раціональних чисел;

R – множина дійсних чисел;

$\varnothing$ – пуста множина;

$\{a, b, c\}$ – множина, яка складається з елементів a, b, c;

$[a; b]$ – замкнутий проміжок (відрізок);

$(a; b)$ – відкритий проміжок;

$a \in A$ – елемент a належить множині A;

$a \notin A$ – елемент a не належить множині A;

$\cup$ – знак об’єднання множин;

$\cap$ – знак перетину множин;

$x \in R \setminus \{a\}$ – будь-яке число x з множини дійсних чисел, крім числа a;

$A \Rightarrow B$ – з A випливає B;

$A \Leftrightarrow B$ – з A випливає B і, навпаки, з B слідує A, знак рівносильності;

ОДЗ – область допустимих значень;

$\{$ – знак системи;

$[$ – знак сукупності.

ПЕРЕДМОВА

Увазі читача пропонуються методи розв'язання основних типів задач розділу «Ірраціональні рівняння, нерівності та їх системи». Застосування кожного методу ілюструється необхідною кількістю розв'язаних прикладів. Як довідковий матеріал наведені основні означення та теореми з даної теми. Для кожного типу задач подано завдання для самостійного розв'язування трьох рівнів складності. До групи А включаються завдання достатнього рівня. Вони вимагають стандартного застосування програмного матеріалу і передбачають вибір однієї правильної відповіді із запропонованих. Завдання групи Б – це завдання середнього рівня, відкритої форми з короткою відповіддю. Завдання, подані в групі В, мають високий рівень складності. Розв'язання цих завдань повинні бути повними і містити обґрунтування основних етапів. Усі завдання для самостійного розв'язання забезпечені відповідями, що наводяться в кінці збірника.

Для перевірки засвоєння матеріалу пропонуються тренувальні тести.

Зміст даного практикуму відповідає програмі підготовчих курсів ІДП НАУ, навчальних закладів і програмі зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Мета практикуму – допомогти абітурієнтам опанувати техніку розв'язування ірраціональних рівнянь, нерівностей, їх систем різних рівнів складності, сприяти розвитку мислення та творчих здібностей.

Практикум з успіхом може бути використаний при підготовці до вступу у вищі навчальні заклади, в навчальному процесі як на підготовчих курсах, так і у самостійній роботі абітурієнтів, у тому числі для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання.

Розділ 1

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

1.1. Загальні відомості

Два вирази називають тотожно рівними, або тотожними на деякій множині, якщо значення цих виразів рівні при всіх значеннях змінних із даної множини.

Заміну одного виразу іншим, тотожно рівним йому на деякій множині, називають тотожним перетворенням виразу на цій множині.

Алгебраїчний вираз, який містить дії добування кореня зі змінної величини або піднесення до раціонального степеня, що не є цілим числом, називається ірраціональним виразом відносно цієї змінної.

Коренем *n*-го степеня $(n \in N, n \geq 2)$ з числа *a* називається таке число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*. Наприклад, корінь третього степеня з числа 64 дорівнює 4, оскільки $4^3 = 64.$ Числа 3 і –3 є коренями четвертого степеня з числа 81, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81.$

Арифметичним коренем n-го степеня $(n \in Z, n \geq 2)$ з числа a називається невід'ємне число, *n*-й степінь якого дорівнює *a*. Наприклад, корінь третього степеня з числа 8 дорівнює 2, оскільки $2^3 = 8$ і $2 > 0$; корінь четвертого степеня з числа 625 дорівнює 5, оскільки $5^4 = 625$ і $5 > 0.$

Корені n-го степеня називаються радикалами від латинської назви *radix*, що означає «корінь». За першою буквою r слова *radix* виник знак кореня $\sqrt{}$, який ввів у математику Рене Декарт.

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають через $\sqrt[n]{a}$. Отже, при $a \geq 0$ запис $\sqrt[n]{a} = x$ означає, що $x \geq 0$ і $x^n = a,$ звідки маємо: $\sqrt[n]{a} \geq 0$ і $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$

При непарному $n>1$ і $a<0$ через $\sqrt[n]{a}$ позначають таке від'ємне число x, що $x^n=a$. Зрозуміло, що в даному випадку $\sqrt[n]{a}$ не є арифметичним коренем з числа a.

Отже, символ $\sqrt[n]{a}$ при $a\ge 0$ і довільному натуральному $n\ge 2$ позначає арифметичний корінь n-го степеня з числа a, а при $a<0$ і непарних $n>1$ – від'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Властивості арифметичних коренів для $a\ge 0, b\ge 0$:

1. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b\ne 0$.

3. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{km}}$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}}=\sqrt[nk]{a^m}$.

5. $\sqrt[mn]{a^{mk}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[n]{|a|^k}, \text{ якщо } m-\text{парне число,}\\ \sqrt[n]{a^k}, \text{ якщо } m-\text{непарне число.}\end{array}\right.$

6. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, де m – ціле число; n – натуральне число; $n\ge 2$; $a>0$.

Властивості степеня з раціональним показником для $a>0$, $b>0$; n і m – раціональні числа:

1. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$.

2. $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$.

3. $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$.

4. $(ab)^n=a^n\cdot b^n$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$.

Два ірраціональних вирази P і Q називаються спряженими один до одного, якщо їх добуток PQ – раціональний вираз.

1. Якщо $P=\sqrt{m}$, то $Q=\sqrt{m}$.

2. Якщо $P=\sqrt[k]{m}$, то $Q=\sqrt[k]{m^{k-1}}$.

3. Якщо $P=\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$, то $Q=\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$.

4. Якщо $P=\sqrt[3]{m}\pm\sqrt[3]{n}$, то $Q=\sqrt[3]{m^2}\mp\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$.

1.2. Тотожні перетворення ірраціональних виразів

Тотожні перетворення ірраціональних виразів здійснюють на основі законів операцій додавання, віднімання, множення і ділення, а також розглянутих вище властивостей степенів із раціональним показником та властивостей арифметичних коренів.

Приклади.

1. Знайти значення виразу $\sqrt[7]{0,3^7\cdot 5^{14}}$.

$$\sqrt[7]{0,3^7\cdot 5^{14}}=\sqrt[7]{0,3^7}\cdot\sqrt[7]{5^{14}}=0,3\cdot 5^2=0,3\cdot 25=0,75.$$

Відповідь: 0,75.

2. Знайти значення виразу $\dfrac{\sqrt[3]{5^8\cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2\cdot 7^{16}}}$.

$$\frac{\sqrt[3]{5^8\cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2\cdot 7^{16}}}=\sqrt[3]{\frac{5^8}{5^2}\cdot\frac{7^{10}}{7^{16}}}=\sqrt[3]{5^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{7^6}}=5^2\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{25}{49}.$$

Відповідь: $\dfrac{25}{49}$.

3. Знайти значення виразу $\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}$.

$$\sqrt[4]{26+\sqrt{51}}\cdot\sqrt[4]{26-\sqrt{51}}=\sqrt[4]{\left(26+\sqrt{51}\right)\left(26-\sqrt{51}\right)}=\sqrt[4]{26^2-51}=$$

$$=\sqrt[4]{676-51}=\sqrt[4]{625}=5.$$

Відповідь: 5.

4. Спростити вираз $\sqrt[5]{\left(8-\sqrt{11}\right)^5}+\sqrt[8]{\left(3-\sqrt{11}\right)^8}$.

$$\sqrt[5]{\left(8-\sqrt{11}\right)^5}+\sqrt[8]{\left(3-\sqrt{11}\right)^8}=8-\sqrt{11}+\left|3-\sqrt{11}\right|=8-\sqrt{11}-\left(3-\sqrt{11}\right)=$$

$$=8-\sqrt{11}-3+\sqrt{11}=5.$$

Відповідь: 5.

5. Спростити вираз $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{25-2\cdot 5\cdot\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(5-\sqrt{2}\right)^2}=\left|5-\sqrt{2}\right|=5-\sqrt{2}.$$

Відповідь: $5-\sqrt{2}$.

6. Винести множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{8a^4}$.

$$\sqrt{8a^4}=\sqrt{4a^4\cdot 2}=2a^2\sqrt{2}.$$

Відповідь: $2a^2\sqrt{2}$.

2) $\sqrt[4]{32x^{10}y^{13}}$.

$$\sqrt[4]{32x^{10}y^{13}}=\sqrt[4]{16\cdot 2x^8x^2y^{12}y}=2x^4y^3\sqrt[4]{2x^2y}.$$

Відповідь: $2x^4y^3\sqrt[4]{2x^2y}$.

3) $\sqrt[6]{a^7b^{14}c^{18}}$, якщо $c\le 0$.

$$\sqrt[6]{a^7b^{14}c^{18}}=\sqrt[6]{a^6ab^{12}b^2c^{18}}\Big|_{c\le 0}=-ab^2c^3\sqrt[6]{ab^2}.$$

Відповідь: $-ab^2c^3\sqrt[6]{ab^2}$.

7. Внести множник під знак кореня:

1) $a\sqrt{7}$, якщо $a\ge 0$.

$$a\sqrt{7}=\sqrt{7a^2}.$$

Відповідь: $\sqrt{7a^2}$.

2) $3x^2\sqrt[3]{\frac{x}{9}}$.

$$3x^2\sqrt[3]{\frac{x}{9}}=\sqrt[3]{\frac{x}{9}\cdot 3^3x^6}=\sqrt[3]{3x^7}.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{3x^7}$.

3) $ab\sqrt[4]{a^2b}$, якщо $a\ge 0$.

$$ab\sqrt[4]{a^2b}\Big|_{a\ge 0}=\sqrt[4]{a^2ba^4b^4}=\sqrt[4]{a^6b^5}.$$

Відповідь: $\sqrt[4]{a^6b^5}$.

4) $m\sqrt[6]{m^4}$, якщо $m \le 0$.

$$m\sqrt[6]{m^4}\,\Big|_{m\ge 0} = -\sqrt[6]{m^4 m^6} = -\sqrt[6]{m^{10}}.$$

Відповідь: $-\sqrt[6]{m^{10}}$.

8. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{12}{\sqrt{6}}$.

$$\frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

Відповідь: $2\sqrt{6}$.

2) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{3}}$.

$$\frac{6}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{6\sqrt[3]{9}}{3} = 2\sqrt[3]{9}.$$

Відповідь: $2\sqrt[3]{9}$.

3) $\dfrac{m^3}{\sqrt[7]{m^4}}$.

$$\frac{m^3}{\sqrt[7]{m^4}} = \frac{m^3\sqrt[7]{m^3}}{\sqrt[7]{m^4}\cdot\sqrt[7]{m^3}} = \frac{m^3\sqrt[7]{m^3}}{\sqrt[7]{m^7}} = \frac{m^3\sqrt[7]{m^3}}{m} = m^2\sqrt[7]{m^3}.$$

Відповідь: $m^2\sqrt[7]{m^3}$.

4) $\dfrac{18}{3+\sqrt{3}}$.

$$\frac{18}{3+\sqrt{3}} = \frac{18\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{18\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} = \frac{18\left(3-\sqrt{3}\right)}{6} = 3\left(3-\sqrt{3}\right) =$$

$$= 9 - 3\sqrt{3}.$$

Відповідь: $9-3\sqrt{3}$.

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{1\cdot\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}\cdot 1+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+\sqrt[3]{2}\cdot 1+1^2\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{2-1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$.

6) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.

$$\frac{10}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{10\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}\cdot 1+1^2\right)\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}=\frac{10\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-1^3}=$$

$$=\frac{10\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{2}=5\left(\sqrt[3]{3}-1\right).$$

Відповідь: $5\left(\sqrt[3]{3}-1\right)$.

9. Скоротити дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{a-\sqrt[4]{a^3}}$.

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}}{a-\sqrt[4]{a^3}}=\frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-\sqrt[4]{a}}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^4-\left(\sqrt[4]{a}\right)^3}=\frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}-1\right)}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^3\left(\sqrt[4]{a}-1\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

3) $\dfrac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}$.

$$\frac{x+8}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+2^3}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{\left(\sqrt[3]{x}+2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}=\sqrt[3]{x}+2.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{x}+2$.

10. Спростити вираз:

1) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}$.

$$\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-3|=$$

$$=\left[\begin{array}{l}-x-2-x+3,\ x\le -2,\\ x+2-x+3,\ -2<x\le 3,\\ x+2+x-3,\ x>3;\end{array}\right.=\left[\begin{array}{l}-2x+1,\ x\le -2,\\ 5,\ -2<x\le 3,\\ 2x-1,\ x>3.\end{array}\right.$$

Відповідь: $-2x+1$, якщо $x\le -2$; 5, якщо $-2<x\le 3$; $2x-1$, якщо $x>3$.

2) $\left(\dfrac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2$, $x\ne a,\ x\ge 0,\ a\ge 0$.

$$\left(\frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{a^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{xa}+\sqrt{a^2}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}+\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{x^2}+\sqrt{ax}+\sqrt{a^2}+\sqrt{ax}\right)\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{ax}+\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)^2}=1.$$

Відповідь: 1.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень А

Спростити вираз:

1) $6\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{27}$.

А $-\sqrt{3}$ **Б** $\sqrt{3}$ **В** $2\sqrt{3}$ **Г** $-2\sqrt{3}$

2) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$.

А $2\sqrt{6}$ **Б** 11 **В** $\sqrt{30}$ **Г** 1

3) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$.

А 4 **Б** 6 **В** $-2\sqrt{3}$ **Г** $2\sqrt{3}$

Обчислити:

4) $\sqrt[3]{192\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1,5}}$.

А $6\sqrt[3]{4}$ **Б** 12 **В** 6 **Г** $3\sqrt{2}$

5) $\sqrt[4]{512}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt[4]{2}$.

А $32^{\frac{1}{4}}$ **Б** $2^{\frac{11}{4}}$ **В** 8 **Г** 16

6) $\sqrt[3]{108\cdot 128}-\sqrt[4]{8\cdot 162}$.

А 6 **Б** 18 **В** $6\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$ **Г** $2\sqrt[3]{6}-6$

Спростити:

7) $x^{\sqrt{2}}\cdot x^{1,5}:\sqrt[4]{x^{4\sqrt{2}}}$.

А $x^{1,5}$ **Б** x^2 **В** x^3 **Г** x^4

8) $a^{\sqrt{2}}\cdot\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$.

А $\dfrac{1}{a}$ **Б** a **В** $a^{\sqrt{2}}$ **Г** $\dfrac{1}{a^{\sqrt{2}}}$

9) $\left(b^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

А b^2 **Б** $b^{2\sqrt{2}}$ **В** b **Г** $b^{\sqrt{2}}$

Винести множник з-під знаку кореня:

10) $\sqrt[3]{x^5y^7}$.

А $xy\sqrt[3]{x^2y}$ **Б** $xy^2\sqrt[3]{x^2y}$ **В** $xy^2\sqrt[3]{xy^2}$ **Г** $xy\sqrt[3]{xy}$

11) $\sqrt{x^3y^5}$, якщо $x>0$ і $y>0$.

А $xy^2\sqrt{xy}$ **Б** $xy\sqrt{xy^2}$ **В** $x^2y\sqrt{xy}$ **Г** $xy\sqrt{x^2y}$

12) $\sqrt[6]{6a^{18}y^8}$, якщо $a>0,\ y<0$.

А $a^3y\sqrt[6]{6a^3y^2}$ **Б** $a^3y\sqrt[6]{6a^3y}$ **В** $a^3y\sqrt[6]{6y^2}$ Г $-a^3y\sqrt[6]{6y^2}$

13) $\sqrt[3]{-64a^5y^3}$, якщо $a>0,\ y>0$.

А $4ay\sqrt[3]{a^2}$ **Б** $4a^2y\sqrt[3]{a}$ **В** $-4ay\sqrt[3]{a^2}$ **Г** $-4a^2y\sqrt[3]{a}$

Внести множник під знак кореня:

14) $3xy^3\sqrt{x}$, якщо $x>0,\ y>0$.

А $\sqrt{3x^3y^6}$ **Б** $\sqrt{9x^3y^3}$ **В** $\sqrt{9x^3y^6}$ **Г** $\sqrt{3x^2y^3}$

15) $(5-b)\sqrt{\dfrac{1}{25-b^2}}$, якщо $0<b<5$.

А $-\sqrt{\dfrac{5-b}{5+b}}$ **Б** $\sqrt{\dfrac{5-b}{5+b}}$ **В** $\sqrt{\dfrac{b+5}{b-5}}$ **Г** $\sqrt{\dfrac{5+b}{5-b}}$

16) $\dfrac{a+b}{a-b}\sqrt{\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}}$.

А 1 **Б** -1 **В** $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ **Г** -1, якщо $\dfrac{a+b}{a-b}<0$; 1, якщо $\dfrac{a+b}{a-b}>0$

Позбутись ірраціональності в знаменнику дробу:

17) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x-y}}$.

А $\sqrt{x-y}$ **Б** $\sqrt{x+y}$ **В** $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **Г** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

18) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

А $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **Б** $x+y$ **В** $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ **Г** $x-y$

19) $\dfrac{2}{y\sqrt[4]{2}}$.

А $2\sqrt[4]{8}$ **Б** $\sqrt[4]{8}$ **В** $\dfrac{2\sqrt[4]{8}}{y}$ **Г** $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{y}$

20) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1},\ (x\neq -1)$.

А $\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ **Б** $\dfrac{x\sqrt{x}+x}{x-1}$ **В** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$ **Г** $\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x-1}$

Рівень Б

Обчислити:

21) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

22) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}-2\sqrt{42}$.

23) $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}$.

24) $\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}+\dfrac{23}{7+\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

25) $\sqrt[3]{\left(7-5\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

26) $\dfrac{\sqrt{(b+2)^2-8b}}{\sqrt{b}-\dfrac{2}{\sqrt{b}}}$, при $b=0{,}0025$.

27) $\dfrac{\sqrt{x}}{1-x\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+x}{x+\sqrt{x}+1}$, при $x=0{,}5$.

