УДК 372.851

О. О. Гриб'юк, В. Л. Юнчик

Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України

ПРОЕКТНО-ДОСЛІДНИЦЬКА ДІЯЛЬНІСТЬ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ СИСТЕМИ ДИНАМІЧНОЇ МАТЕМАТИКИ GEOGEBRA

У дослідженні продемонстровано ефективність використання системи GeoGebra в процесі розв'язування математичних задач. Наведено інноваційні аспекти щодо використання системи динамічної математики GeoGebra. Значна увага акцентується на особливостях застосування теорії розв'язування дослідницьких задач у процесі проектно-дослідницької роботи. Продемонстровано алгоритми розв'язування дослідницьких задач та розглядаються етапи процесу дослідження. Наведено ряд завдань, розв'язаних з використанням системи динамічної математики GeoGebra на основі теорії розв'язування дослідницьких задач. У дослідженні продемонстровано основні етапи проектно-дослідницької діяльності. Акцентується увага на основних етапах розв'язування дослідницьких задач (діагностика та редукція, що містять процедури аналізу проблеми; етапи трансформації і верифікації, що полягають в синтезі ідеї розв'язування).

Ключові слова: теорія розв'язування дослідницьких задач, алгоритм розв'язування дослідницьких задач, дослідницька діяльність, GeoGebra, діагностика, редукція, трансформація, верифікація, проектно-дослідницька діяльність.

Актуальними завданнями загальноосвітнього навчального закладу є пошук оптимальних шляхів зацікавлення учнів процесом навчанням, підвищення їх розумової активності, спонукування до творчості, виховання школяра в контексті формування життєво й соціально компетентної особистості та розвитку дослідницької діяльності учнів. В процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу з метою вирішення поставлених завдань рекомендується впроваджувати теорію розв'язування дослідницьких задач з використанням інформаційно-комунікаційних технологій [4].

Безперечно, в процесі навчання природничо-математичних дисциплін доцільно використовувати окремі компоненти комп'ютерно-орієнтовані системи навчання для розвитку проектно-дослідницької діяльності учнів. Система динамічної математики GeoGebra є універсальним програмним засобом, що використовується для підтримки навчання геометрії, алгебри, математичного аналізу, теорії ймовірності, математичної статистики та інших розділів математики. Вагомим аргументом щодо упровадження системи динамічної математики в процес навчання математики є вільнопоширюваність програмного продукту, над яким працює інтернаціональна команда програмістів та користувачів програми, серед яких є вчителі та їх учні, студенти та викладачі, науковці та дослідники.

Проблеми створення і впровадження комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання досліджували О. Гончарова, Ю. Горошко, М. Жалдак, О. Жильцов, В. Клочко, Т. Крамаренко, Ю. Лотюк, І. Лупан, А. Монако., Н. Морзе, С. Раков, Ю. Рамський, С. Семеріков, З. Сейдаметова та інші. Проектуванням методичної системи навчання з використанням комп'ютерно орієнтованих технологій займаються О. Гриб'юк, Т. Китаєвська, І. Клещева, В. Омельченко, В. Снегурова, Л. Усольцева. Проблемам розвитку творчого мислення школярів присвячено роботи Г. Альтшуллера, В. Арнольда, Д. Богоявленської, О. Клепікова, М. Меєровича, Я. Пономарьова та інших. Проблемами психолого-педагогічного формування творчої особистості займались С. Рубінштейн, О. Леонтьєв, А. Єршов, В. Монахов, М. Моісеєв. Проблематикою використання системи динамічної математики GeoGebra займаються Маркус Хохенвартер, Майкл Борчердс, Андреас Лінднер, Гердіт Столс, Р. Зіатдінов, О. Гриб'юк, В. Пікалова, В. Ракута в тому числі в контексті професійної підготовки майбутніх фахівців. Однак недостатньо висвітлено питання щодо створення методичного забезпечення системи динамічної математики GeoGebra у процесі навчання природничо-математичних дисциплін, створенню варіативних моделей та використанню пропонованої системи в контексті теорії розв’язування дослідницьких задач.

