

Математичні методи у електродинамічних задачах

Тетяна Криворот

Інститут професійно-технічної освіти НАПН України

Вступ. При розв'язку довільної електродинамічної задачі використовують різноманітні математичні методи. Найбільш вживаними і відомими методами є метод інтегрального рівняння, метод часткових областей, варіаційний метод, метод кінцевих різниць, метод кінцевих елементів, метод конформних перетворень, метод еквівалентної заміни. Всі ці методи є незалежними, тому жодному з них не можна надати переваги. Достатньо прості задачі можна розв'язати одним методом, однак здебільшого потрібно використовувати їх комбінацію.

Матеріали і методи. Розглянемо більш детально метод інтегрального рівняння, метод часткових областей і варіаційний метод.

Результати. Метод інтегрального рівняння: нехай відома функція Гріна $G(\vec{r}, \vec{r}')$ для задачі, тобто відомий розв'язок рівняння

$$Lu(\vec{r}) - \lambda u(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad (1)$$

де $u(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$, $f(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ – дельта-функція Дірака. З фізичної точки зору це означає, що знайдено розв'язок рівняння (електродинамічної задачі) для єдиного точкового джерела. Тоді неоднорідна задача може бути зведена до інтегрального рівняння (2)

$$\int_{\Sigma} K(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}' = g(\vec{r}), \quad (2)$$

для $\forall \vec{r} \in S$, де Σ – поперечний переріз хвилеводу або об'єм резонатора, $K(\vec{r}, \vec{r}')$ – відоме ядро інтегрального рівняння, яке визначається функцією Гріна $G(\vec{r}, \vec{r}')$, $g(\vec{r})$ – відома функція, що визначає зовнішній вплив на систему, що діє крізь отвори площею S , $f(\vec{r}')$ – невідома функція, що описує розподіл електромагнітного поля або струмів всередині розглядуваної системи.

При пошуку власних чисел λ та функцій систему рівняння (2) записують у вигляді

$$\int_{\Sigma} K(\vec{r}, \vec{r}') f(\vec{r}') d\vec{r}' = \lambda f(\vec{r}). \quad (3).$$

Отримане рівняння (3) розв'язати аналітично неможливо або досить складно, тому його розв'язують наближено за допомогою комп'ютерних обчислювальних програм.

Метод часткових областей був першим методом, який почав використовуватись для аналізу електромагнітних систем і сьогодні залишається найбільш вживаним методом напів-аналітичного аналізу електромагнітних систем. Алгоритм методу полягає у наступному: розглядувана система поділяється на відносно великі часткові області, границі яких співпадають з координатними лініями, або координатними площинами в обраній системі

координат. Ці області, зазвичай, мають однорідне заповнення. На границі між усіма областями задаються граничні умови, що враховують перетворення полів при їх переході через границю. Після цього знаходять розв'язок рівнянь Максвелла в кожній з областей. Оскільки границі області співпадають з координатними лініями або площинами в обраній системі координат, то ця задача легко розв'язується. Таким чином знаходять власні функції в кожній з областей, за якими далі відбувається розклад полів. Отримані вирази для електромагнітних полів підставляються в граничні умови для кожної області. Одержується система функціональних рівнянь, яка потім, при врахуванні ортогональності власних функцій, зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка розв'язується чисельно за допомогою комп'ютерних програм.

Варіаційний метод широко застосовується для розв'язку задач розсіювання електромагнітних полів на неоднорідностях. Такі задачі можна звести до інтегрального рівняння з симетричним ядром:

$$K(\vec{r}, \vec{r}') = K(\vec{r}', \vec{r}). \quad (4)$$

Якщо умова симетричності ядра інтегрального рівняння (4) виконується, то тоді вираз для імпедансу неоднорідності в лінії передачі є стаціонарним відносно змін функції $f(\vec{r})$ в інтегральному рівнянні. Це означає, що точність визначення імпедансу принаймні на порядок вище точності визначення функції $f(\vec{r})$. Тому для отримання імпедансу неоднорідності з гарною точністю вигляд функції $f(\vec{r})$ можна знати лише приблизно.

Алгоритм методу полягає в наступному: знаходиться стаціонарний вираз (відносно невідомої функції $f(\vec{r})$) для імпедансу неоднорідності в лінії передачі. Далі в нього підставляється значення вже відомої пробної функції і для нього знаходиться числове значення імпедансу, яке на порядок точніше ніж значення пробної функції. Відомим різновидом цього методу є метод збурень у квантовій механіці.

Висновок. Отже, перевагами методу інтегральних рівнянь є його відносна простота та можливість отримання розв'язку з дуже високою точністю. Недоліком методу є дещо обмежена область його застосування за рахунок складного вигляду функції Гріна електродинамічної задачі. Перевагами методу часткових областей є фізична простота та наочність, можливість достатньо широкого застосування для аналізу різноманітних електромагнітних систем. Недоліком методу є те, що отримані власні «об'ємні» функції для кожної з областей погано описують розподіл полів на границі між областями. За рахунок цього збіжність наближеного розв'язку електромагнітних систем до істинного значно погіршується. Відмітимо, що цей недолік можна усунути представляючи функцію, що описує розподіл полів на границі, у вигляді розкладу по повній ортогональній системі функцій, що враховують особливості на границі. Перевагами варіаційного методу є простота і можливість отримання розв'язку в аналітичному вигляді. Недоліком є неможливість отримання коректної оцінки точності проведеного аналізу, та відсутність відповіді про розподіл електромагнітних полів або струмів.