Спростити вираз:

28) $\sqrt{b\left(\sqrt{a}+\sqrt{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{a-b}\right)}$, якщо $b<0$.

29) $(a-b)\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $c<0, a>b$.

30) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)=\sqrt{1-a}$.

Рівень В

Позбутись ірраціональності в знаменнику дробу:

31) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

32) $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

33) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$.

Спростити вираз:

34) $\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}$.

35) $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

36) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$.

37) $\left(\sqrt{a(1-a)}+\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{1-a}}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{1-a}\right)$.

Спростити вираз і знайти його значення:

38) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}-1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}}+\sqrt{x}$, якщо $x=0,5$.

39) $\sqrt{\left(1-\sqrt{b}\right)^2+4\sqrt{b}}-\sqrt{\left(1+\sqrt{b}\right)^2-4\sqrt{b}}$, якщо $b=2$.

40) $\sqrt{\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}+2\right):\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}-2\right)}\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)-\sqrt{a}$, якщо $a=0,5$.

Розділ 2

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

2.1. Загальні відомості

Рівнянням зі змінною x називається рівність двох виразів $f(x)=g(x)$. Число a називається коренем даного рівняння зі змінною x, якщо при підстановці числа a в обидві частини рівняння отримаємо правильну числову рівність. Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що їх не існує.

Два рівняння називаються рівносильними, якщо вони мають однакову множину розв'язків або обидва не мають коренів. Якщо два рівняння рівносильні, то кожне з них є наслідком іншого.

Ірраціональними називаються рівняння, в яких невідома величина знаходиться під знаком кореня (радикала) або під знаком дії піднесення до дробового показника степеня.

Основним методом розв'язування ірраціональних рівнянь є перетворення їх на раціональні рівняння. Ці перетворення виконуються за допомогою:

1) «відокремлення» радикала і піднесення обох частин рівняння до одного степеня;

2) введення нових невідомих (метод заміни);

3) штучних перетворень.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь використовуються теореми:

Теорема 1. Рівняння вигляду $\sqrt[2n]{f(x)}=a$ рівносильне сукупності систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a \ge 0,\\ f(x)=a^{2n},\end{cases}\\ \begin{cases}a<0,\\ x\in\varnothing.\end{cases}\end{array}\right.$$

Теорема 2. Рівняння вигляду $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ рівносильне системі

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)\ge 0,\end{cases} \text{ або } \begin{cases}f(x)=g(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$$

З двох систем вибирається та, яка простіше розв'язується.

Теорема 3. Рівняння вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n}. \end{cases}$

Теорема 4. Рівняння вигляду $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = (g(x))^{2n+1}$.

Теорема 5. Рівняння вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g). \end{cases} \end{array}\right.$

Теорема 6. Рівняння вигляду $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} = 0$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

Теорема 7. Рівняння вигляду $\dfrac{g(x)}{\sqrt[2n]{f(x)}} = 0$ рівносильне системі $\begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

2.2. Розв'язання ірраціональних рівнянь за допомогою властивостей арифметичного кореня *n*-го степеня

Областю визначення рівняння, або областю його допустимих значень (ОДЗ), називається множина значень невідомого, при яких мають зміст його ліва і права частини.

В одних випадках знаходження ОДЗ є корисним для розв'язання рівнянь, в інших задача визначення ОДЗ є складною і непотрібною.

Радикали парного степеня є арифметичними, тобто $\sqrt[2n]{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$. Радикали непарного степеня визначені при будь-якому дійсному значенні підкореневого виразу. Виходячи з цих властивостей, у ряді випадків можна розв'язати ірраціональні рівняння без перетворень.

Приклади. Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{3x-4}=-2.$

Ця рівність неправильна, бо $\sqrt{3x-4}\geq 0$ (за означенням арифметичного квадратного кореня). Отже, дане рівняння коренів не має.

2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+3=0.$

$\sqrt{x}\geq 0, \sqrt{x-1}\geq 0, \sqrt{x-2}\geq 0, 3>0.$ Отже, значення лівої частини рівняння більше від 0, точніше $\geq 4+\sqrt{2}$, і ніяк не може дорівнювати 0.

Відповідь: $x\in\varnothing.$

3) $\sqrt{x^2+x-6}+\sqrt{x^2-4}=0$.

$\sqrt{x^2+x-6}\geq 0$, $\sqrt{x^2-4}\geq 0$. Отже, дана рівність можлива тільки за умови $\begin{cases}\sqrt{x^2+x-6}=0,\\ \sqrt{x^2-4}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x=-3,\\ x=2,\end{array}\right.\\ x=\pm 2.\end{cases} \Rightarrow x=2,$

Відповідь: 2.

4) $\sqrt[4]{4-x}=3x+\sqrt{x-5}.$

Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}4-x\geq 0,\\ x-5\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 4,\\ x\geq 5\end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing.$

Маємо: ОДЗ даного рівняння – це порожня множина, отже, розв'язувати рівняння немає потреби.

Відповідь: $\varnothing$.

5) Скільки цілих розв'язків має рівняння $\sqrt{2009-x}+\sqrt{x-2008}=1$?

ОДЗ: $\begin{cases}2009-x\geq 0,\\ x-2008\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 2009,\\ x\geq 2008\end{cases} \Rightarrow x\in[2008,\ 2009]$.

В отриманий проміжок входять тільки два цілих числа: 2008 і 2009. Перевіркою встановлюємо, що обидва ці числа є розв'язками даного рівняння.

Відповідь: 2.

6) $\sqrt[6]{x^2-81}+\sqrt[6]{81-x^2}+\sqrt[3]{x^2-54}=3$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-81\geq 0, \\ 81-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2=81 \Leftrightarrow x=-9; 9.$

Отже, область визначення рівняння складається з двох чисел: $x_1=-9$ і $x_2=9$. Перевірка показує, що вони обидва задовольняють дане рівняння.

Відповідь: –9; 9.

7) $\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}=\sqrt[4]{-x}+1$.

ОДЗ: $-x>0 \Rightarrow x<0$. Але при $x<0$ ліва частина рівняння $\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}<0$, а права $\sqrt[4]{-x}+1>0$. Отже, рівняння розв'язків не має.

Відповідь: $\varnothing$.

8) $\sqrt{x-3}\sqrt{x+2}\sqrt{x-6}=0$.

Маємо добуток, що дорівнює нулю. Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3}=0, \\ \sqrt{x-2}=0, \\ \sqrt{x-6}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Але при $x=3$ вираз $\sqrt{x-6}$ не має змісту, при $x=-2$ корені $\sqrt{x-3}$ і $\sqrt{x-6}$ не існують, отже, числа 3 і 2 не є коренями даного рівняння.

Відповідь: 6.

9) $\sqrt{x-3}\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x-6}=0$.

Отже, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3}=0, \\ \sqrt{x+2}=0, \\ \sqrt[3]{x-6}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-2, \\ x=6. \end{array}\right.$

Але при $x=-2$ не існує $\sqrt{x-3}$. Вираз $\sqrt[3]{x-6}$ існує і при $x=-2$, і при $x=3$, бо підкореневий вираз кореня непарного степеня може набувати будь-яких дійсних значень.

Відповідь: 3; 6.

ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень А

Довести, що рівняння не мають розв'язків:

1) $\sqrt{x-6}+\sqrt{3-x}=5.$

2) $\sqrt{1-3x}=-1.$

3) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=0.$

4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}=\sqrt{x}.$

5) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3{,}1}=2.$

6) $\sqrt{-2-x}=\sqrt[3]{x+1}.$

Рівень Б

Розв'язати рівняння:

7) $(x+1)\sqrt{x-2}=0.$

А –1; 2 **Б** –1 **В** 2 **Г** коренів немає

8) $\frac{1}{2}\sqrt{2-x}+4=0.$

А 2 **Б** –2 **В** –6 **Г** коренів немає

9) $\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+1}\sqrt{x-4}=0.$

А 2; 4 **Б** –1; 2; 4 **В** 4 **Г** 2

10) $(x-1)\sqrt{x-2}\sqrt{(x+1)(x+3)}=0$.

А 1; 2; 3 **Б** 1; 2; –3 **В** 1; 2 **Г** 2

11) $\sqrt[3]{x+1}\sqrt{2-x}\sqrt[5]{x-3}=0$.

А 1; 2; 3 **Б** 1; 2 **В** 2 **Г** 1; 3

12) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$.

А 0; –1 **Б** коренів немає **В** 0 **Г** –1

13) $\sqrt{x^2-1}+(x+1)^2=0$.

А ±1 **Б** –1 **В** 1 **Г** коренів немає

14) $\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^4-16}=0$.

А 2 **Б** –2 **В** ±2 **Г** коренів немає

Рівень В

Розв’язати рівняння:

15) $\sqrt[4]{2x-4}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$.

16) $\sqrt[6]{x-6}+\sqrt{10-5x}=8$.

17) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-8x+12}+\sqrt{5-x}=\sqrt{3}$.

18) $\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=(x-2)\sqrt{16-x^2}$.

19) $(\sqrt{x-5}-5+x)(2x+1)=0$.

20) $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1$.

2.3. Метод піднесення обох частин ірраціонального рівняння до одного й того самого степеня

Основний метод зведення ірраціональних рівнянь до раціональних полягає у відокремленні радикала і піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня. При цьому слід пам’ятати, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня утворюється рівносильне йому рівняння, а при піднесенні до парного степеня – рівняння-наслідок. В останньому випадку можуть з’явитися сторонні корені. Щоб їх виключити, потрібно простежити за рівносильністю всіх перетворень, що досягається за допомогою змішаних систем, або виконати перевірку.

Приклади. Розв’язати рівняння:

1) $x-4=\sqrt{x+8}$.

Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата і здобудемо $x^2-8x+16=x+8$, $x^2-9x+8=0$, $x=1$ або $x=8$. Перевірка показує, що число 1 – сторонній корінь.

Відповідь: 8.

Дане рівняння можна розв’язувати іншим способом, враховуючи рівносильність усіх перетворень:

$$x-4=\sqrt{x+8}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)^2=x+8,\\ x-4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9x+8=0,\\ x\ge 4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=8,\end{array}\right.\\ x\ge 4;\end{cases}\Rightarrow x=8.$$

Відповідь: 8.

2) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2.$

Відокремимо радикал $\sqrt{x+3}$:

$$\sqrt{x+3}=2+\sqrt{7-x}\Leftrightarrow(\sqrt{x+3})^2=(2+\sqrt{7-x})^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3=4+4\sqrt{7-x}+7-x\Leftrightarrow 2x-8=4\sqrt{7-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2x-8)^2=(4\sqrt{7-x})^2\Leftrightarrow 4x^2-32x+64=16(7-x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-16x-48=0\Leftrightarrow x^2-4x-12=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=6,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

Перевірка підтверджує лише число $x=6$. Число -2 – сторонній корінь.

Відповідь: 6.

3) $\sqrt{4x+3}+\sqrt{3x-1}=4.$

Застосовуючи схему рівносильних перетворень, дістанемо:

$$\sqrt{4x+3}+\sqrt{3x-1}=4\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{4x+3}+\sqrt{3x-1})^2=16,\\ x\geq\dfrac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x+3+2\sqrt{4x+3}\sqrt{3x-1}+3x-1=16,\\ x\geq\dfrac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x+2+2\sqrt{(4x+3)(3x-1)}=16,\\ x\geq\dfrac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sqrt{12x^2+5x-3}=14-7x,\\ x\geq\dfrac{1}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(12x^2+5x-3)=(14-7x)^2,\\ x\geq\dfrac{1}{3},\\ 14-7x\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-216x+208=0,\\ x\geq\dfrac{1}{3},\\ x\leq 2;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=108\pm 8\sqrt{179},\\ \dfrac{1}{3}\leq x\leq 2;\end{cases}\Leftrightarrow x=108-8\sqrt{179}.$$

Відповідь: $x=108-8\sqrt{179}$.

4) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0.$

Відокремимо радикали і піднесемо обидві частини рівняння до 6-го степеня.

$\sqrt[3]{x+7}=\sqrt{x+3}$,

$(x+7)^2=(x+3)^3$,

$x^2+14x+49=x^3+9x^2+27x+27,$

$x^3+8x^2+13x-22=0$.

Розв'язавши отримане рівняння, дістанемо $x=1$.

Перевіркою встановлюємо, що $x=1$ є коренем даного рівняння.

Відповідь: 1.

5) $\sqrt[3]{x-44}=9.$

Підносимо обидві частини рівняння до третього степеня. Це – непарний степінь, отже, сторонні корені не з'являться.

$\sqrt[3]{x-44}=9 \Leftrightarrow x-44=9^3 \Leftrightarrow x-44=729 \Leftrightarrow x=773$.

Відповідь: 773.

6) $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2.$

Піднесемо обидві частини рівняння до третього степеня, скориставшись формулою

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3ab(a\pm b)\pm b^3$.

$(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13})^3=2^3$,

$2x+13-3\sqrt[3]{2x+13}\sqrt[3]{2x-13}(\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13})-2x+13=8.$

Оскільки $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$, то отримаємо рівняння

$26-6\sqrt[3]{4x^2-169}=8$,

$-6\sqrt[3]{4x^2-169}=-18$,

$\sqrt[3]{4x^2-169}=3$,

$(\sqrt[3]{4x^2-169})^3=3^3$,

$4x^2-169=27$,

$x^2=49$,

$x=\pm 7$.

Не всі перетворення, виконані при розв'язанні рівняння, є рівносильними (підстановка $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$), тому обов'язково треба виконати перевірку знайдених коренів.

При $x = 7$ отримаємо: $\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{1} = 3 - 1 = 2, 2 = 2$, отже, $x = 7$ – корінь рівняння.

При $x = -7$ отримаємо: $\sqrt[3]{-1} - \sqrt[3]{-27} = -1 + 3 = 2$, $2 = 2$, отже, $x = -7$ – корінь рівняння.

Відповідь: $-7; 7$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень А

Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x+2} = 6.$

А 34 **Б** –38 **В** 4 **Г** коренів немає

2) $\sqrt{x+2} = -6.$

А 34 **Б** –38 **В** 28 **Г** коренів немає

3) $\sqrt[3]{x-2} = 9$.

А 727 **Б** 731 **В** –727 **Г** 11

4) $\sqrt[3]{x-2} = -9.$

А 11 **Б** 727 **В** –727 **Г** коренів немає

5) $\sqrt{x} = 2 - x.$

А 4 **Б** 1 **В** 3 **Г** 9

6) $\sqrt{5x-1} = x + 1.$

А 1 **Б** 2 **В** 1;2 **Г** 0

7) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{1-3x}.$

А 0 **Б** $-\frac{1}{3}$ **В** $\frac{1}{3}$ **Г** $\varnothing$

8) $\sqrt{6x-2} = 7 - x.$

А 3 **Б** 3; 17 **В** 17 **Г** –3

9) $\sqrt{3x-1} = \sqrt{9-2x}.$

А 2 **Б** 10 **В** 8 **Г** –2

10) $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0.$

А –6; 1 **Б** 0; –6 **В** 3; 2 **Г** –3; –2

Рівень Б

Розв'язати рівняння:

11) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}.$

12) $\sqrt{x^2+x-12}=\sqrt{-3x}.$

13) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4.$

14) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11.$

15) $\sqrt{15-3x}-1=x.$

16) $x+\sqrt{3x+7}=7.$

17) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5.$

18) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{3x+4}.$

19) $\sqrt{5x+1}-\sqrt{x+1}=2.$

20) $\sqrt{5x-2}+\sqrt{4-x}=3.$

21) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+6}=6.$

22) $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x}=1.$

23) $\sqrt[3]{4x-1}-\sqrt[3]{x+1}=1.$

24) $\sqrt[3]{4x+3}-\sqrt[3]{x+2}=1.$

25) $\sqrt[3]{2x-8}-\sqrt[3]{x-8}=2.$

Рівень В

Розв'язати рівняння:

26) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}.$

27) $2\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{4x-1}.$

28) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}=\sqrt{5x+1}.$

29) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2+x}.$

30) $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5.$

31) $\sqrt{x^2-21x+98}-\sqrt{x^2-16x+63}=\sqrt{x^2-13x+42}.$

32) $\sqrt{8-x}-\sqrt{9+5x}-\sqrt{4-5x}+\sqrt{5+x}=0.$

33) $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}.$

34) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2.$

2.4. Метод введення нових змінних (метод заміни)

Метод заміни – це один із методів спрощення ірраціональних рівнянь, особливо тих, які містять корені вищих степенів.

Приклади. Розв’язати рівняння:

1) $\sqrt{\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}}-2\sqrt{\dfrac{x^2-1}{3x^2+x}}=1.$

Зробимо заміну $\sqrt{\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}}=t, t>0$.

Отримаємо рівняння $t-\dfrac{2}{t}=1.$

Помножимо обидві частини отриманого рівняння на $t\neq 0.$

$t^2-t-2=0$,

$$\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-1; \text{ не задовольняє умову } t>0. \end{array}\right.$$

Отже, $\sqrt{\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}}=2$,

$\dfrac{3x^2+x}{x^2-1}=4$,

$$\begin{cases} 3x^2+x=4x^2-4, \\ x^2-1\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x-4=0, \\ x\neq \pm 1; \end{cases}$$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Оскільки всі виконані перетворення були рівносильними, то перевірку можна не робити.

Відповідь: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

2) $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7.$

$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -x^2 + 3x + 7,$

$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = -(x^2 - 3x) + 7$.

Зробимо заміну $x^2 - 3x = t$, отримаємо і розв'яжемо рівняння

$$\sqrt{t+5} = -t + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} -t + 7 \ge 0, \\ t + 5 = (-t+7)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t \ge -7, \\ t^2 - 15t + 44 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 7, \\ \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = 11; \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow t = 4.$$

Отже, $x^2 - 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -1. \end{array} \right.$

Відповідь: $-1;\ 4$.