Метою дослідження є використання системи комп’ютерної математики GeoGebra як засобу активізації проектно-дослідницької діяльності учнівської молоді в процесі навчання природничо-математичних дисциплін в контексті теорії розв’язування дослідницьких задач.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчальної діяльності сприяє активізації одержаних раніше знань, вмінь та навичок, розвитку логічного мислення, інтелектуальних здібностей, посилення інтересу до навчання та способу одержання знань. У процесі навчання математичних дисциплін система GeoGebra використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об’єктів, виразів, ілюстрації методів побудови; як середовище для моделювання та емпіричного дослідження властивостей досліджуваних об'єктів; як інструментально-вимірювальний комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об'єкта, а також вимірювання його заданих параметрів. Використання системи GeoGebra сприяє візуалізації об’єкта дослідження, демонстрації його властивостей, уникненню рутинних дій, пов'язаних із створенням допоміжних зображень [7]; представлення навчального матеріалу ілюстраціями (статичними і динамічними зображеннями, графіками, схемами, таблицями), в тому числі різного педагогічного призначення (для формування інтересу учнів щодо теми пропонованого заняття, візуального супроводу або пояснення виконуваних виразів, демонстрації прикладів застосування здобутих знань у житті) [8]. Залучення учнів на практичних заняттях до виконання завдань з використанням середовища GeoGebra сприяє розширенню кола навчальних завдань, включаючи в нього нестандартні завдання дослідницького характеру, оптимізаційних задач [9].

Система динамічної математики GeoGebra постійно оновлюється та вдосконалюється. Нещодавно з’явився новий інструмент, режим іспиту

GeoGebra, що сприяє проведенню іспитів, не маючи доступу до Інтернету, GeoGebraTube або іншого програмного забезпечення, встановленого на комп'ютері. В процесі роботи учні з даним модулем всі дії документуються в журналі іспиту. Graphing Calculator Released (графічний калькулятор) GeoGebra використовується для телефонів і планшетів Android та для iPhone і Windows та сприяє роботі в розділах алгебри та побудови графічних об’єктів, має доступ до GeoGebraTube. Напрацювання співтовариства GeoGebra має великі обсяги матеріалів для навчання математики та інших дисциплін, що складає більш ніж 300000 вільних і інтерактивних робочих листів і книг. Для зручної співпраці між учнями та вчителями було створено GeoGebra групи (Collaboration for Everyone), де є можливість опрацьовувати поштові тексти, зображення, відео, PDFs і робочі листи. В системі GeoGebra розроблено модуль, де можна задавати домашні завдання для учнів та прослідковувати їх роботу, оскільки зберігається оцінка, дата, тривалість і побудова кожної із спроб виконання. Учні можуть зберігати поточний стан виконаного завдання щоб повернутись до нього пізніше.

Розглянемо приклади розв’язування задач з використанням системи динамічної математики GeoGebra.

Приклад 1. Знайти всі значення параметра a, для кожного з яких рівняння $\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$ має рівно вісім розв’язків.

Розв’язання. Маємо $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k,$ де $k \in Z.$ Розглянемо функції $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ і $y = 2\pi k.$ Графіком першої функції є множина гомотетичних півкіл з центром в т. $O(0; 0)$, графіком другої – множина прямих, паралельних до осі абсцис. Зі збільшенням радіуса r півкола збільшується число розв’язків початкового рівняння (рис. 1). Їх буде рівно вісім, якщо $6\pi < r < 8\pi$. Не треба вважати a радіусом розглянутого півкола, насправді $r = |a|$.

Відповідь. $-8\pi < a < -6\pi$ або $6\pi < a < 8\pi$.

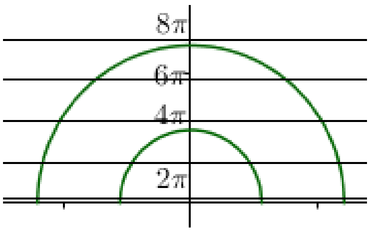

Рис. 1.

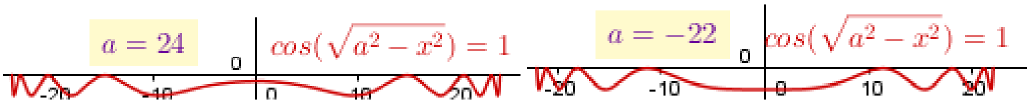

Рис. 2 а). Рівняння має вісім розв'язків

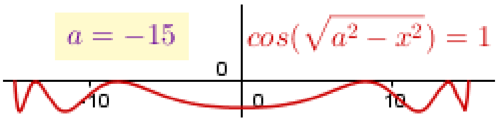

Рис. 2 б). Шість розв'язків

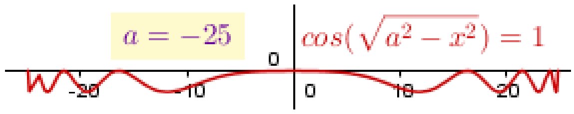

Рис. 2 в). Більше ніж вісім розв'язків

Приклад 2. Знайти значення a, якщо множина точок, заданих нерівністю $|y| < 1 - ax^2$, є підмножиною множини точок, заданих нерівністю $|2x| + |y| < \frac{5}{4}$?

Розв'язання. Графіком нерівності $|2x| + |y| < \frac{5}{4}$ є область, обмежена ромбом (рис. 3). Нерівність $|y| < 1 - ax^2$ рівносильна системі $ax^2 - 1 < y < 1 - ax^2$. Якщо $a \leq 0$, то дана система задає необмежену множину точок (рис. 4), що не можуть поміститись в середині ромба. Якщо $a > 0$, то розглянута система задає фігуру, зображену на рис. 5. Задача звелась до відшукання значень a, коли дана фігура «зтиснеться» до таких розмірів, що поміститься в ромб. З міркувань симетрії для відшукання значень параметра достатньо щоб рівняння $1 - ax^2 = \frac{5}{4} - 2x$ якщо $a > 0$ мало не більше одного кореня. Отже, відповідь $a \geq 4$.

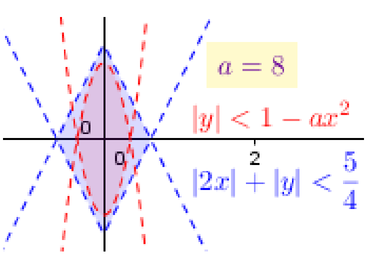

Рис. 3.

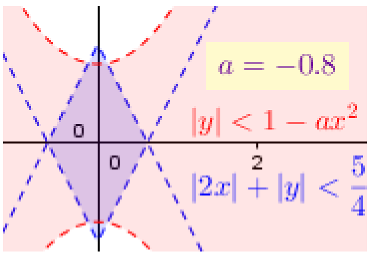

Рис. 4.

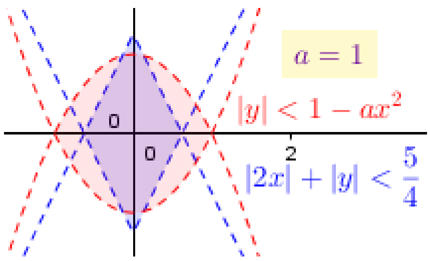

Рис. 5.

Приклад 3. З якими значеннями параметра a множина розв'язків нерівності $x(x-4)+a^2(a+4) \leq ax(a+1)$ має не більше чотирьох цілих значень x?

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем $\begin{cases} x \leq a^2, \\ x \geq a+4 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \geq a^2, \\ x \leq a+4. \end{cases}$

З використанням цієї сукупності можна зобразити розв'язок початкової нерівності (рис. 6). Проведемо прямі $x = k$, де $k \in Z$. Тоді значення a_0, для якого пряма $a = a_0$ перетинає прямі $x = k$ не більше ніж в чотирьох точках із відміченої множини, буде шуканим. Проаналізувавши рисунок можна прийти до висновку, що в даній задачі відповідь: $-\sqrt{6} < a < 0$, або $0 < a < 1$, або $1 < a < \sqrt{12}$.