3) $\sqrt{x^2 + 32} - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3.$

$(\sqrt[4]{x^2 + 32})^2 - 2\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3.$

Зробимо заміну $\sqrt[4]{x^2 + 32} = t,\ t > 0$, отримаємо і розв'яжемо квадратне рівняння:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -1; \text{сторонній корінь, не задовольняє умову } t > 0. \end{array} \right.$$

Отже, $\sqrt[4]{x^2 + 32} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 32 = 81 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7.$

Відповідь: $-7; 7$.

4) $\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{5-x} = 2$.

Зробимо заміну $\sqrt[3]{5-x} = t$, з якої виразимо $x + 3$.

$\sqrt[3]{5-x} = t \Leftrightarrow 5 - x = t^3 \Leftrightarrow x = 5 - t^3 \Leftrightarrow x + 3 = 8 - t^3$.

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$\sqrt{8-t^3}+t=2 \Leftrightarrow \sqrt{8-t^3}=2-t \Leftrightarrow \begin{cases} 2-t \geq 0, \\ 8-t^3=(2-t)^2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -t \geq -2, \\ (2-t)(4+2t+t^2)-(2-t)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2, \\ (2-t)(t^2+3t+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 2, \\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-2, \\ t=-1. \end{array} \right. \end{cases}$$

Користуючись рівністю $x=5-t^3$, отримаємо корені даного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=13, \\ x=6. \end{array} \right.$$

Відповідь: –3; 6; 13.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень Б

Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}+6=0.$
2) $3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-2=0.$
3) $x^2+8x-2\sqrt{x^2+8x}-3=0.$
4) $x^2-2\sqrt{x^2-24}=39.$
5) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22.$
6) $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$
7) $x^2+3-\sqrt{2x^2-3x+2}=1{,}5(x+4).$
8) $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3.$

9) $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6.$

10) $3\sqrt[10]{x^2-3}+\sqrt[5]{x^2-3}=4.$

Рівень B

Розв'язати рівняння:

11) $\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}-2\sqrt{\dfrac{x+1}{2x}}=1.$

12) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}.$

13) $\sqrt[5]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[5]{\dfrac{x+3}{x-5}}=2.$

14) $\sqrt{x+2\sqrt{x-3}-2}+\sqrt{x-2\sqrt{x-3}-2}=x-3.$

15) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1.$

16) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6.$

17) $x\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x^2}=4.$

18) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$

19) $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6,$

20) $\sqrt[3]{x-2}+1=\sqrt{x-1}.$

2.5. Метод зведення до еквівалентної системи раціональних рівнянь

Іноді при розв'язанні ірраціональних рівнянь доцільно вводити не одну, а кілька змінних.

Саме для рівнянь вигляду $\sqrt[n]{a+f(x)}\pm\sqrt[n]{b+f(x)}=c$ вводиться заміна $\begin{cases}\sqrt[n]{a+f(x)}=u,\\ \sqrt[n]{b+f(x)}=v.\end{cases}$ Тоді дане рівняння набирає вигляду $u\pm v=c.$ Але для знаходження значень невідомих u і v недостатньо одного рівняння. Друге рівняння записуємо у вигляді $u^n-v^n=a-b$.

Приклади. Розв'язати рівняння: 1) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

Зробимо заміну: $\begin{cases}\sqrt[4]{x+8}=u, u\ge 0,\\ \sqrt[4]{x-8}=v, v\ge 0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u^4=x+8,\\ v^4=x-8.\end{cases}$

Отже, даному рівнянню еквівалентна система рівнянь:

$$\begin{cases}u-v=2,\\ u^4-v^4=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u-v=2,\\ (u^2-v^2)(u^2+v^2)=16\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u-v=2,\\ (u-v)(u+v)(u^2+v^2)=16\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u-v=2,\\ (u+v)(u^2+v^2)=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2+v, & (1)\\ (2+2v)((2+v)^2+v^2)=8. & (2)\end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння (2):

$2(1+v)(4+4v+2v^2)=8,$

$(1+v)2(2+2v+v^2)=4,$

$2+2v+v^2+2v+2v^2+v^3=2,$

$v^3+3v^2+4v=0,$

$v(v^2+3v+4)=0,$

$$\left[\begin{array}{l}v=0,\\ v^2+3v+4=0.\end{array}\right.$$

Друге рівняння розв'язків не має, бо $D<0$.

Отже, $v=0$. Тоді $\sqrt[4]{x-8}=0$, звідки $x=8$.

Зауважимо, що після введення двох замін і знаходження значень нових невідомих при пошуку розв'язків вихідного рівняння достатньо врахувати лише одну заміну (у розглянутому випадку враховано лише заміну $\sqrt[4]{x-8}=v$). Урахування іншої заміни (у розглянутому випадку $\sqrt[4]{x-8}=u$) дає такі самі корені вихідного рівняння.

Відповідь: 8.

2) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$.

Введемо заміну: $\begin{cases}\sqrt[3]{2x-8}=u,\\ \sqrt[3]{x-8}=v\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^3=2x-8,\\ v^3=x-8.\end{cases}$

Якщо помножити друге рівняння останньої системи на (–2), додати перше та друге рівняння отриманої системи, то дістанемо рівняння: $u^3 - 2v^3 = 8$. Таким чином, рівняння

$$\sqrt[3]{2x-8} + \sqrt[3]{x-8} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2, \\ u^3 - 2v^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2-v, \\ (2-v)^3 - 2v^3 = 8. \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння отриманої системи:

$$(2-v)^3 - 2v^3 = 8,$$

$$8 - 12v + 6v^2 - v^3 - 2v^3 = 8,$$

$$v^3 - 4v^2 + 12v = 0,$$

$$v(v^2 - 4v + 12) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 0, \\ v^2 - 4v + 12 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0, \\ v \in \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow v = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x-8} = 0 \Rightarrow x = 8.$$

Відповідь: 8.

3) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} = 3.$

Введемо нові змінні: $\begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = u, \\ \sqrt[3]{7+x} = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = u^3, \\ 7+x = v^3. \end{cases}$

Отже, дане рівняння еквівалентне системі раціональних рівнянь:

$$\begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3, \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3, \\ (u+v)(u^2 - uv + v^2) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 - uv = 3, \\ u + v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 - v, & (1) \\ (3-v)^2 + v^2 - (3-v)v = 3. & (2) \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння (2):

$$9 - 6v + v^2 + v^2 - 3v + v^2 = 3;$$

$$3v^2 - 9v + 6 = 0;$$

$$v^2 - 3v + 2 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 2, \\ v = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{7+x} = 2, \\ \sqrt[3]{7+x} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 7 + x = 8, \\ 7 + x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-6; 1$.

ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Рівень В

Розв’язати рівняння:

1) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2.$

2) $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2.$

3) $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2.$

4) $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1.$

5) $\sqrt{2x^2-5x+11}+\sqrt{2x^2-5x+6}=5.$

6) $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1.$

7) $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2+3}=3x.$

8) $\sqrt[3]{\left(x+4\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x-5\right)^2}+\sqrt[3]{\left(x+4\right)\left(x-5\right)}=3.$

9) $\dfrac{\left(\sqrt{7-x}-\sqrt{x-3}\right)^2}{\sqrt{7-x}+\sqrt{x-3}}=2.$

10) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{\left(15-x\right)^2}+\sqrt[3]{\left(15-x\right)\left(x-6\right)}+\sqrt[3]{\left(x-6\right)^2}\right)^2}{\sqrt[3]{15-x}+\sqrt[3]{x-6}}=\dfrac{49}{3}.$

2.6. Штучні методи

Розглянемо декілька штучних прийомів для розв’язання ірраціональних рівнянь на конкретних прикладах.

Розв’язати рівняння:

1) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$

Виділимо повні квадрати в підкореневих виразах лівої частини рівняння:

$$x+3-4\sqrt{x-1}=x-1-2\sqrt{x-1}\cdot 2+4=(\sqrt{x-1}-2)^2,$$

$$x+8-6\sqrt{x-1}=x-1-2\sqrt{x-1}\cdot 3+9=(\sqrt{x-1}-3)^2.$$

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню:

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1\Leftrightarrow|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$$

Розкриємо модулі методом інтервалів, враховуючи ОДЗ $(x \geq 1)$, отримаємо сукупність рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} -\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1,\ 1 \leq x \leq 5, \\ \sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1,\ 5 \leq x \leq 10, \\ \sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,\ x>10; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\sqrt{x-1}=-4,\ 1 \leq x \leq 5, \\ 1=1,\ 5<x \leq 10, \\ 2\sqrt{x-1}=6,\ x>10; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ 5<x \leq 10, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right. \Rightarrow 5 \leq x \leq 10,$$

Відповідь: $x \in [5;10]$.

2) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x.$ (1)

Помножимо обидві частини даного рівняння на вираз, спряжений до лівої частини рівняння:

$\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}.$

Отримаємо:

$$(\sqrt{2x^2+3x+5})^2-(\sqrt{2x^2-3x+5})^2=$$
$$=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}),$$
$$2x^2+3x+5-2x^2+3x-5=$$
$$=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}),$$
$$6x=3x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}),$$
$$2x-x(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5})=0,$$
$$x(2-(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}))=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Щоб розв'язати рівняння (2), додамо його до даного рівняння (1), дістанемо рівняння: $2\sqrt{2x^2+3x+5}=3x+2$, яке розв'яжемо піднесенням обох частин рівняння до квадрата.

$$4(2x^2+3x+5)=9x^2+12x+4,$$
$$8x^2+12x+20=9x^2+12x+4,$$

$x^2-16=0,$

$x=\pm 4.$

Виконаємо перевірку:

при $x=0$, $\sqrt{0+0+5}+\sqrt{0-0+5}=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5},\quad 2\sqrt{5}\neq 0.$ Отже, $x=0$ – сторонній корінь;

при $x=-4$, $\sqrt{32-12+5}+\sqrt{32+12+5}=5+7=12,\quad 12\neq -12$. Отже, число -4 – сторонній корінь;

при $x=4$, $\sqrt{32+12+5}+\sqrt{32-12+5}=5+7=12,\ 12=12$. Отже, $x=4$ є коренем.

Відповідь: 4.

3) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}.$

І чисельник, і знаменник дробу лівої частини домножимо на вираз $\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}$. Отримаємо рівняння:

$$\frac{(\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x})^2}{(\sqrt{21+x})^2-(\sqrt{21-x})^2}=\frac{21}{x};$$

$$\frac{21+x+2\sqrt{21+x}\sqrt{21-x}+21-x}{21+x-21+x}=\frac{21}{x};$$

$$\frac{42+2\sqrt{441-x^2}}{2x}=\frac{21}{x};$$

$$\frac{21+\sqrt{441-x^2}}{x}=\frac{21}{x};$$

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ 21+\sqrt{441-x^2}=21; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq 0, \\ \sqrt{441-x^2}=0; \end{cases}$$

$x=\pm 21$.

Перевіркою встановлюємо, що обидва числа є коренями даного рівняння.

Відповідь: –21; 21.

4) $3\sqrt[3]{x^2-4x+4}+3\sqrt[3]{x^2+4x+4}=10\sqrt[3]{x^2-4}.$

Розкладемо на множники підкореневі вирази, отримаємо: $3\sqrt[3]{(x-2)^2}+3\sqrt[3]{(x+2)^2}=10\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}$. Це однорідне рівняння.

Поділимо обидві частини рівняння на $\sqrt[3]{(x-2)(x+2)}\neq 0$.

Дістанемо рівняння $3\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}+3\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-2}}=10$, яке розв'яжемо, ввівши заміну: $\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}=t$.

$$3t+\frac{3}{t}=10 \Leftrightarrow 3t^2-10t+3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3}, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Отже,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}=\dfrac{1}{3}, \\ \sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+2}}=3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{1}{27}, \\ \dfrac{x-2}{x+2}=27; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 27x-54=x+2, \\ x-2=27x+54; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 26x=56, \\ 26x=-56; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{28}{13}, \\ x=-\dfrac{28}{13}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $-\dfrac{28}{13}; \dfrac{28}{13}$.

Деякі рівняння можна розв'язувати, користуючись властивостями монотонності функцій.

5) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+5}=\dfrac{10}{x-2}$.

$y=\sqrt{2x-4}$ – зростаюча функція для $x>2$,

$y=\sqrt{x+5}$ – зростаюча функція для $x>2$. Сума зростаючих функцій – функція зростаюча.

$y=\dfrac{10}{x-2}$ – функція спадна. Отже, дане рівняння має не більше одного кореня, який знаходять методом підбору: $x=4$.

Відповідь: 4.

6) $\sqrt{2(x^2-6x)+19}+\sqrt{3x^2-18x+36}=-2x^2+12x-14.$

Виділимо під знаками радикалів повні квадрати:

$\sqrt{2(x^2-6x+9)+1}+\sqrt{3(x^2-6x+9)+9}=-2(x^2-6x+9)+4$,

$$\sqrt{2(x-3)^2+1}+\sqrt{3(x-3)^2+9}=4-2(x-3)^2. \qquad (1)$$

Оцінимо ліву і праву частини отриманого рівняння:

$\sqrt{2(x-3)^2+1}+\sqrt{3(x-3)^2+9}\geq\sqrt{1}+\sqrt{9}=1+3=4$, а

$4-2(x-3)^2\leq 4$.

Отже, рівність (1) можлива тільки у випадку, коли ліва й права частини рівняння одночасно дорівнюють 4, а це можливо тільки для $x=3$. Тобто $x=3$ – корінь даного рівняння.

Відповідь: 3.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень B

Розв'язати рівняння:

1) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}+\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=6$.

2) $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

3) $\sqrt{x^3-4x^2+x+15}+\sqrt{x^3-4x^2-x+13}=x+1$.

4) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$.

5) $\sqrt{x^2+5x+3}-\sqrt{x^2+3x+2}=2x+1$.

6) $\dfrac{1}{x+\sqrt{5-x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{5-x^2}}=\dfrac{4}{3}$.

7) $\sqrt[8]{(2-x)^2}+\sqrt[8]{(7+x)^2}=\sqrt[8]{(7+x)(2-x)}$.

8) $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$.

9) $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$.

10) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x+5}+\sqrt{5x+11}=10$.

11) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-1}+\sqrt{10x-3}=\sqrt{9-x}+\sqrt{23-3x}+\sqrt{6-x}$.

12) $2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+9}=5-x^2$.

13) $\sqrt{x^3+28}=\dfrac{20}{3x-4}-\sqrt{x^3+8}$.

Перевірний тест 1

Варіант 1

Рівень А

1. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{3x-4}=\sqrt{6x+2}$?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** жодного **Д** безліч

2. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2x+3}=5$.

А 64 **Б** 61 **В** 1 **Г** 4 **Д** коренів немає

3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-9}+(x-3)^2=0$.

А –3 **Б** 3 **В** ± 3 **Г** коренів немає **Д** 9

4. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x+7}\sqrt{x+8}\sqrt{x-9}=0$?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** жодного **Д** безліч

5. Який проміжок містить усі корені рівняння $\sqrt{4x-3}=3-4x$?

А $[0;2]$ **Б** $\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$ **В** $[0;1]$ **Г** $(0;1)$ **Д** рівняння розв'язків не має

6. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}+1=0$.

А – 1; 1; 3 **Б** 1; 3 **В** 3 **Г** 0 **Д** коренів немає

7. Скільки цілих розв'язків має рівняння $\sqrt{x-327}+\sqrt{328-x}=1$?

А 4 **Б** 3 **В** 2 **Г** 1 **Д** 0

8. Скільки ірраціональних розв'язків має рівняння $x-5=\sqrt{x+5}$?

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3 **Д** безліч

9. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x-4}+\sqrt{3-x}=5$?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** безліч **Д** жодного

10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-3}+\sqrt{8-x}=3$.

А 4 **Б** 7 **В** 4;7 **Г** –7 **Д** немає розв'язків

Рівень Б

Розв'язати рівняння:

11. $\sqrt{4x^2+5x-2}=2.$ У відповідь записати цілий розв'язок.

12. $\sqrt{8-5x}=\sqrt{x^2-16}.$ Якщо воно має декілька розв'язків, у відповідь записати їх суму.

13. $\sqrt{x^2-16}=x^2-22.$ Якщо воно має декілька коренів, у відповідь записати їх добуток.

14. $\sqrt{x-6+2\sqrt{x+5}}=2.$ Якщо воно має два корені, у відповідь записати найбільший.

15. $2\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=3.$

16. $\left(x^2-6x+5\right)\sqrt{2x+8-x^2}=0.$ У відповідь записати кількість коренів рівняння.

17. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{3-x}}=4\dfrac{1}{4}.$ Якщо воно має два корені, у відповідь записати їх суму.

Рівень В

Розв'язати рівняння:

18. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}.$

19. $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$

20. $\sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x+2}=4.$

Варіант 2

Рівень А

1. Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x-3}\sqrt{x+4}\sqrt{x-5}=0$?

А 3 **Б** 2 **В** 1 **Г** жодного **Д** безліч

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-4}+\left(x-2\right)^2=0.$

А ±2 **Б** -2 **В** 2 **Г** 0 **Д** безліч

3. Який проміжок містить всі корені рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}+4=0$?

А $(-1;1)$ **Б** $(-\infty;\infty)$ **В** $(-4;4)$ **Г** $\left[-4;4\right]$ **Д** рівняння розв'язків не має

4. Скільки ірраціональних коренів має рівняння $\sqrt{3x-4}=4-3x$?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** жодного **Д** більше 3

5. Скільки цілих розв'язків має рівняння $\sqrt{2010-x}+\sqrt{x-2009}=1$?

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3 **Д** 4

6. Розв'язати рівняння $x-4=\sqrt{x+8}$.

А 1 **Б** 8 **В** 1;8 **Г** –4 **Д** інша відповідь

7. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x-5}=\sqrt{4x-7}$.

А –6 **Б** 6 **В** 3 **Г** коренів немає **Д** 7

8. Скільки розв'язків має рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2$?

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** безліч **Д** жодного

9. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-44}=9$.

А 773 **Б** –773 **В** 8 **Г** 287 **Д** коренів немає

10. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3$.

А 6 **Б** 9 **В** 6 і 9 **Г** немає розв'язків **Д** 8

Рівень Б

Розв'язати рівняння:

11. $\sqrt{23+3x-5x^2}=3$. У відповідь записати цілий розв'язок.

12. $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$. Якщо воно має декілька розв'язків, у відповідь записати їх суму.

13. $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$. У відповідь записати добуток коренів.

14. $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}}=4$. Якщо воно має два корені, у відповідь записати найбільший.

15. $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

16. $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{5x-2-2x^2}=0$. У відповідь записати кількість коренів рівняння.

17. $\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{x+3}{2-x}}=3\frac{1}{3}$. Якщо воно має два корені, у відповідь записати їх суму.

Рівень B

Розв’язати рівняння:

18. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x-1}$.

19. $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=4$.

20. $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+6}=6$.

Розділ III

ІРРАЦІОНАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

3.1. Загальні відомості

Нерівності – це вирази, які з'єднані одним зі знаків нерівності: $>, <, \geq, \leq$. Знаки $>, <$ називаються знаками строгої нерівності. Знаки $\geq, \leq$ називаються знаками нестрогої нерівності.

При розв'язуванні нерівностей знаходження області допустимих значень (ОДЗ) є необхідною складовою розв'язку. Всі перетворення нерівностей мають бути рівносильними, тому що за наявності нескінченної множини розв'язків перевірка неможлива. Кожне значення x з ОДЗ називається розв'язком нерівності, якщо при підстановці його у нерівність отримаємо правильну числову нерівність. Усі розв'язки нерівності утворюють деяку множину X, що є підмножиною ОДЗ. Нерівність може не мати розв'язків $(X = \varnothing)$, мати множину розв'язків або виконуватися при всіх $x \in R$. Нерівність $f_1(x) > g_1(x)$ є наслідком нерівності $f(x) > g(x)$, якщо множина її розв'язків X_1 містить усі розв'язки X нерівності $f(x) > g(x)$, тобто $X_1 \subset X$.

Дві нерівності називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються.

Ірраціональні нерівності – це нерівності, в яких невідомі величини входять під знак кореня (радикала) або дробового показника степеня. Звичайний спосіб розв'язання таких нерівностей – зведення їх до раціональних. Для цього потрібно звільнитися від радикалів піднесенням обох частин нерівності до одного степеня або введенням нової змінної (заміною). При цьому потрібно стежити за тим, щоб при перетворенні нерівностей кожного разу утворювалася нерівність, рівносильна початковій.

При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня завжди утворюється нерівність, рівносильна даній. Якщо обидві частини нерівності піднести до парного степеня, то нерівність, що утворюється, буде рівносильною заданій тоді, коли обидві її частини невід'ємні. Тому при розв'язуванні ірраціональних нерівностей потрібно стежити за тим, щоб ліва і права частини нерівності набували невід'ємних значень, та знаходити ОДЗ нерівності. При розв'язанні ірраціональних нерівностей використовуються подані нижче теореми.

Теорема 1. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 2. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 3. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 4. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 5. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n}, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 6. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \leq (g(x))^{2n}, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$

Теорема 7. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$

Теорема 8. Нерівність вигляду $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x)$ рівносильна

сукупності систем $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge (g(x))^{2n}. \end{cases} \end{array}\right.$

3.2. Розв'язання ірраціональних нерівностей піднесенням обох частин нерівності до одного й того самого степеня

Цей спосіб дає можливість перейти до рівносильної системи або сукупності систем простіших раціональних нерівностей.

Приклади. Розв'язати нерівність:

1) $\sqrt{x-2} < 1$.

Можна розв'язати дану нерівність, використовуючи теорему 5 (те, що $1 > 0$, є очевидним):

$$\sqrt{x-2} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < 1, \\ x-2 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3, \\ x \ge 2; \end{cases} \Rightarrow x \in [2;3).$$

Відповідь: $x \in [2;3)$.

2) $\sqrt{x-2} > 1$.

Обидві частини нерівності невід'ємні, тому піднесемо ліву і праву частини до квадрата, отримаємо нерівність $x-2>1$, яка задовольняє ОДЗ ($x-2 \ge 0$). Отже, $x > 3$.

Відповідь: $x \in (3;\infty)$.

3) $\sqrt{5x+2} < -1$.

За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{5x+2} \ge 0$, отже, не може бути < -1.

Відповідь: $x \in \varnothing$.

4) $\sqrt{5x+2} > -1$.

$\sqrt{5x+2} \ge 0$, отже, нерівність $\sqrt{5x+2} > -1$ правильна при всіх значеннях x, що задовольняють ОДЗ, тобто умову $5x+2 \ge 0$. Отже, $x \ge -\frac{2}{5}$.

Відповідь: $x \in \left[-\frac{2}{5};\infty\right)$.

5) $\sqrt[4]{x+6} \le \sqrt[4]{3-2x}$.

За теоремою 4 маємо:

$$\sqrt[4]{x+6} \le \sqrt[4]{3-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x+6 \le 3-2x, \\ x+6 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \le -3, \\ x \ge -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ x \ge -6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6 \le x \le -1.$$

Відповідь: $x \in [-6;-1]$.

6) $\sqrt{x^2+2x-15} < \sqrt{x^2+x-10}$.

За теоремою 3 маємо:

$$\sqrt{x^2+2x-15} < \sqrt{x^2+x-10} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-15 < x^2+x-10, \\ x^2+2x-15 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x \le -5,\ x \ge 3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ 3 \le x < 5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-5] \cup [3;5)$.

7) $\sqrt[8]{3x+5} > \sqrt[8]{x-3}$.

За теоремою 1 маємо:

$$\sqrt[8]{3x+5} > \sqrt[8]{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5 > x-3; \\ x-3 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4, \\ x \ge 3; \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Відповідь: $x \in [3;\infty)$.

8) $\sqrt{2x^2+5x-17} \ge \sqrt{x^2+x-12}$.

За теоремою 2 маємо:

$$\sqrt{2x^2+5x-17} \ge \sqrt{x^2+x-12} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-17 \ge x^2+x-12, \\ x^2+x-12 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-5 \ge 0, \\ x^2+x-12 \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -5, x \ge 1, \\ x \le -4, x \ge 3; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-5] \cup [3;\infty)$.

9) $\sqrt{x+2} > x$.

За теоремою 7 маємо:

$$\sqrt{x+2} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ x+2 > x^2;\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x+2 \geq 0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ x^2 - x - 2 < 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x \geq -2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 0,\\ -1 < x < 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x \geq -2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 \leq x < 2,\\ -2 \leq x < 0;\end{array}\right. \Leftrightarrow -2 \leq x < 2.$$

Відповідь: $x \in [-2;2)$.

10) $\sqrt{x^2+2x-3} \leq x+1$.

За теоремою 6 маємо:

$$\sqrt{x^2+2x-3} \leq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x-3 \leq x^2+2x+1,\\ x^2+2x-3 \geq 0,\\ x+1 \geq 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3 \leq 1,\\ \left[\begin{array}{l}x \leq -3,\\ x \geq 1,\end{array}\right.\\ x \geq -1;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1.$$

Відповідь: $x \in [1;\infty)$.

11) $\sqrt{2x^2+5x-6} \geq 2-x$.

За теоремою 8:

$$\sqrt{2x^2+5x-6} \geq 2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x < 0,\\ 2x^2+5x-6 \geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}2-x \geq 0,\\ 2x^2+5x-6 \geq (2-x)^2;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x > 2,\\ \left[\begin{array}{l}x \leq \dfrac{-5-\sqrt{73}}{4},\\ x \geq \dfrac{-5+\sqrt{73}}{4},\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 2,\\ \left[\begin{array}{l}x \leq -10,\\ x \geq 1;\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x > 2,\\ \left[\begin{array}{l}x \leq -10,\\ 1 \leq x \leq 2;\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x \leq -10,\\ x \geq 1.\end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-10] \cup [1;\infty)$.

Розглянемо приклади більш складних нерівностей, що розв'язуються піднесенням до степеня обох частин нерівності декілька разів. Починати розв'язування таких нерівностей бажано зі знаходження ОДЗ.

12) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$.

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\ge 0, \\ x-1\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2, \\ x\ge 1; \end{cases} \Rightarrow x\ge 1$.

Відокремимо радикал $\sqrt{x+2}:\sqrt{x+2}>1+\sqrt{x-1}$. В отриманій нерівності обидві частини є невід'ємними, тому піднесемо ліву і праву частини нерівності до квадрата.

Отже:

$$\sqrt{x+2}>1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+2>(1+\sqrt{(x-1)})^2 \Leftrightarrow x+2>1+2\sqrt{x-1}+x-1.$$

Відокремимо радикал і знову піднесемо обидві невід'ємні частини нерівності до квадрата:

$-2\sqrt{x-1}>-2;\ \sqrt{x-1}<1;\ x-1<1;\ x<2.$

Враховуючи умову $x\ge 1$, маємо: $\left[\begin{array}{l} x<2, \\ x\ge 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le x<2.$

Відповідь: $x\in[1;2)$.

13) $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}<2$.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2\ge 0, \\ 4-x\ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 4; \end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Обидві частини даної нерівності є невід'ємними, тому піднесемо їх до квадрата:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}<2 \Leftrightarrow x-2+2\sqrt{x-2}\sqrt{4-x}+4-x<4.$$

Відокремимо радикал і знову піднесемо ліву і праву частини нерівності до квадрата:

$$2\sqrt{(x-2)(4-x)}<2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+6x-8}<1 \Leftrightarrow -x^2+6x-8<1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -x^2+6x-9<0 \Leftrightarrow x^2-6x+9>0 \Leftrightarrow (x-3)^2>0.$$

Отримана нерівність правильна при всіх дійсних значеннях *x*, крім 3. Отже, враховуючи ОДЗ даної нерівності, маємо: $x\in[2;3)\cup(3;4]$.

Відповідь: $x\in[2;3)\cup(3;4]$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень А

Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{x-1} < 2.$

А $(-\infty;5)$ **Б** $(-\infty;5]$ **В** $(1;5)$ **Г** $[1;5)$

2) $\sqrt{1-x} > -1.$

А $(0;\infty)$ **Б** $(-\infty;1)$ **В** $(-\infty;0)$ **Г** $(-\infty;1]$

3) $\sqrt{x-1} \le -1.$

А $\varnothing$ **Б** $[2;\infty)$ **В** $(-\infty;2]$ **Г** $[1;\infty)$

4) $\sqrt{x^2-15} \ge 1.$

А $(-4;4)$ **Б** $(-\infty;-4)\cup(4;\infty)$ **В** $(-\infty;-4]\cup[4;\infty)$ **Г** $[-4;4]$

5) $\sqrt{x^2+3x-4} > -2.$

А $(-\infty;-4]\cup[1;\infty)$ **Б** $[-4;1]$ **В** $(-\infty;-4)\cup(1;\infty)$ **Г** $(-4;1)$

6) $\sqrt{x^2+6x-4} \le -2.$

А $[-8;2]$ **Б** $(-\infty;-8]\cup[2;\infty)$ **В** $[-2;8]$ **Г** $\varnothing$

7) $\sqrt{2x+5} < \sqrt{4x+7}.$

А $\varnothing$ **Б** $[-2,5;-1]$ **В** $(-1;\infty)$ **Г** $(-2,5;\infty)$

8) $\sqrt{x^2-36} \ge \sqrt{2x-1}.$

А $[-5;7]$ **Б** $(-\infty;-5]\cup[7;\infty)$ **В** $[7;\infty)$ **Г** $(-\infty;-5]$

9) $\sqrt{x^2+x-12} > \sqrt{-3x}.$

А $(-\infty;-6)$ **Б** $(-\infty;-6)\cup(2;\infty)$ **В** $(-6;2)$ **Г** $(-6;\ 0]$

10) $\sqrt{2x^2-15x+8} \le \sqrt{x^2-7x+1}.$

А $[1;7]$ **Б** $\left[1;\dfrac{15-\sqrt{161}}{4}\right]\cup\left[\dfrac{15+\sqrt{161}}{4};7\right]$ **В** $(-\infty;1]\cup[7;\infty)$ **Г** $\varnothing$

Рівень Б

Розв'язати нерівності:

11) $x+\sqrt{x+1} \le 1.$

12) $2-\sqrt{x+18} \ge x.$

13) $\sqrt{x+2} > x+1$.

14) $\sqrt[6]{2x^3-6x^2-10x+4} > \sqrt[6]{x^3-5x^2-6x}$.

15) $\sqrt{3x+1} < 5-2x$.

16) $\sqrt{4x+1} \le 1-2x$.

17) $\sqrt{7x-3} > 3x-2$.

18) $\sqrt{5-2x} \ge 4x-1$.

19) $\sqrt{2-\sqrt{x}} > 1$.

20) $\sqrt{x-4} > x$.

Рівень В

Розв'язати нерівності:

21) $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$.

22) $\sqrt{3x+x^2} < 1-x$.

23) $\sqrt{x^2-5x+6} \le x+4$.

24) $\sqrt{x^2-5x-6} \ge 2-x$.

25) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4} \ge 2$.

26) $\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4} < 20$.

27) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+13} \le 6$.

28) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x} < 3$.

29) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}} < \sqrt{x+4}$.

30) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}-\sqrt{2x+4} > 0$.

3.3 Нерівності вигляду $f(x)\sqrt{g(x)} > 0,\ f(x)\sqrt{g(x)} < 0,$ $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0,\quad \dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0$

Кожна з таких нерівностей рівносильна системі раціональних нерівностей:

$$f(x)\sqrt{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$f(x)\sqrt{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ x \in D(f). \end{cases} \end{array}\right. \tag{2}$$

$$f(x)\sqrt{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \tag{3}$$

$$f(x)\sqrt{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ x \in D(f). \end{cases} \end{array}\right. \tag{4}$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \tag{6}$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \leq 0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \neq 0. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < 0. \end{cases} \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{g(x)}}{f(x)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) \ne 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad (12)$$

Приклади. Розв'язати нерівності:

1) $(x-10)\sqrt{x-4} \le 0$.

За рівносильністю (4) маємо:

$$(x-10)\sqrt{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-10 \le 0, \\ x-4 \ge 0, \end{cases} \\ x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 10, \\ x \ge 4, \end{cases} \\ x=4; \end{array}\right. \Leftrightarrow 4 \le x \le 10 .$$

Відповідь: $x \in [4;10]$.

2) $(x+10)\sqrt{x-4} \le 0$.

$\sqrt{x-4} \ge 0$ при $x \in$ ОДЗ, отже,

$$(x+10)\sqrt{x-4} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+10 \le 0, \\ x-4 \ge 0, \end{cases} \\ x-4=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -10, \\ x \ge 4, \end{cases} \\ x=4; \end{array}\right. \Rightarrow x=4.$$

Відповідь: 4 .

3) $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7} < 0$.

$\sqrt{x+4} \ge 0, \sqrt{x+7} \ge 0$ за умови існування цих радикалів, отже,

$$(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1<0, \\ x+4>0, \\ x+7>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ x>-4, \\ x>-7; \end{cases} \Rightarrow -4<x<-1.$$

Відповідь: $x \in (-4;-1)$.

4) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \ge 0$.

$$(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2 \ge 0, \\ (4-x)(5-x) \ge 0, \end{cases} \\ (4-x)(5-x)=0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -2, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 4, \\ x \ge 5, \end{array}\right. \end{cases} \\ x = 4,\ x = 5; \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 4, \\ x \ge 5. \end{cases}$$

Відповідь: $x \in [-2;4] \cup \left[5;\infty\right)$.

5) $(x^2 + 3x - 10)\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \ge 0$.

За рівносильністю (2) маємо:

$$(x^2 + 3x - 10)\sqrt{2x^2 + 5x + 2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 3x - 10 \ge 0, \\ 2x^2 + 5x + 2 \ge 0, \end{cases} \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2, \\ x \ge -0,5, \end{array}\right. \end{cases} \\ x = -2,\ x = -0,5; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -5, \\ x \ge 2, \\ x = -2, \\ x = -0,5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;-5] \cup \left\{-2;-0,5\right\} \cup [2;\infty)$.

6) $\dfrac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - x - 12}} < 0$.

За рівносильністю (7) маємо:

$$\frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 - x - 12}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 25 < 0, \\ x^2 - x - 12 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5, \\ x < -3, x > 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < x < -3, \\ 4 < x < 5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-5;-3) \cup (4;5)$.

7) $\dfrac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3} \ge 0$.

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3>0, \\ 17-15x-2x^2 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 17-15x-2x^2 = 0, \\ x+3 \ne 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-3, \\ -8,5 \le x \le 1, \end{cases} \\ x=-8,5,\ x=1; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3 < x \le 1, \\ x=-8,5. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in \{-8,5\} \cup (-3;\ 1]$.

ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень А

Розв'язати нерівності:

1) $(x-1)\sqrt{x} < 0$.

А $(-\infty;1)$ **Б** $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ **В** $[0;\infty)$ **Г** $(0;1)$

2) $(2-x)\sqrt{x+1} > 0$.

А $(-1;2)$ **Б** $(-\infty;2)$ **В** $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$ **Г** $[-1;\infty)$

3) $(2x-5)\sqrt{x} \le 0$.

А $(-\infty;2,5]$ **Б** $[2,5;\infty)$ **В** $[0;\ 2,5]$ **Г** $(0;\ 2,5]$

4) $x\sqrt{7-x} \ge 0$.

А $[0;\infty)$ **Б** $[0;\ 7]$ **В** $(-\infty;7]$ **Г** $[0;\ 7)$

5) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}(x-7) < 0$.

А $(1;\ 7)$ **Б** $[1;\ 7)$ **В** $(-\infty;7)$ **Г** $(-2;7)$

6) $(x-1)\sqrt{x+1} > 0$.

А $\varnothing$ **Б** $[1;\infty)$ **В** $[-1;1)$ **Г** $(1;\infty)$

7) $(x+1)\sqrt{x-1} > 0$.

А $\varnothing$ **Б** $(-1;1]$ **В** $(1;\infty)$ **Г** $[1;\infty)$

8) $(x-2)\sqrt{x+2} \le 0$.