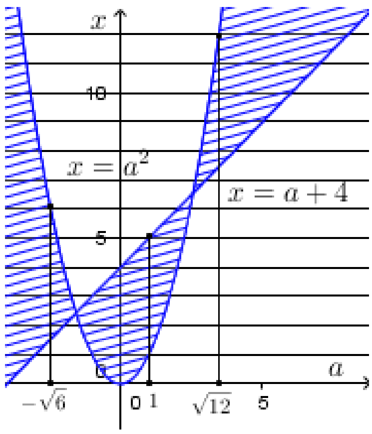

Рис. 6.

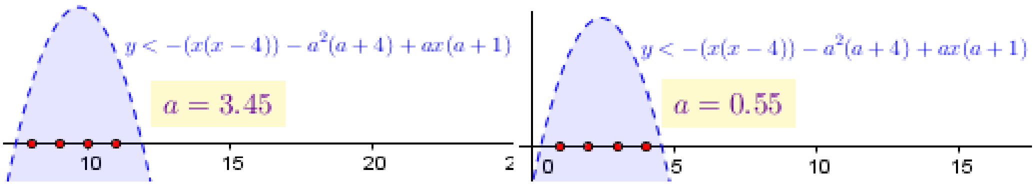

Рис. 7 а). Нерівність має чотири корені

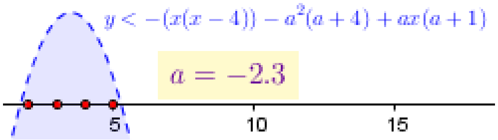

Рис.7 б). Нерівність має чотири корені

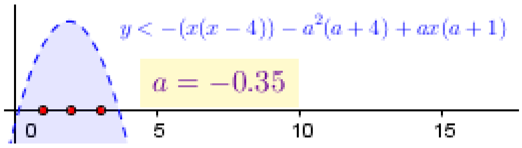

Рис.7 в). Нерівність має три корені

Приклад 4. Знайти значеннях параметра a, щоб множина розв'язків нерівності $x^2 + ax - 1 < 0$ була інтервалом завдовжки 5?

Розв’язання. Зазначимо, що для будь-яких значень параметра a дискримінант квадратного тричлена, що стоїть в лівій частині нерівності, додатній. Нехай x_1 і x_2 – корені даного квадратного тричлена. За умовою має бути доречною рівність $|x_1 - x_2| = 5$. Маємо $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$. Застосовуючи теорему Вієта, отримаємо $|x_1 - x_2| = \sqrt{a^2 + 4}$. Тоді $\sqrt{a^2 + 4} = 5$. Звідси $|a| = \sqrt{21}$.

Відповідь. $a = \sqrt{21}$ або $a = -\sqrt{21}$.