А $(-\infty;\ 2]$ **Б** $[-2;\infty)$ **В** $[-2;\ 2]$ **Г** $[2;\infty)$

9) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-7}\left(x-1\right)>0$.

А $\left(1;\infty\right)$ **Б** $\left(7;\infty\right)$ **В** $\left(-2;\infty\right)$ **Г** $\left(1;7\right)$

10) $\sqrt{x+2}\sqrt{x-7}\left(x-1\right)<0$.

А $\varnothing$ **Б** $\left(-2;1\right)$ **В** $\left(-2;1\right)\cup\left(7;\infty\right)$ **Г** $\left(-\infty;1\right)$

Рівень Б

Знайти кількість цілих розв’язків нерівності:

11) $(x-5)\sqrt{9-x^2}\ge 0.$

12) $(x^2-10)\sqrt{x-2}\le 0.$

13) $(x^2-4x-8)\sqrt{x-1}<0.$

Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності:

14) $(5-x)\sqrt{x^2-4x+3}>0.$

15) $(x+11)\sqrt{x^2-x-2}<0.$

Рівень В

Розв’язати нерівності:

16) $\left(x-3\right)\sqrt{x^2+x-2}\ge 0.$

17) $\left(x-4\right)\sqrt{x^2-x-2}\ge 0.$

18) $\left(x-1\right)\sqrt{-x^2+x+6}\ge 0.$

19) $\dfrac{\sqrt{3+2x}}{2x^2-x-1}>0.$

20) $\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}}\le 0.$

21) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}}{6-x}\ge 0.$

22) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0.$

23) $\dfrac{\sqrt{x^2-30x+225}}{x+5}>0.$

24) $\sqrt{x^2-2x+1}(3+2x-x^2)\le 0.$

25) $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}}\ge 0.$

3.4. Розв’язання ірраціональних нерівностей методом заміни

Введення нової змінної, відносно якої нерівність має більш простий вигляд – один з важливих методів розв’язання нерівностей. При розв’язанні ірраціональних нерівностей частіше за все трапляються задачі, в яких виконується заміна

$t=\sqrt{ax^2+bx+c}$, або $t=ax^2+bx+c$.

Приклади.

Розв’язати нерівності:

1) $-9\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}+18\ge 0$.

ОДЗ: $x\ge 0.$

Введемо заміну $\sqrt[4]{x}=t$, $t\ge 0$ і розв’яжемо квадратну нерівність $t^2-9t+18\ge 0$. Враховуючи умову $t\ge 0$, отримаємо сукупність $\left[\begin{array}{l}0\le t\le 3,\\ t\ge 6.\end{array}\right.$

Повертаючись до змінної *x*, маємо $\left[\begin{array}{l}0\le \sqrt[4]{x}\le 3,\\ \sqrt[4]{x}\ge 6;\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0\le x\le 81,\\ x\ge 1296.\end{array}\right.$

Відповідь: $x\in[0;\,81]\cup[1296;\,\infty)$.

2) $\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{4x}}>\dfrac{3}{2}.$

Введемо заміну $\sqrt{\dfrac{4x}{x-1}}=t$, $t>0$, тоді отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases}t>0,\\ t-\dfrac{1}{t}>\dfrac{3}{2};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t>0,\\ 2t^2-3t-2>0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t>0,\\ \left[\begin{array}{l}t<-\dfrac{1}{2},\\ t>2;\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow t>2.$$

Повертаючись до змінної x, маємо:

$$\sqrt{\frac{4x}{x-1}} > 2 \Leftrightarrow \frac{4x}{x-1} > 4 \Leftrightarrow \frac{4x}{x-1} - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Відповідь: $x \in (1;\infty)$.

3) $\sqrt{x^2-5x+4} + \sqrt{x^2-5x+20} \geq 4$.

Нехай $x^2-5x+4=t$, $t \geq 0$. Тоді $x^2-5x+20=t+16$. Дана нерівність набуває вигляду $\sqrt{t}+\sqrt{t+16} \geq 4$.

За умови $t \geq 0$ виконуються нерівності: $\sqrt{t} \geq 0$ та $\sqrt{t+16} \geq 4$. Отже, при $t \geq 0$ ліва частина нерівності більша або дорівнює 4, тобто усі розв'язки цієї нерівності – $t \geq 0$.

Вертаючись до невідомого x, маємо:

$$x^2-5x+4 \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x \in (-\infty;1] \cup [4;\infty)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівень В

Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{x+2} - \dfrac{4}{\sqrt{x+2}} \leq 3.$

2) $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2.$

3) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < 1,5.$

4) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}} \geq \dfrac{7}{12}.$

5) $x^2 + \sqrt{x^2+11} < 31.$

6) $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 \leq 3x+7.$

7) $\sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-x+14} > 6.$

8) $\sqrt{3x^2+5x+7}+\sqrt{3x^2+5x+2}>1.$

9) $\sqrt{x^2-2x-2}+\sqrt{x^2-2x+6}<4.$

10) $\sqrt{x}-6\sqrt[4]{x}+5\geq 0.$

Перевірний тест 2

Варіант 1

Рівень А

1. Розв’язати нерівність $\sqrt{2-x}>-2.$

А $(0;\infty)$ **Б** $(-\infty;2)$ **В** $(-\infty;0)$ **Г** $(-\infty;2]$ **Д** $(-\infty;-2)$

2. Розв’язати нерівність $\sqrt{2+x}<-2.$

А $(-\infty;2)$ **Б** $(-\infty;2]$ **В** $(-\infty;4)$ **Г** $[2;\infty)$ **Д** $\varnothing$

3. Знайти найменший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{x+2}>5.$

А 27 **Б** 28 **В** 24 **Г** 23 **Д** 4

4. Знайти кількість натуральних розв’язків нерівності $\sqrt{x-3}<2.$

А 7 **Б** 6 **В** 4 **Г** 5 **Д** 3

5. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}.$

А 2 **Б** 3 **В** безліч **Г** жодного **Д** 1

6. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $\sqrt{2x-8}<\sqrt{7-x}.$

А безліч **Б** 0 **В** 1 **Г** 2 **Д** 3

7. Розв’язати нерівність $(x-1)\sqrt{x}<0.$

А $(-\infty;1)$ **Б** $(-\infty;0)\cup(1;\infty)$ **В** $[0;\infty)$ **Г** $(0;1)$ **Д** $[0;1)$

8. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $(2-x)\sqrt{x+1}>0.$

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3 **Д** 4

9. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності $\dfrac{\sqrt{1-x}}{2x-5}<0.$

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** 3 **Д** не існує

10. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{x+5}{\sqrt{2x-1}} \geq 0$.

А –5 **Б** 1 **В** 5 **Г** –1 **Д** 0

Рівень Б

11. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+1} < 1-2x$.

12. Знайти кількість натуральних розв'язків нерівності $\sqrt{x+18} \geq x-2$.

13. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2+x-2} \leq 0$.

14. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{2x^2-3x-5} \leq x-1$.

15. Знайти найменший натуральний розв'язок нерівності $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

Рівень В

16. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1} > 8$.

17. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x-6}-\sqrt{9-x} \leq 1$.

Варіант 2

Рівень А

1. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+3} > -3$.

А $(-\infty;\infty)$ **Б** (6;8) **В** $(-3;\infty)$ **Г** $[-3;\infty)$ **Д** $(-\infty;-3]$

2. Розв'язати нерівність $\sqrt{3-x} < -3$.

А $(-6;\infty)$ **Б** $(-\infty;-6)$ **В** $[3;\infty)$ **Г** $(-\infty;3]$ **Д** $\varnothing$

3. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\sqrt{x+5} < 2$.

А 3 **Б** 4 **В** 5 **Г** жодного **Д** безліч

4. Знайти найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x-5} > 2$.

А 9 **Б** 5 **В** 10 **Г** 0 **Д** 6

5. Знайти кількість натуральних розв'язків
$\sqrt{4x-7} < \sqrt{5-x}$.

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** жодного **Д** безліч

6. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності
$\sqrt{x+9} > \sqrt{5x-10}$.

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** жодного **Д** безліч

7. Розв’язати нерівність $(x+2)\sqrt{x} > 0.$

А $(-2;\infty)$ **Б** $(-\infty;-2)$ **В** $(-\infty;0)$ **Г** $(-2;0)$ **Д** $(0;\infty)$

8. Знайти найменший цілий розв’язок нерівності $(5-x)\sqrt{x-4} < 0.$

А 3 **Б** 4 **В** 5 **Г** 6 **Д** не існує

9. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $\frac{x-4}{\sqrt{5x-1}} < 0.$

А безліч **Б** 4 **В** 3 **Г** 2 **Д** 0

10. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності $\frac{\sqrt{1-x}}{6-5x} \geq 0.$

А $\frac{6}{5}$ **Б** 1 **В** 0 **Г** -1 **Д** не існує

Рівень Б

11. Знайти найменший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{7+x} > 7-2x.$

12. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $\sqrt{2x+2} \leq 3-x.$

13. Знайти кількість натуральних розв’язків нерівності $(x^2-9)\sqrt{16-x^2} \geq 0.$

14. Знайти найбільший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x.$

15. Знайти найменший натуральний розв’язок нерівності $\sqrt{x^2-3x} \geq 5-x.$

Рівень В

16. Знайти найменший цілий розв’язок нерівності $\sqrt{x+8}-\sqrt{x-4} \geq 2.$

17. Знайти кількість цілих розв’язків нерівності $\sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$

Розділ 4

СИСТЕМИ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

4.1. Системи ірраціональних рівнянь

Існують різні способи розв'язання систем ірраціональних рівнянь. Найбільш поширеним є заміна, яка приводить розв'язання системи ірраціональних рівнянь до розв'язання еквівалентної системи раціональних рівнянь.

Приклади. Розв'язати системи рівнянь:

1) $$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ x - y = 56. \end{cases} \qquad (1)$$

ОДЗ: $x \in R, y \in R$.

Виконуємо заміну

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = t, \\ \sqrt[3]{y} = s; \end{cases} \text{ отже, } \begin{cases} x = t^3, \\ y = s^3. \end{cases}$$

Таким чином, даній системі ірраціональних рівнянь (1) еквівалентна система раціональних рівнянь (2):

$$\begin{cases} t - s = 2, \\ t^3 - s^3 = 56. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язками цієї системи є

$$\begin{cases} s = -4, \\ t = -2; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} s = 2, \\ t = 4. \end{cases}$$

Тоді: $$\begin{cases} \sqrt[3]{x} = -2, \\ \sqrt[3]{y} = -4; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 4, \\ \sqrt[3]{y} = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -8, \\ y = -64; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 64, \\ y = 8. \end{cases}$$

Відповідь: $(-8,-64); (64;8)$.

У процесі розв'язання були виконані тільки рівносильні перетворення.

2) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=2, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8. \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ x-y\geq 0. \end{cases}$

Виконуємо заміну

$$\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=t,\ t\geq 0, \\ \sqrt[4]{x-y}=s,\ s\geq 0. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} t-s=2, \\ t^2-s^2=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-s=2, \\ (t-s)(t+s)=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-s=2, \\ t+s=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3, \\ s=1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}=3, \\ \sqrt[4]{x-y}=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=81, \\ x-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=41, \\ y=40. \end{cases}$

Перевіримо, чи задовольняють знайдені корені умови ОДЗ:

$$\begin{cases} 41+40>0, \\ 41-40>0. \end{cases}$$

Отже, пара чисел (41; 40) є розв'язком даної системи ірраціональних рівнянь.

Відповідь: (41; 40).

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=2,5, \\ xy-x-y=9. \end{cases}$ (3)

ОДЗ: $6x(x+y)>0.$

Розв'яжемо перше рівняння системи (3). Позначимо $\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=t,\ t>0.$ Тоді: $t+\dfrac{1}{t}=2,5.$

Коренями цього рівняння є $t_1=2,\ t_2=0,5.$

Тоді: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=2, \\ xy-x-y=9; \end{cases}$ або $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=\dfrac{1}{2}, \\ xy-x-y=9. \end{cases}$

Після низки рівносильних перетворень отримуємо:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ xy - x - y = 9; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y = 23x, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

Розв'язками системи цих рівнянь є пари чисел $(6;3)$; $(-3;-1,5)$; $\left(\dfrac{12 \pm \sqrt{351}}{23}; 12 \pm \sqrt{351}\right)$.

Відповідь: $(6;3);(-3;-1,5);\left(\dfrac{12 \pm \sqrt{351}}{23};12 \pm \sqrt{351}\right)$.

4) $\begin{cases} x - y + \sqrt{xy} = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 2. \end{cases}$ (4)

ОДЗ: $xy \geq 0$.

Заміна: $\begin{cases} x - y = t, \\ \sqrt{xy} = s,\ s \geq 0. \end{cases}$

Тоді: $\begin{cases} t + s = 5, \\ t^2 + 3s^2 = 21. \end{cases}$

Розв'яжемо отриману систему методом підстановки:

$$\begin{cases} t = 5 - s, \\ (5 - s)^2 + 3s^2 = 21. \end{cases}$$

Розв'язками є $\begin{cases} s = 2, \\ t = 3; \end{cases}$ та $\begin{cases} s = 0,5, \\ t = 4,5. \end{cases}$

Далі маємо дві системи, які розв'язуємо також методом підстановки:

$\begin{cases} x - y = 3, \\ \sqrt{xy} = 2; \end{cases}$ та $\begin{cases} x - y = 4,5, \\ \sqrt{xy} = 0,5; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 3 + y, \\ y(3 + y) = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4,5 + y, \\ y(4,5 + y) = 0,25; \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\ y=4,\end{cases}\\ \begin{cases}x=4,\\ y=1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{9+\sqrt{85}}{4},\\ y=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4},\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{9-\sqrt{85}}{4},\\ y=\dfrac{-9-\sqrt{85}}{4}.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відповідь: $(-1;-4)$; $(4;1)$; $\left(\dfrac{9\pm\sqrt{85}}{4};\dfrac{-9\pm\sqrt{85}}{4}\right)$.

5) $$\begin{cases}9x^2+2y+\sqrt{9x^2+2y+1}=1,\\ 6x+2y=-3.\end{cases} \tag{5}$$

ОДЗ: $9x^2+2y+1\geq 0$.

Розглянемо перше рівняння системи (5). Перепишемо його у вигляді:

$$9x^2+2y+1+\sqrt{9x^2+2y+1}-2=0.$$

Виконуємо заміну: $\sqrt{9x^2+2y+1}=t,\ t\geq 0$.

Маємо: $t^2+t-2=0,\ t_1=-2,\ t_2=1$.

Корінь $t_1=-2$ не відповідає вимозі $t\geq 0$, отже:

$$\sqrt{9x^2+2y+1}=1.$$

Тоді: $\begin{cases}\sqrt{9x^2+2y+1}=1,\\ 6x+2y=-3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x^2+2y+1=1,\\ 6x+2y=-3;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}9x^2+2y=0,\\ 6x+2y=-3.\end{cases}$

Віднімаємо від першого рівняння друге:

$$\begin{cases}9x^2-6x-3=0,\\ 6x+2y=-3.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases}x=1,\\ y=-4,5;\end{cases}$ або $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\ y=-0,5.\end{cases}$

Відповідь: $(1;-4,5);\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$.

6) $\begin{cases} x+y-\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{12}{x-y}, \\ xy=15. \end{cases}$ (6)

ОДЗ: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}\geq 0, \\ x-y\neq 0; \end{cases}$ отже $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y\geq 0, \\ x-y>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+y\leq 0, \\ x-y<0. \end{cases} \end{array}\right.$

Розглянемо перше рівняння системи (6). Домножимо обидві частини рівняння на $(x-y)$.

$(x+y)(x-y)-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=12$.

Внесемо $(x-y)$ під знак кореня.

1) Якщо $x-y<0$ і $x+y\geq 0$, то

$(x+y)(x-y)+\sqrt{(x-y)(x+y)}-12=0.$

Тобто: $\begin{cases} x-y<0, \\ x+y\leq 0, \\ x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}-12=0; \end{cases}$

Заміна: $\sqrt{x^2-y^2}=t,\ t\geq 0$.

$t^2+t-12=0.$

Розв’язками цього рівняння є числа -4 і 3. Але -4 не задовольняє умову $t\geq 0$.

Тоді: $\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=3, \\ xy=15, \\ x-y<0, \\ x+y\leq 0. \end{cases}$

Маємо: $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}+18}, \\ y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}-18}; \end{cases}$ та $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}+18}, \\ y=\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}-18}. \end{cases}$

Перевірка показує, що друга пара розв'язків не задовольняє умову $\begin{cases} x-y<0, \\ x+y\le 0. \end{cases}$

2) Якщо $x-y>0$ і $x+y\ge 0$, то:

$(x+y)(x-y)-\sqrt{(x-y)(x+y)}-12=0.$

Тобто: $\begin{cases} x-y>0, \\ x+y\ge 0, \\ x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}-12=0. \end{cases}$

Заміна: $\sqrt{x^2-y^2}=t,\ t\ge 0$.

$t^2-t-12=0$.

Коренями цього рівняння є числа -3 і 4. Але -3 не задовольняє умову $t\ge 0$.

Тоді: $\begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=4, \\ xy=15, \\ x-y>0, \\ x+y\ge 0. \end{cases}$

Розв'язки $\begin{cases} x=5, \\ y=3; \end{cases}$ та $\begin{cases} x=-5, \\ y=-3 \end{cases}$ повинні задовольняти умови $x-y>0$ та $x+y\le 0$. Очевидно, що $x=-5$ та $y=-3$ не задовольняють ці умови.

Відповідь: $(5;\ 3);\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}+18};-\dfrac{1}{2}\sqrt{6\sqrt{109}-18}\right).$

ЗАВДАННЯ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Завдання з вибором правильної відповіді

Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ x + y = 26. \end{cases}$

А $(-27;1)$; $(1;-27)$ **Б** $(27;-1)$; $(-1;27)$ **В** $(-1;-27)$; $(1;27)$ **Г** інша відповідь

2) $\begin{cases} 3\sqrt{3x^2 - 2y + 3} = 15 - 3x^2 + 2y, \\ 3y - 2x - 5 = 0. \end{cases}$

А $(-2;-3)$; $\left(\frac{14}{9};-\frac{17}{27}\right)$ **Б** $(-1;-2)$; $(2;7)$ **В** $(2;3)$; $\left(-\frac{14}{9};\frac{17}{27}\right)$

Г інша відповідь

3) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y} + \sqrt[4]{x-y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 12. \end{cases}$

А $(\sqrt[4]{4};\sqrt[4]{2})$ **Б** $(136;120)$ **В** $(-7;15)$ **Г** інша відповідь

4) $\begin{cases} 16x + y + 8\sqrt{xy} = 81, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$

А $(4;1)$ **Б** $(1;-4)$ **В** $(-1;-4)$ **Г** інша відповідь

5) $\begin{cases} x + \sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{2}{y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$

А $(-4;-1)$; $\left(\frac{-3+\sqrt{13}}{2};\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$ **Б** $(4;1)$; $\left(\frac{-3-\sqrt{13}}{2};\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)$

В $(4;1)$; $(-4;-1)$ **Г** інша відповідь

Завдання з короткою відповіддю

6) Знайти добуток $x_0 \cdot y_0$, де x_0 та y_0 – розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 12. \end{cases}$$

7) Знайти суму $(x_i + y_i)$, де x_i, y_i – розв'язки системи рівнянь
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = \dfrac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x + y = 13. \end{cases}$$

8) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^3}{y}} - \sqrt{\dfrac{y^3}{x}} = \dfrac{65}{6}, \\ x - y = 5. \end{cases}$

Завдання з розгорнутою відповіддю

Розв'язати системи рівнянь:

10) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+y}{x-y}} - \sqrt[3]{\dfrac{x-y}{x+y}} = \dfrac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 32. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y+1}{x-y}} + 2\sqrt{\dfrac{x-y}{y+1}} = 3, \\ x + xy + y = 7. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 14, \\ y^2 + x\sqrt{xy} = -7. \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 84, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 28. \end{cases}$

14) $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=7, \\ x^2+y^2+xy=133. \end{cases}$

15) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+25}+\sqrt[3]{y+7}=4, \\ x+2y=5. \end{cases}$

16) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+25}+\sqrt[3]{y+7}=5, \\ x+y=3. \end{cases}$

17) $\begin{cases} x-y+3,5(\sqrt[3]{xy^2}-\sqrt[3]{x^2y})=0, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3. \end{cases}$

18) $\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=\dfrac{17}{4}, \\ x(x+y)+\sqrt{x^2+xy+4}=52. \end{cases}$

4.2. Системи ірраціональних нерівностей з однією невідомою

Системою нерівностей з однією невідомою називається декілька нерівностей, в яких під однією і тією ж буквою, яка позначає невідому, мається на увазі та сама величина.

Будь-яке значення невідомої, що задовольняє одночасно всі нерівності, називається розв'язком цієї системи.

Розв'язати систему нерівностей з однією невідомою – означає знайти множину всіх її розв'язків, або показати, що система розв'язків не має.

Приклади

1) Розв'язати систему нерівностей: $\begin{cases} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}<4, \\ \sqrt{\dfrac{3x-4}{8-x}}>1. \end{cases}$ (1)

ОДЗ: $\begin{cases} x+5\ge 0, \\ x-3\ge 0, \\ \dfrac{3x-4}{8-x}\ge 0, \\ 8-x\ne 0. \end{cases}$

Отже: $x \in [3;8)$.

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} < 4 + \sqrt{x-3}, \\ \dfrac{3x-4}{8-x} > 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 < 16 + 8\sqrt{x-3} + x - 3, \\ \dfrac{3x-4-8+x}{8-x} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt{x-3} > -8, \\ \dfrac{4x-12}{x-8} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} > -1, \\ \dfrac{x-3}{x-8} < 0. \end{cases}$$

Перша нерівність виконується для всіх x, що задовольняють ОДЗ. Розв'яжемо другу нерівність (рис. 4.1).

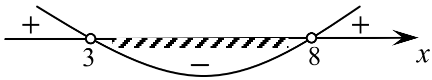


Рис. 4.1

Отже, $x \in (3;8)$.

Відповідь: $x \in (3;8)$.

2) Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} > 1 - x, \\ \sqrt{x^2 - 25} \cdot \sqrt{25 - x^2} \geq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 25 \geq 0, \\ 25 - x^2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = 5; -5.$$

Перевіркою встановлюємо, що обидва значення є розв'язками даної системи нерівностей.

Отже, сума цілочислових розв'язків системи нерівностей (2) дорівнює 0.

Відповідь: 0.

3) Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} < \dfrac{3}{2}, \\ \sqrt[3]{x+5} \geq \sqrt[3]{x^2 - 1}. \end{cases} \qquad (3)$$

ОДЗ: $x \in (-\infty;-1) \cup (1;\infty)$.

Розглянемо першу нерівність системи.

Зробимо заміну $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t,\ t>0,$

$t-\dfrac{1}{t}<\dfrac{3}{2},$

$\dfrac{2t^2-2-3t}{t}<0.$

Розв'язки зображено на рис. 4.2.

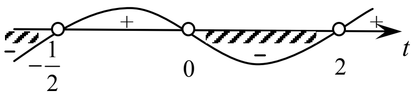


Рис. 4.2

але, оскільки $t>0$, то

$0<t<2.$

Отже: $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<2,$

$\dfrac{x+1}{x-1}<4,$

$\dfrac{3x-5}{x-1}>0$ (рис. 4.3).

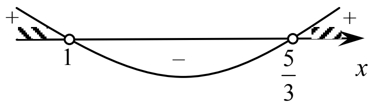


Рис. 4.3

Враховуючи умови ОДЗ:

$x\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{3};\infty\right).$

Розв'яжемо другу нерівність (рис. 4.4).

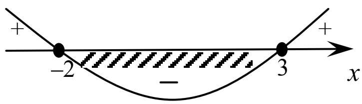


Рис. 4.4

$x+5 \ge x^2-1$,

$x^2-x-6 \le 0$,

$x \in [-2;3]$.

Знайдемо спільний розв’язок (рис. 4.5):

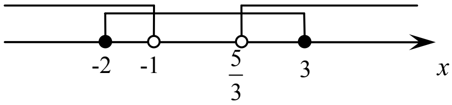


Рис. 4.5

Звідси $x \in [-2;1) \cup \left(\dfrac{5}{3};3\right]$ – множина розв’язків даної системи нерівностей.

Відповідь: $x \in [-2;1) \cup (\dfrac{5}{3};3]$.

4) $\begin{cases} \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5}, \\ (3x-8)\sqrt{9-x^2} \ge 0. \end{cases}$

ОДЗ: $x \in [2,5;3]$.

Розв’яжемо першу нерівність системи:

$x+6 > x+1+2x-5+2\sqrt{(x+1)(2x-5)}$,

$10-2x > 2\sqrt{2x^2-3x-5}$,

$\sqrt{2x^2-3x-5} < 5-x$.

Остання нерівність рівносильна наступній системі нерівностей (рис. 4.6):

$\begin{cases} 2x^2-3x-5 < 25-10x+x^2, \\ 5-x > 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+7x-30 < 0, \\ x < 5. \end{cases}$

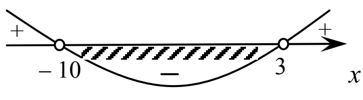


Рис. 4.6

Отже, враховуючи умови ОДЗ, $x \in [2,5;3)$.

Розв'яжемо другу нерівність:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-8\ge 0,\\ 9-x^2\ge 0,\end{cases}\\ 9-x^2=0.\end{array}\right.$$

Її розв'язком є $x\in\{-3\}\cup\left[2\frac{2}{3};3\right]$, але, враховуючи умови ОДЗ: $x\in\left[2\frac{2}{3};3\right]$.

Відповідь: $x\in\left[2\frac{2}{3};3\right]$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Завдання з вибором правильної відповіді

Указати, якому з проміжків належать усі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases}\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}>0,\\ \sqrt{(x-1)(x+3)}\cdot\sqrt{1-x^2}\ge 0.\end{cases}$

А $(0;2)$ **Б** $(1;\infty)$ **В** $(-\infty;-3)$ **Г** $(-\infty;1)$

2) $\begin{cases}\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{2}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x},\\ \sqrt{x-2}\sqrt{4-x^2}\le 0.\end{cases}$

А $(-\infty;-2)$ **Б** $(-2;2)$ **В** $(-2;\infty)$ **Г** $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$

3) $\begin{cases}\sqrt{x^4+3x^2+8}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\ge 5,\\ \sqrt{x^2+x-6}\sqrt{4-x}\ge 0.\end{cases}$

А $(-\infty;-2)$ **Б** $[-2;2)$ **В** $(-\infty;2)$ **Г** $(1;3]$

4) $\begin{cases}\sqrt{x^3-x^2}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{5+x}}<6,\\ \sqrt{x^2+2x-15}\sqrt{9-x^2}\le 0.\end{cases}$

А $(-5;3)$ **Б** $(1;3)$ **В** $(-5;5)$ **Г** $(-3;3)$

5. Знайти цілочисловий розв'язок системи нерівностей, якщо він один, або суму цілочислових розв'язків, якщо їх кілька:

$$\begin{cases} \sqrt{x^4-4} > 3-x, \\ \sqrt{x^2-4}\sqrt{4-x^2} \geq 0. \end{cases}$$

А $(-5;3)$ **Б** $(1;3)$ **В** $(-5;5)$ **Г** $(-3;3)$

Завдання з короткою відповіддю

Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей:

6) $\begin{cases} \sqrt{x+24} > \sqrt{x+4} + \sqrt{2x-20}, \\ \sqrt{\dfrac{x+5}{15-x}} > 1. \end{cases}$

А 2 **Б** -2 **В** 0 **Г** 4

Знайти цілі розв'язки системи нерівностей:

7) $\begin{cases} \sqrt{8+x(2-x)} + \sqrt{-x^2+8x-7} \geq 3, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} < \dfrac{1}{5-x}. \end{cases}$

Знайти суму цілих розв'язків системи нерівностей:

8) $\begin{cases} \sqrt{32x+48} < x+9, \\ \sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} < 6. \end{cases}$

Знайти найбільший цілий розв'язок системи нерівностей:

9) $\begin{cases} \sqrt{11-2x} < x-6, \\ \sqrt{17+x} + \sqrt{17-x} < 8. \end{cases}$

Завдання з розгорнутою відповіддю

Розв'язати систему нерівностей:

10) $\begin{cases} \sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x, \\ \sqrt[3]{3x^2-12x+3} > \sqrt[3]{10x-x^2-60}. \end{cases}$

11) $\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$

12) $\begin{cases} \sqrt{32x+48} < x+9, \\ \sqrt{10+x} + \sqrt{10-x} < 6. \end{cases}$

Розділ 5

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ З ПАРАМЕТРОМ

5.1. Задачі з параметром, які розв'язуються графічно

Приклад 1

Визначити кількість розв'язків системи залежно від значень параметра *a*:

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{a^2 - 2})^2 = a^2 - 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

ОДЗ: $\begin{cases} a^2 - 1 \geq 0, \\ a^2 - 2 \geq 0. \end{cases}$

Отже, $a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \infty)$.

Зображенням першого рівняння системи є коло з центром у точці $A\left(0; \sqrt{a^2 - 2}\right)$ і радіусом $r = \sqrt{a^2 - 1}$.

Друге рівняння являє собою рівняння осі *OX*. Тому задача звелась до визначення кількості спільних точок кола та осі *OX* залежно від значення *a*. Оскільки $\sqrt{a^2 - 2} \geq 0$, то центр кола завжди лежить на осі ординат і має додатну ординату.

Оскільки $r = \sqrt{a^2 - 1}$ більше за $\sqrt{a^2 - 2}$, то правильним є розміщення, зображене на рис. 5.1.

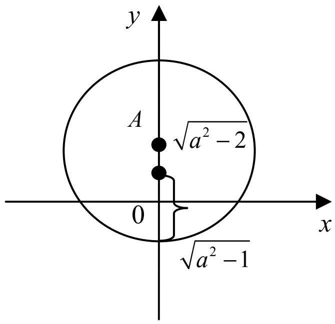


Рис. 5.1

Отже, при всіх $a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ система рівнянь матиме два розв'язки.

Якщо $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, система розв'язків не має.

Відповідь: при $a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ система матиме два розв'язки, при $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ система розв'язків не має.

Приклад 2

Знайти *a*, при яких розв'язки нерівності $\sqrt{16 - x^2} \geq -a^2 x$ утворюють інтервал довжини $\frac{17}{3}$. Знайти цей інтервал.

Розв'язання

ОДЗ: $x \in [-4; 4]$.

Застосуємо графічний метод. Розв'язком даної нерівності є ті значення x, при яких графік функції $y = \sqrt{16 - x^2}$, розміщений над графіком прямої $y = -a^2 x$ або перетинає цю пряму. Графік функції $y = \sqrt{16 - x^2}$ – півколо радіусом 4 з центром у початку координат (рис. 5.2), оскільки:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Графік функції $y = a^2 x$ – пряма, причому якщо $a = 0$, то ця пряма збігається з віссю Ox, якщо $a \neq 0$, то пряма розміщена у другій та четвертій координатних чвертях.

З рис. 5.2 видно, що розв'язки даної нерівності утворюють відрізок BC.

За умовою $BC = \frac{17}{3}$, отже, $BO = \frac{17}{3} - R = \frac{17}{3} - 4 = \frac{5}{3}$.

Тоді точка $B\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$, а $x \in \left[-\frac{5}{3}; 3\right]$.

Точка А – спільна точка прямої та півкола. Тоді $x_A = x_B$ і

$$y_A = \sqrt{16 - \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{119}{9}} = \frac{\sqrt{119}}{3}.$$

З другого боку, $y_A = -a^2\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}a^2$. Отже, $\frac{5}{3}a^2 = \frac{\sqrt{119}}{3}$, $a = \pm\sqrt[4]{\frac{119}{25}}$.

Відповідь: при $a = \pm\sqrt[4]{\frac{119}{25}}$, $x \in \left[-\frac{5}{3};3\right]$.

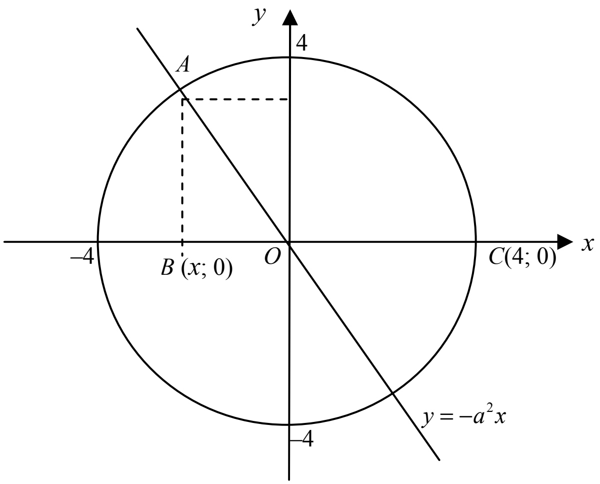


Рис. 5.2

Приклад 3

Визначити кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} y = a + \sqrt{x}, \\ 2x + y - 1 = 0; \end{cases}$ залежно від значень параметра *a*.

Розв'язання

Графік першого рівняння можна одержати з графіка функції $y = \sqrt{x}$ паралельним перенесенням уздовж осі OY відповідно до значень параметра *a*.

Графіком другого рівняння є пряма $y = 1 - 2x$ (рис. 5.3).

З рис. 5.3 видно, що дана система рівнянь має один розв'язок, якщо $a \le 1$; не має розв'язків, якщо $a > 1$.

Відповідь: при $a \in (-\infty;1]$ система має один розв'язок, при $a \in (1;+\infty)$ система розв'язків не має.

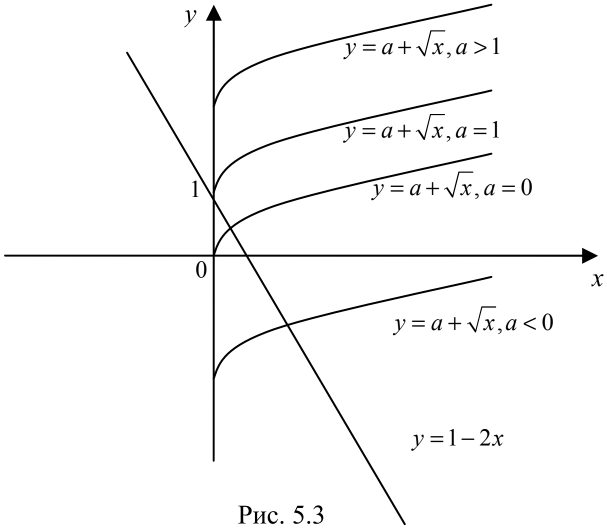


Рис. 5.3

Приклад 4

Визначити кількість розв'язків рівняння $\left|1-\sqrt{|x-2|}\right|=a$ залежно від значень a.

Розв'язання

Кількість розв'язків даного рівняння дорівнює кількості спільних точок графіків функцій $y=\left|1-\sqrt{|x-2|}\right|$ і $y=a$ (рис. 5.4).

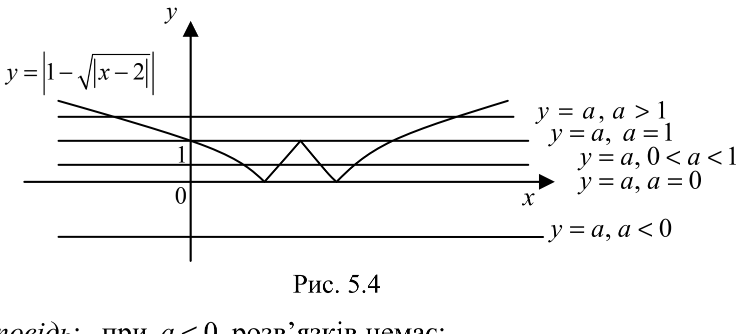


Рис. 5.4

Відповідь: при $a<0$ розв'язків немає;
при $a=0$ та $a>1$ – два розв'язки;
при $0<a<1$ – 4 розв'язки;
при $a=1$ – 3 розв'язки.