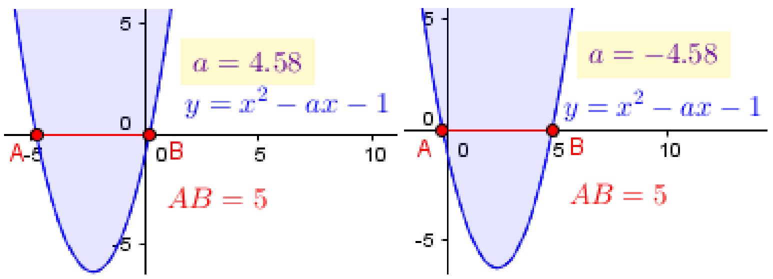

Рис.8 а). Множина розв’язків інтервал завдовжки 5

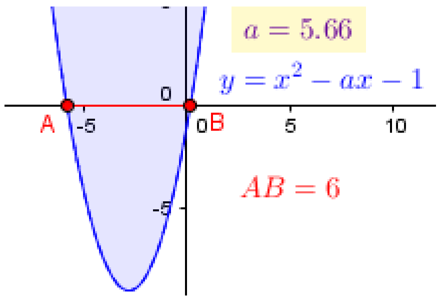

Рис.8 б). Інтервал більше за 5

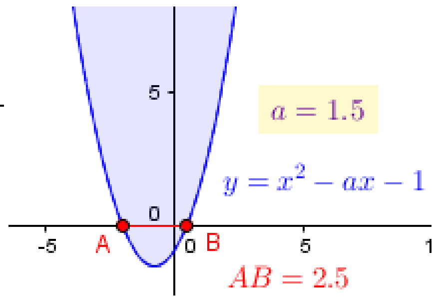

Рис.8 с). Інтервал менше за 5

Для розв’язування практичних завдань виробництва, планування, проектування, управління, проведення відповідних досліджень розроблені і розробляються тисячі математичних моделей та алгоритмів [5]. Для кожного класу задач існує узагальнена схема розв’язування задачі, перелік алгоритмів. Нижче продемонстровано спрощений алгоритм розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (рис. 9) ситуаційної задачі [10].

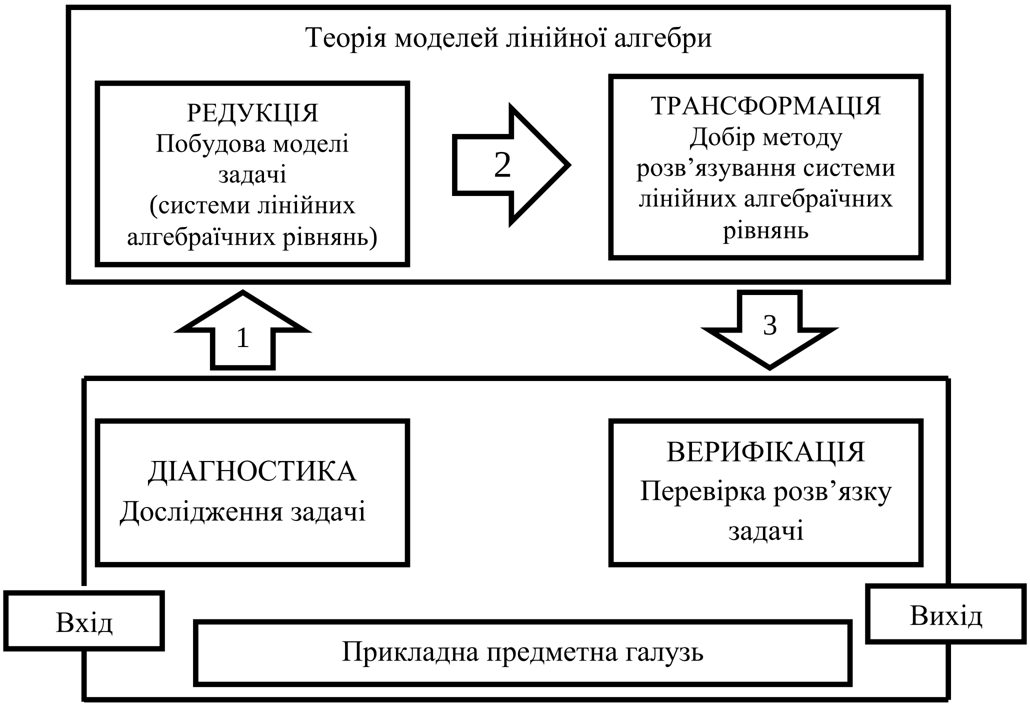

Рис. 9. Алгоритм розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Добір практичного способу розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь залежить від структури початкових даних, обсягу системи (кількості невідомих змінних) та обчислювального функціоналу комп'ютера.

Для даного класу задач використовується інваріантний алгоритмічний підхід, тому що не залежить від змісту конкретних процедур його етапів. Безперечно, етапи «*Діагностика»* і «*Верифікація»* відносяться до предметної галузі пропонованого завдання, тобто до певної галузі прикладного застосування лінійних рівнянь. Етапи «*Редукція»* і «*Трансформація»* відносяться до теорії лінійної алгебри. Переходи 1 і 3 потребують ґрунтовного повторення теоретичного матеріалу та розуміння теорії моделей та прикладної галузі їх застосування. Перехід 2 потребує вміння будувати моделі та здійснювати процес математичного моделювання [3].

Приклад. Знайти значення параметра a, якщо рівняння $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Розглянемо функції $y = ax$ та $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$.

Графік другої функції можна побудувати, розглянувши рівняння $(y-1)^2 = 8x - x^2 - 15$, якщо $y \geq 1$. Перетворивши останнє рівняння до вигляду $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$, отримаємо шуканий графік – півколо з центром (4; 1) і радіусом 1. На рис. 10 це дуга *AB*.

Всі прямі $y = ax$, що проходять між променями *OA* та *O*B перетинають дугу в одній точці. Одну точку з дугою мають пряма *OB* та дотична *OM*. Кутові коефіцієнти прямих *OB* та *OA* відповідно дорівнюють $\frac{1}{5}$ та $\frac{1}{3}$. Встановимо, що кутовий коефіцієнт дотичної *OM* дорівнює $\frac{8}{15}$, причому це можна зробити без похідної.

Якщо система $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ y = ax, \\ a > 0. \end{cases}$ має один корінь, то $a = \frac{8}{15}$.

Множина прямих $y = ax$ має з дугою *AB* тільки одну спільну точку якщо $\frac{1}{5} \leq a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$.

Відповідь. $\frac{1}{5} \leq a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$.

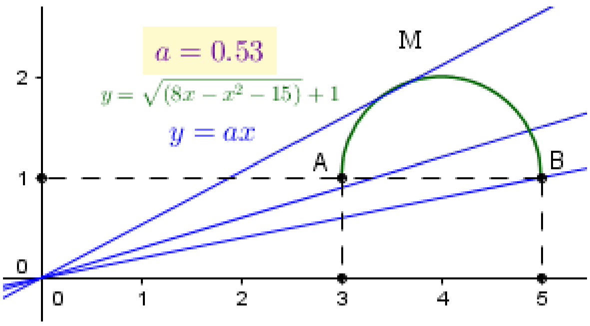

Рис. 10 а). Рівняння має єдиний розв'язок

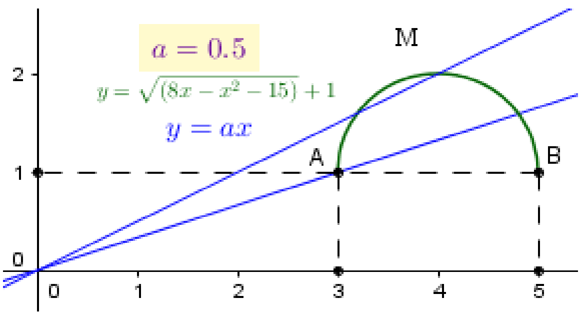

Рис. 10 б). Рівняння має два розв'язки

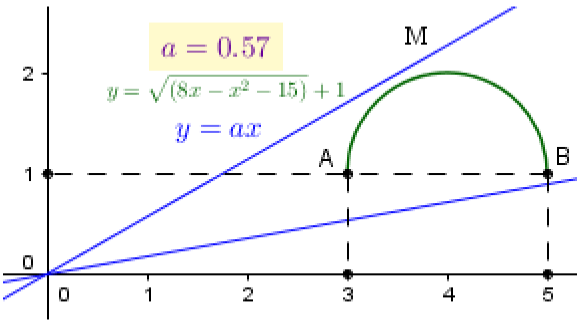

Рис. 10 с). Рівняння немає розв'язків

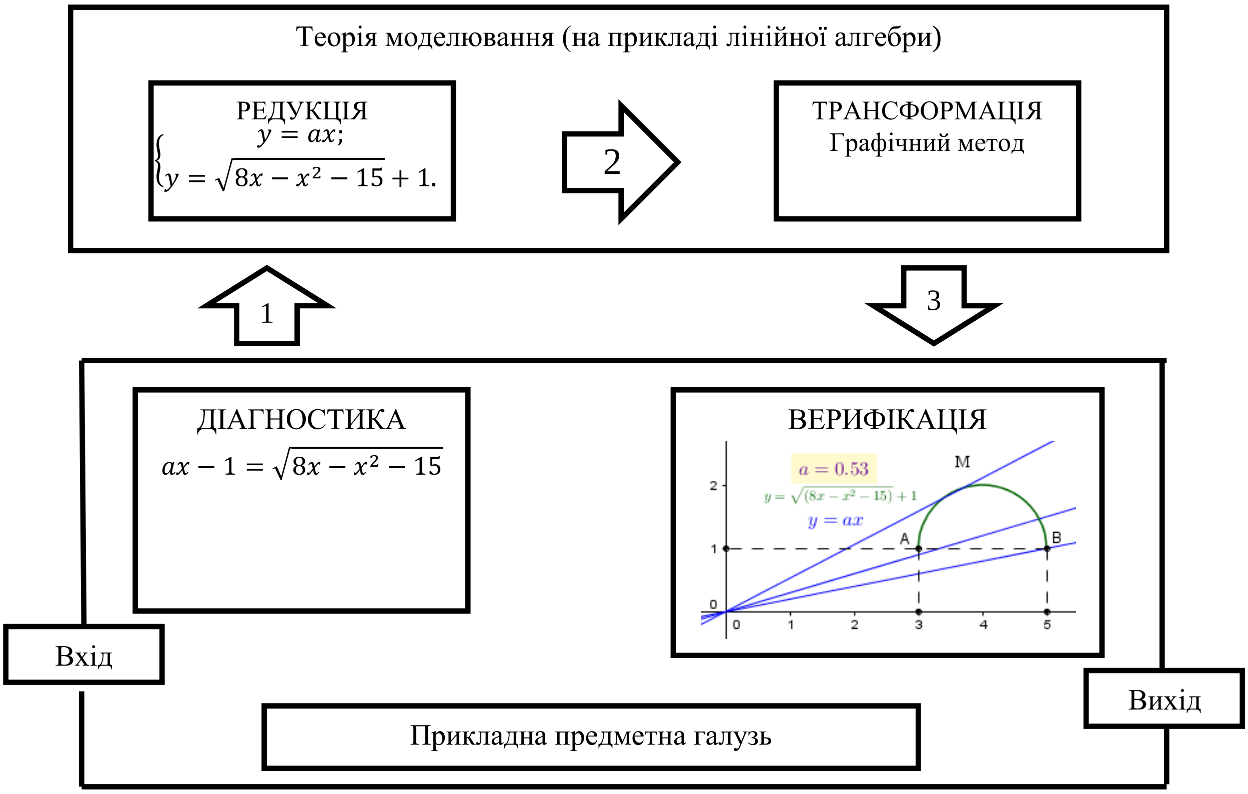

Рис.11

На основі детального аналізу основних концептів доцільно продемонструвати алгоритм розв'язування дослідницьких задач (рис. 12). Пропонована схема містить операції стратегічного рівня, що виконуються на етапі діагностики, та операції тактичного рівня, відповідно, виконуються на етапі редукції, що відображає поєднання операцій різних рівнів в єдиному процесі вирішення прикладної життєвої ситуації – ситуаційної задачі [1]. Етапи діагностики і редукції містять процедури аналізу проблеми, а етапи трансформації та верифікації – синтез ідеї розв'язування.