5.2. Використання аналітичних методів при розв'язанні задач з параметрами

Приклад 1

При яких значеннях параметра a рівняння

$$(\sqrt{x}-a)\left(x-\frac{2}{x}\right)=0 \qquad (1)$$

має єдиний розв'язок?

Розв'язання

ОДЗ: $x>0$.

$$(1)\ \left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=a,\\ x-\dfrac{2}{x}=0.\end{array}\right.$$

Розв'язками другого рівняння є $x=\sqrt{2}$ і $x=-\sqrt{2}$, але $-\sqrt{2}<0$, отже, $x=\sqrt{2}$.

Це означає, що незалежно від значень параметра коренем рівняння (1) є $x=\sqrt{2}$. Тоді перше рівняння сукупності не повинно мати розв'язків взагалі, або розв'язок повинний збігатися з коренем другого рівняння.

Тобто, або $a\le 0$, або $a=\sqrt[4]{2}$.

Відповідь: $a\in(-\infty;0]\cup\{\sqrt[4]{2}\}$.

Приклад 2

Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x+1)-2)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значень параметра a?

Розв'язання

$$(\log_2(x+1)-2)\sqrt{x-a}=0. \qquad (2)$$

За умови $\begin{cases}x>-1,\\ x\ge a\end{cases}$ рівняння (2) рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(x+1)=2,\\ x-a=0.\end{array}\right.$$

Тоді $\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=a.\end{array}\right.$

Якщо $a > 3$, то рівняння (2) має один розв'язок $x = a$; якщо $a = 3$, то розв'язком рівняння є $x = 3$; якщо $-1 < a < 3$, то рівняння матиме два розв'язки $x = a$ та $x = 3$; якщо $a \le -1$, то розв'язком буде лише $x = 3$.

Відповідь: при $a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ – один розв'язок; при $a \in (-1; 3)$ – два розв'язки.

Приклад 3

Знайти найменше ціле значення параметра *a*, при якому рівняння $\sqrt{x^2 + 5} = a - 1$ має хоча б один корінь.

Розв'язання

Зазначимо, що $a - 1 \ge 0$, тобто $a \ge 1$, і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$x^2 + 5 = a^2 - 2a + 1,$$

$$x^2 = a^2 - 2a - 4.$$

Для того щоб це рівняння мало розв'язки, права частина повинна бути невід'ємною:

$$a^2 - 2a - 4 \ge 0 \text{ (рис. 5.5).}$$

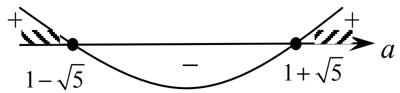


Рис. 5.5

Враховуючи, що $a \ge 1$, маємо: $a \in [1 + \sqrt{5}; +\infty)$. Найменшим цілим числом, яке належить даному інтервалу, є 4.

Відповідь: $a = 4$.

Приклад 4

При якому найбільшому цілому значенні параметра *a*, рівняння $\sqrt{5 - 17x} = \dfrac{a + 6}{4 - a}$ має розв'язки?

Розв'язання. Це рівняння матиме розв'язки, якщо його права частина буде невід'ємною.

Отже: $\dfrac{a + 6}{4 - a} \ge 0$ (рис. 5.6).

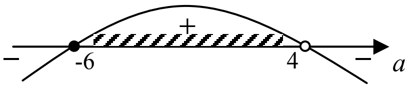


Рис. 5.6

$a \in [-6; 4)$

Відповідь: 3.

Приклад 5

Обчисліть середнє арифметичне всіх значень *a*, при яких нерівність $\sqrt{5x-3} + \sqrt{a^2 + 5a + 1,44} \le 0$ має розв'язки.

Розв'язання

Ліва частина нерівності являє собою суму двох невід'ємних величин. Отже, ця сума від'ємною бути не може, а може дорівнювати нулю за умови, що обидва доданки дорівнюють нулю.

Отже: $\begin{cases} 5x - 3 = 0, \\ a^2 + 5a + 1,44 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} a_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{\dfrac{481}{5}}}{2}, \\ a_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{\dfrac{481}{5}}}{2}. \end{array} \right. \end{cases}$$

$\dfrac{a_1 + a_2}{2} = -2,5$.

Відповідь: $-2,5$.

Приклад 6

Знайти всі значення параметра *a*, для яких області визначення $D(f)$ та $D(g)$ функцій

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 4ax + 4a^2 + 3}{x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1}}$$

та $g(x) = \sqrt{\dfrac{3a^2 - 8a + 4 - x^2 - 2ax}{x^2 - 6ax + 9a^2 + 1}}$

мають хоча б одну спільну точку.

Розв'язання

Знайдемо $D(f)$:

$$\begin{cases}\left(x^2-4ax+4a^2+3\right)\cdot\left(x^2+4ax+3a^2-2a-1\right)\geq 0,\\ x^2+4ax+3a^2-2a-1\neq 0.\end{cases}$$

Виділимо повні квадрати в чисельнику та знаменнику:

$$\frac{(x-2a)^2+3}{(x+2a)^2-(a^2+2a+1)}\geq 0.$$

Чисельник цього дробу завжди додатний.

Отже, $(x+2a)^2-(a+1)^2>0$,

$(x+2a-a-1)(x+2a+a+1)>0$,

$(x+a-1)(x+3a+1)>0.$

Тоді, якщо $-a+1<-3a-1$, тобто $a<-1$, то $x\in(-\infty;-a+1)\cup(-3a-1;+\infty)$; якщо $a>-1$, то $x\in(-\infty;-3a-1)\cup(-a+1;+\infty)$; якщо $a=-1$, то $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$.

Знайдемо $D(g)$.

$$\begin{cases}\left(3a^2-8a+4-x^2-2ax\right)\cdot\left(x^2-6ax+9a^2+1\right)\geq 0,\\ x^2-6ax+9a^2+1\neq 0.\end{cases}$$

Аналогічно,

$$\frac{4a^2-8a+4-(x+a)^2}{(x-3a)^2+1}\geq 0\,.$$

Отже, знаменник додатний незалежно від значень x та a. Тоді

$(2a-2)^2-(x+a)^2\geq 0$,

$(2a-2-x-a)(2a-2+x+a)\geq 0$,

$(x-a+2)(x+3a-2)\leq 0$.

Тоді, якщо $a-2<2-3a$, тобто $a<1$, $x\in[a-2;\,2-3a]$, при $a>1$ $x\in[2-3a;\,a-2]$, при $a=1$ $x\in\varnothing$.

Тепер знайдемо, за яких умов $D(f)$ і $D(g)$ мають хоча б одну спільну точку. Легко пересвідчитись, що $2-3a>-3a-1$ при $a\in R$. Отже, при $a\leq-1$ $D(f)$ і $D(g)$ мають спільні точки, при $-1<a<\dfrac{1}{2}$ також є спільний розв'язок, оскільки (рис. 5.7)

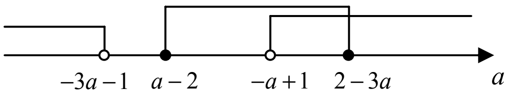


Рис. 5.7

при $\frac{1}{2} \le a \le \frac{3}{2}$ спільних точок немає, при $a > \frac{3}{2}$ маємо спільні точки (рис. 5.8).

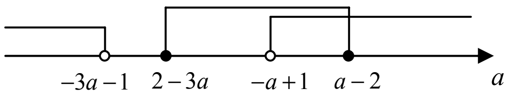


Рис. 5.8

Відповідь: $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Завдання з вибором правильної відповіді

1) Знайти всі значення параметра a, при яких множиною розв'язків нерівності $\sqrt{a^2 - x^2} \ge 2x$ є відрізок довжини 4.

А $\pm(5-\sqrt{5})$ **Б** $5-\sqrt{5}$ **В** ± 7 **Г** інша відповідь

2) При яких значення a рівняння $\left|1-\sqrt{|x+3|}\right| = a$ має чотири розв'язки.

А $[0;1]$ **Б** $(0;1)$ **В** 1 **Г** 0

3) При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x}-a\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=0$ має єдиний розв'язок?

А $(-\infty;0] \cup \{\sqrt{3}\}$ **Б** $\sqrt{3}$ **В** $(-\infty;0)$ **Г** інша відповідь

4) При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$ має один розв'язок?

А $(-\infty;-1] \cup (7;+\infty)$ **Б** 7 **В** $(7;+\infty)$ **Г** інша відповідь

Завдання з короткою відповіддю

5) При якому найменшому значенні параметра a рівняння $\sqrt{5x-\pi}=5+4a-a^2$ має розв'язки?

6) При скількох дробових значеннях параметра a рівняння $\sqrt{x-5}+\sqrt{2a^2-3a-5}=0$ має розв'язки?

7) Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{x+3}=2x-a$ має єдиний корінь.

Завдання з розгорнутою відповіддю

Розв'язати відносно x:

8) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{a-3x}=1.$

9) $(x-1)\sqrt{(a-1)x^2+2ax+a}=0.$

10) $\sqrt{x^2-2a}\le x+2.$

11) Знайти всі значення параметра a, для яких область визначення $D(f)$ функції

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2+3a^2-1-2a(2x-1)}{3\cos 2x-4\cos 3x+9}}$$

міститься в області визначення $D(g)$ функції

$$g(x)=\sqrt{\frac{2\sin 3x+3\cos x+7}{x^2+(2x-1)a+a^2}}\ .$$

Розв'язати ірраціональні рівняння та нерівності з параметром:

12) $\sqrt{4+x(x+4)}+\sqrt{4+x(x-4)}=2a.$

13) $\sqrt{x(x+2)+1}+\sqrt{9-x(6-x)}=b.$

14) $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{a}.$

15) $\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}=b\sqrt{12}.$

16) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$

17) $\sqrt{1+ax}-\sqrt{1-ax}=x.$

18) $x=a+\sqrt{a+\sqrt{x}}$, при $a>1.$

19) $\sqrt{a+x}-\dfrac{a}{\sqrt{a+x}}=\sqrt{2a+x}$, при $a>0$.

20) $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$.

21) $x-a=\sqrt{x^2+2(a+1)x+4a}$.

22) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1

1.2. 1) Б; 2) Б; 3) А; 4) Б; 5) Г; 6) Б; 7) А; 8) Б; 9) А; 10) Б; 11) А; 12) Г; 13) В; 14) В; 15) Б; 16) Г; 17) А; 18) В; 19) Г; 20) А; 21) 2;22) 13; 23) –1; 24) 5; 25) –1; 26) –0,05; 27) 2; 28) –b; 29) –c; 30) $\sqrt{1-a}$; 31) $\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{4}\right)$; 32) $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 33) $-\dfrac{1}{23}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+9\right)$; 34) $\sqrt{3}-1$; 35) 2; 36) $3-2x,\ x\le 1; 1, 1<x\le 2; 2x-3,\ x>2$; 37) $\sqrt{a-a^2}$; 38) 1; 39) 2; 40) 1.

Розділ 2

2.2. 1) ОДЗ = $\varnothing$; 2) $\sqrt{1-3x}\ge 0$ за означенням; 3) ОДЗ: $x\ge 2$, при цьому ліва частина рівняння додатна; 4) ліва частина рівняння від'ємна, а права – невід'ємна; 5) ОДЗ: $x\ge 1$, при цьому ліва частина не менша, ніж $\sqrt{4{,}1}>2$; 6) ОДЗ: $x\le -2$, при цьому права частина рівняння від'ємна; 7) В; 8) Г; 9) В; 10) Г; 11) Б; 12) Б; 13) Б; 14) А; 15) 2; 16) $\varnothing$; 17) 2; 18) 4; 19) 5; 20) 1.

2.3. 1) А; 2) Г; 3) Б; 4) В; 5) Б; 6) В; 7) В; 8) А; 9) А; 10) В; 11) 7; 12) –6; 13) 10; 14) ± 4; 15) 2; 16) 3; 17) –1; 18) 0; 19) 3; 20) $\dfrac{4-\sqrt{7}}{2}$; 21) 5; 22) $\varnothing$; 23) 7; 24) 6; 25) 8; 26) 4; 27) $\varnothing$; 28) $\dfrac{7+\sqrt{137}}{22}$; 29) $\dfrac{1+2\sqrt{13}}{3}$; 30) 2. Вказівка: перенести один із радикалів у праву частину рівняння та піднести обидві частини рівняння до квадрата; 31) 5; 7. Вказівка: розкласти квадратні тричлени на множники, винести спільний множник за дужки і перейти до сукупності рівнянь; 32) $-1;-\frac{1}{6};$ 33) $-6;-5,5;-5;$ 34) 0.

2.4. 1) 81;16; 2) $\frac{1}{3^6}$; 3) –9; 1; 4) ±7; 5) ±5; 6) $-\frac{1}{3};1;$ 7) $-2;\frac{7}{2}$. Вказівка: помножити обидві частини рівняння на 2, виділити вираз $2x^2-3x+2$ і зробити заміну $\sqrt{2x^2-3x+2}=t$; 8) 2; 9) 63; 10) ±2; 11) –2; 12) 7; 13) 1; 14) 7. Вказівка: зробити заміну $\sqrt{x-3}=t, t\geq 0$. Потім використати властивість $\sqrt{a^2}=|a|$. 15) 3; 8; 16)2; 17) ±8; 18) 5. Вказівка: поділити обидві частини рівняння на $x(x\neq 0)$; 19) $-88;-24;3;$ 20) 1; 2; 10.

2.5. 1) –15; 1; 2) –11; –4; 5; 3) –1; 3; 35; 4) –7; 0; 2; 5) $\frac{1}{2}$; 2; 6) $17\pm\sqrt{257}$; 7) 1; 8) –3; 4; 9) 3; 7; 10) $7;14;\frac{21}{2}\pm\frac{7\sqrt{141}}{12}$.

2.6. 1) 4; 2) 15. Вказівка: помножити обидві частини рівняння на $\sqrt{2}$; 3) $3;\frac{5+\sqrt{297}}{8}$; 4) ±1; 5) $-\frac{1}{2};-\frac{2}{3};$ 6) $-\frac{5}{4}$; 2; 7) Ø; 8) $\frac{190}{63};\frac{2185}{728}$; 9) 0; $\frac{63}{13}$; 10) 1; 11) 2; 12) 0; 13) 2.

Перевірний тест 1

Варіант 1

1. Г; 2. Б; 3. Б; 4. А; 5. Г; 6. Д; 7. В; 8. Б; 9. Д; 10. В; 11. –2; 12. –8; 13. –25; 14. 4; 15. 2; 16. 3; 17. 2; 18. 2; 19. 1; 20. 2.

Варіант 2

1. В; 2. В; 3. Д; 4. Г; 5. В; 6. Б; 7. Г; 8. Д; 9. А; 10. В; 11. 2; 12. 7; 13. –16; 14. 10; 15. 63; 16. 3№ 17. –1; 18. 5; 19. 0; 20. 10.

Розділ 3

3.2. 1) Г; 2) Г; 3) А; 4) В; 5) А; 6) Г; 7) 8; 8) В; 9) А; 10) Б;

11) $[-1;0]$; 12) $[-18;-2]$; 13) $\left(-1;\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; 14) $[-1;1]\cup[6;+\infty)$;

15) $\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{23-\sqrt{145}}{8}\right)$; 16) $\left[-\dfrac{1}{4};0\right)$; 17) $\left[\dfrac{3}{7};\dfrac{19+\sqrt{109}}{18}\right)$; 18) $\left(-\infty;\dfrac{3+\sqrt{73}}{16}\right]$;

19) $[0;1)$; 20) $\varnothing$; 21) $(1;\ 4]$; 22) $(-\infty;-3]\cup\left[0;\dfrac{1}{5}\right)$;

23) $\left[-\dfrac{10}{13};2\right]\cup[3;\infty)$; 24) $(-\infty;-10]\cup[6;\infty)$; 25) $[4;8]$; 26) $[4;29)$;

27) $[-1;3]$; 28) $[5;6)\cup(9;10]$; 29) $\left(-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};1\right]$; 30) $\left(\dfrac{\sqrt{34}-1}{2};\infty\right)$.

3.3. 1) Г; 2) А; 3) В; 4) Б; 5) А; 6) Г; 7) В; 8) В; 9) Б; 10) А; 11) 2; 12) 2; 13) 4; 14) 4; 15) –12; 16) $\{-2;1\}\cup[3;\infty)$; 17) $\{-1;2\}\cup[4;\infty)$ 18) $\{-2\}\cup[1;3]$; 19) $(-1,5;-0,5)\cup(1;\infty)$; 20) $[-4;-3)\cup(2;3]$; 21) $(-\infty;-1]\cup[3;6)$; 22) $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)\cup(4;7)$; 23) $(-5;15)\cup(15;\infty)$; 24) $(-\infty;-1]\cup\{1\}\cup[3;\infty)$; 25) $(-3;-2]\cup[3;4)$.

3.4. 1) $(-2;14]$; 2) $(-\infty;1)$; 3) $(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{5}{3};\infty\right)$; 4) $(-\infty;-2)\cup\left[\dfrac{41}{2};\infty\right)$; 5) $(-5;5)$; 6) $[-1;4]$; 7) $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$; 8) $(-2;-1]\cup\left[-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$; 9) $[1+\sqrt{3};3)$; 10) $[0;1]\cup[625;\infty)$.

Перевірний тест 2

Варіант 1

1. Г; 2. Д; 3. В; 4. В; 5. А; 6. В; 7. Г; 8. В; 9. А; 10. Б; 11. –1; 12. 7; 13. 5; 14. 1; 15. 1; 16. 9; 17. 3.

Варіант 2

1. Г; 2. Д; 3. Б; 4. В; 5. А; 6. В; 7. Д; 8. Г; 9. В; 10. Б; 11. 3; 12. 3; 13. 2; 14. –3; 15. 4; 16. 3; 17 2.

Розділ 4

4.1. 1. Б; 2 В; 3. Г; 4. А 5. А; 6. 26; 7. 35; 8. $-6,25$; 9. 13; 10. $(-9;-7);(9;7)$; 11. $(-5;-3);(3;1);(-1+\sqrt{10};-1+\frac{4}{5}\sqrt{10})$; $(-1-\sqrt{10};-1-\frac{4}{5}\sqrt{10})$; 12. $(-4;-1)$; 13. $(-9;-1)$; 14. $(4;9)$; $(9;4)$; 15. $(3;1)$; 16. $(-17;20)$; $(2;1)$; 17. $\left(\frac{27}{8};\frac{27}{8}\right)$; 18. $(5;4);(-5;-4)$, $(15;-12);(-15;12)$. **4.2.** 1. А; 2. Б; 3. Г; 4. Г; 5. А; 6. 11; 7. 4; 8. 34; 9. -9; 10. (3;5); 11. [1,75;4); 12. (6;10].

Розділ 5

5.2. 1. А; 2. Б; 3. А; 4. А; 5. -1; 6. 1; 7. $-6; 125$; 8. При $a \geq 0$ $x = \frac{5a-6+2\sqrt{10a+9}}{25}$, при $a<0$ $x \in \varnothing$. 9. При $a<0$ $x \in \varnothing$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a \in \left(0;\frac{1}{4}\right)$ $x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a}}{a-1}$, при $a \in \left[\frac{1}{4};1\right) \cup (1;\infty)$ $x \in \left\{1;\frac{-a \pm \sqrt{a}}{a-1}\right\}$, при $a=1$ $x \in \left\{-\frac{1}{2};1\right\}$; 10. При $a \leq 0$ $x \geq -2-a$, при $0<a\leq 2$ $x \in [-2;-\sqrt{2a}] \cup [\sqrt{2a};+\infty)$, при $a>2$ $x \in [\sqrt{2a};+\infty)$; 11. $a \in \left(-\infty;\frac{9-\sqrt{17}}{32}\right)$; 12. При $a>0$ $\{-a;a\}$, при $a=2$ $[-2;2]$, при $a<0$ $x \in \varnothing$; 13. При $b>4$ $\{1-0,5b;1+0,5b\}$, при $b=4$ $[-1;3]$, при $b<4$ $\varnothing$; 14. При $10 \leq a < 20$ $\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{20a-a^2};\frac{1}{2}\sqrt{20a-a^2}\right\}$; $a=20\{0\}$; $a \in (-\infty;10) \cup (20;+\infty)$ $\varnothing$. 15. При $1 \leq b < \sqrt{2}$ $\left\{-6b\sqrt{2-b^2};6b\sqrt{2-b^2}\right\}$, при $b=\sqrt{2}$ $\{0\}$, при $0<b<1$ $\varnothing$; 16. При $a=0\{0\}$, при $a \in [1;+\infty)$ $\left\{\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}\right\}$; 17. При

$a\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]\left\{0;-2\sqrt{1-a^2};2\sqrt{1-a^2}\right\}$, при $a\in\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup(1;+\infty)\{0\}$;

18. При $a\in(1;+\infty)\left\{\frac{2a+1+\sqrt{4a+1}}{2}\right\}$; 19. $\varnothing$; 20. При $a=0\{0\}$, при $a\in[1;+\infty)\left\{\frac{(a-1)^2}{4}\right\}$; 21. При $a\in(-\infty;-2]\cup\left(\frac{1}{2};0\right]\left\{\frac{a^2-4a}{4a+2}\right\}$, при $a\in\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup(0;+\infty)\ \varnothing$; 22. При $a\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)\ \varnothing$, при $a\in(0;2)\ x\in[-a;a]$, при $a=2$ $x\in(-2;2)$, при $a\in(2;4)\ x\in\left(-\frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2};\frac{\sqrt{a^3(4-a)}}{2}\right)$.

ДОДАТОК

Означення степеня

Означення степеня з натуральним показником

$a^1 = a, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$, де n – натуральне число; a – будь-яке дійсне число.

Означення степеня з цілим показником

1. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, де n – натуральне число; $a \neq 0$.

2. $a^0 = 1$; $a \neq 0$.

Означення степеня з раціональним показником

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де m – ціле число; n – натуральне число; $n \geq 2$; $a > 0$.

Властивості степенів з дійсними показниками

Нехай a, b, x, y – дійсні числа, тоді:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.

3. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, a \neq 0$.

4. $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x, b \neq 0$.

5. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$.

6. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}, a \neq 0$.

Основні формули скороченого множення

1. Квадрат суми: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. Квадрат різниці: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3. Куб суми: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.
4. Куб різниці: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.
5. Різниця квадратів: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
6. Різниця кубів: $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

7. Сума кубів: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$.

8. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

9. $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac$.

Дії над радикалами

Означення. Число x називається арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a і позначається так: $\sqrt[n]{a}$, якщо $x>0$ і $x^n=a$. Якщо $x=0$, то $\sqrt[n]{0}=0$.

З цього означення випливає, що $\sqrt[n]{a^n}=\left[\begin{array}{l}|a|, \text{ якщо } n-\text{парне},\\ a, \text{ якщо } n-\text{непарне}.\end{array}\right.$

Якщо $a\geq 0, b\geq 0$, то дії над коренями виконуються за правилами:

1. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$. 2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b\neq 0$.

3. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k=\sqrt[n]{a^{mk}}$. 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}}=\sqrt[nk]{a^m}$.

5. $\sqrt[nm]{a^{mk}}=\left[\begin{array}{l}\sqrt[n]{|a|^k}, \text{ якщо } m-\text{парне},\\ \sqrt[n]{a^k}, \text{ якщо } m-\text{непарне}.\end{array}\right.$

6. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$, де m – ціле число; n – натуральне число; $n\geq 2$; $a>0$.

Взаємно спряжені ірраціональні вирази

A	B	$A\cdot B$
$\sqrt{m}$	$\sqrt{m}$	m
$\sqrt[3]{m}$	$\sqrt[3]{m^2}$	m
$\sqrt[4]{m}$	$\sqrt[4]{m^3}$	m
$\sqrt{m}\pm\sqrt{n}$	$\sqrt{m}\mp\sqrt{n}$	$m-n$
$m\pm\sqrt{n}$	$m\mp\sqrt{n}$	m^2-n
$\sqrt[3]{m}\pm\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{m^2}\mp\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}$	$m\pm n$
$m\pm\sqrt[3]{n}$	$m^2\mp m\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n^2}$	$m^3\pm n$

Таблиця квадратів натуральних чисел від 10 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Значення a^n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4^n	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5^n	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6^n	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7^n	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	
8^n	8	64	512	4096	32768	262144	2097152			
9^n	9	81	729	6561	59049	531441				
10^n	10	100	1000	10000	100000	1000000				

Абсолютна величина

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

1. $|a| \geq 0.$

2. $|a| = |-a|.$

3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}.$

4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$

5. $|a \pm b| \leq |a| + |b|.$

Квадратні рівняння

Повне квадратне рівняння:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad D > 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$D=b^2-4ac, \qquad D=0, \quad x_1=x_2=-\frac{b}{2a};$$

$$D<0, \quad x\in\varnothing.$$

Зведене квадратне рівняння:

$$x^2+px+q=0, \quad D>0, \quad x_{1,2}=-\frac{p\pm\sqrt{D}}{2}.$$

Теорема Вієта

Для зведеного квадратного рівняння:

$$\begin{cases} x_1+x_2-=p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Для повного квадратного рівняння:

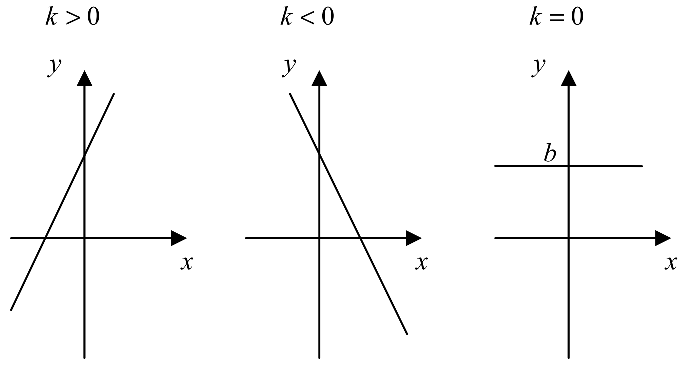
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2- корені квадратного тричлена ax^2+bx+c.

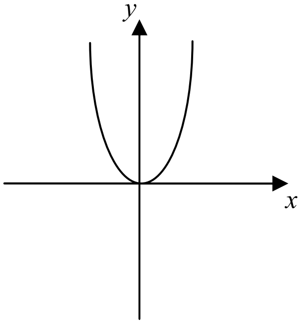
Графіки основних елементарних функцій

1. $y=kx+b$.

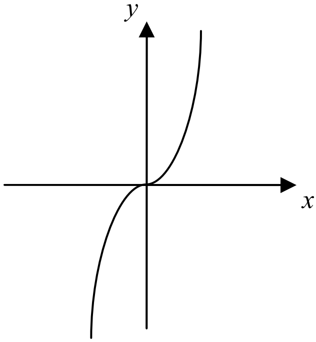


2. $y = x^n, n \in N$.

n – парне

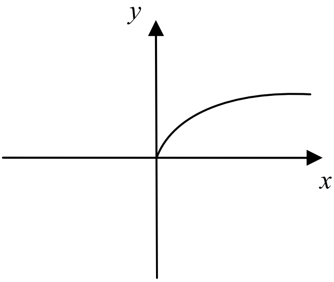


n – непарне

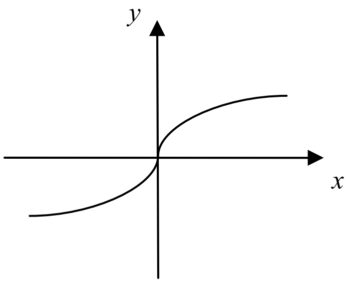


3. $y = \sqrt[n]{x}$.

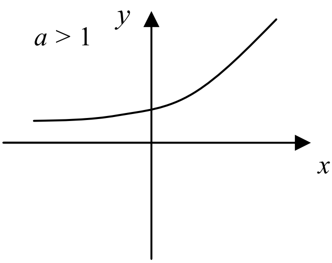
n – парне

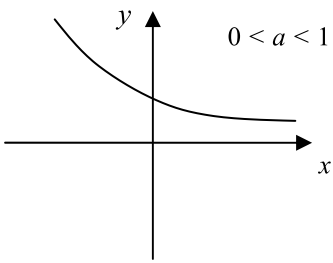


n – непарне

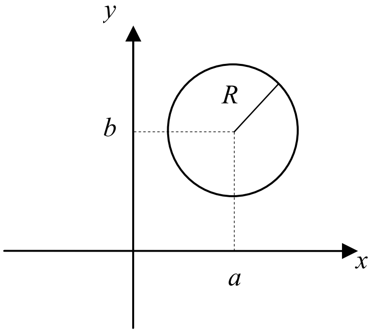


4. $y = a^x, a > 0, a \neq 1$.





5. $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$.



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гальперіна А.Р.* Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика : тренувальні завдання / А.Р. Гальперіна, О.Я. Михеєва. – Х. : Веста : вид-во «Ранок», 2008.

2. *Горделадзе Ш. Г.* Збірник конкурсних задач з математики / Ш.Г. Горделадзе, М.М. Кухарчук, Ф.П. Яремчук. – К. : Вища шк., 1988.

3. *Слєпкань З.І.* Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра та початки аналізу. 11 клас / З.І. Слєпкань. – Х. : Гімназія, 2006.

4. *Мельник В.С.* Випускні (атестаційні) випробування : 2005. Варіанти білетів комплексного тестування з профорієнтованих дисциплін / В.С. Мельник. – К. : НТУУ «КПІ», 2005.

5. *Апостолова Г.В.* Перші зустрічі з параметром / Г.В. Апостолова, В.В. Ясінський. – К. : Факт, 2008.

6. *Ясинський В.В.* Математика : навч. посіб. для слухачів ІДП НТУУ «КПІ» / В.В. Ясинський. – К. : ІДП НТУУ «КПІ», 2005.

7. *Егерев В.К.* Сборник задач по математике для поступающих в вузы / [под ред. М. И. Сканави] / В.К. Егерев. – К. : Калпон, 1997.

8. *Лагно В.І.* Математика. Тести. 5–12 класи : посіб. / В.І. Лагно, О.А. Москаленко, В.О. Марченко [та ін.]. – К. : Академвидав., 2008.

9. *Алєксєєв В.М.* Математика. Довідковий повторювальний курс / В.М. Алєксєєв, Р.П. Ушаков. – К. : Вища шк., 1992.

10. *Мерзляк А. Г.* Алгебраїчний тренажер : посіб. для школярів та абітурієнтів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – К. : А.С.К., 1997.

ІНСТИТУТ ДОУНІВЕРСИТЕТСЬКОЇ ПІДГОТОВКИ НАЦІОНАЛЬНОГО АВІАЦІЙНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Інститут доуніверситетської підготовки (ІДП) проводить освітню діяльність, пов'язану з підготовкою до вступу у ВНЗ та зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) для учнів 9 – 11 класів на підготовчих курсах *з навчальних дисциплін:* **українська мова та література, математика, історія України, всесвітня історія, англійська мова, географія, фізика, хімія, біологія, основи журналістики, рисунок та композиція, світова література.**

Для учнів 9 класу проводиться підготовка до вступу у навчальні заклади II рівня акредитації (коледжі, технікуми, ліцеї).

До послуг учнів 9-11 класів існують різноманітні **форми навчання:** *вечірні, щосуботи та заочні підготовчі курси*, а також організовано роботу підготовчих курсів в регіонах України.

Основні напрями діяльності Інституту: якісна підготовка до ЗНО та вступу у ВНЗ, підвищення рівня підготовки абітурієнтів на основі використання кадрового і матеріального потенціалу Університету; вивчення і розроблення проблеми наступності та організації ранньої професійної орієнтації серед слухачів ІДП за участю провідних фахівців НАУ; поглиблене вивчення цілого ряду навчальних дисциплін та спецкурсів.

Термін навчання: 8-ми місячні підготовчі курси (з 01.10. по 30.05.),
4-х місячні (з 14.01. по 30.05.)

Напрями підготовки фахівців НАУ:

авіа- та ракетобудування; авіоніка*; автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології*; аеронавігація*, обслуговування повітряних суден*; біотехнологія*;біомедична інженерія*, хімічна технологія*; будівництво*; метрологія та інформаційно-вимірювальні технології*; видавничо-поліграфічна справа*; геодезія, картографія та землеустрій*; екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування*; радіотехніка*; радіоелектронні апарати*; електротехніка та електротехнології*; енергомашинобудування*; електронні пристрої та системи*; мікро- та наноелектроніка*; безпека інформаційних і комунікаційних систем*; системи технічного захисту інформації*; управління інформаційною безпекою*; комп'ютерна інженерія*; комп'ютерні науки*; системна інженерія*; програмна інженерія*; телекомунікації*; прикладна математика*; прикладна фізика*; філологія; соціологія; соціальна робота; психологія; архітектура; дизайн; документознавство та інформаційна діяльність; менеджмент; маркетинг; міжнародна економіка; економіка підприємства; облік і аудит; транспортні технології* (на повітряному транспорті); економічна кібернетика; фінанси і кредит; міжнародний бізнес; міжнародні економічні відносини; міжнародне право; журналістика; міжнародна інформація; туризм; правознавство.*

Заняття проводяться відповідно до чинних нормативних документів, робочих навчальних програм, адаптованих відповідно до вимог Державного стандарту базової і повної середньої освіти, Українського центру оцінювання якості освіти та затверджених кафедрою базових і спеціальних дисциплін ІДП НАУ.

Навчальний процес на підготовчих курсах забезпечується педагогічними та науково-педагогічними працівниками кафедри базових і спеціальних дисциплін, а також висококваліфікованими фахівцями провідних кафедр Університету.

Протягом навчального року пропонуються: екскурсії до Державного музею авіації, навчального ангару, музею Університету, кафедр та лабораторій НАУ, участь у міжнародній конференції студентів та молодих учених «Політ» та презентації Університету на базі ЗНЗ.

Слухачам, які закінчили підготовчі курси Інституту доуніверситетської підготовки і вступатимуть до Національного авіаційного університету на природничо-математичні та інженерно-технічні напрями підготовки (позначені*), до загального рейтингу додається до 20 балів за результатами підсумкової атестації.

Якщо є бажання отримати якісну підготовку до зовнішнього незалежного оцінювання і підготуватися до вступу в обраний вищий навчальний заклад, звертайтеся за адресою:

03680, м. Київ, пр. Космонавта Комарова, 1, корпус 8, кім. 610.
Тел.: 406-74-04, 406-72-09, 406-73-11, 406-74-15, тел./факс: 497-52-84
E-mail: idp@nau.edu.ua Web-сторінка: **www.nau.edu.ua**

Навчання платне

Ліцензія МОН МС України серія АД № 072909 від 16.10.2012 р.

Навчальне видання

МАТЕМАТИКА

ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ, НЕРІВНОСТІ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Практикум

2-е видання, стереотипне

Укладачі:
МУРАНОВА Наталія Петрівна
ХАРЧЕНКО Лариса Анатоліївна
ШЕВЧЕНКО Галина Володимирівна
МУРАНОВ Олександр Сергійович

Редактор *С. В. Войтенко*
Технічний редактор *А. І. Лавринович*
Коректор *О. О. Крусь*
Комп'ютерна верстка *Н. В. Чорної*

Підп. до друку 17.12.12. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 5,58. Обл.-вид. арк. 6,0.
Тираж 200 прим. Замовлення № 227-1.

Видавець і виготівник
Національний авіаційний університет
03680. Київ-58, проспект Космонавта Комарова, 1.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002