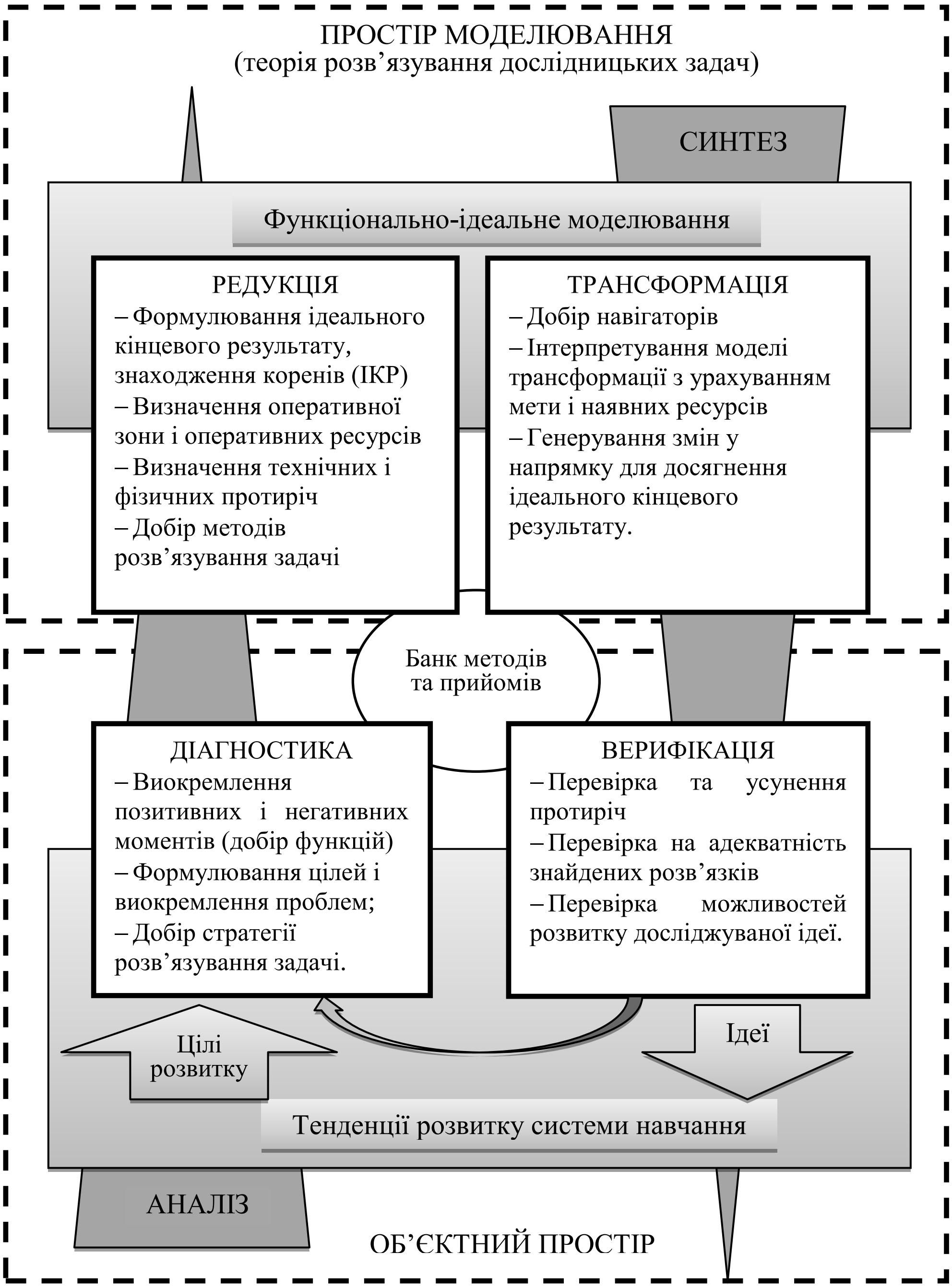

Рис. 12. Алгоритм розв'язування дослідницьких задач

Упродовж виконання всіх етапів доцільно посилатися на наявні бази знань, основу яких складають навігатори, моделі стратегічного і тактичного управління процесом вирішення прикладних проблем та життєвих ситуацій, методи психологічної підтримки та інші рекомендації фахівців конкретної галузі знань.

Доцільно зазначити на основі наших досліджень, що використання системи динамічної математики GeoGebra сприяє формуванню алгоритмічного стилю мислення, наочно демонструючи формальний, алгоритмічний характер щодо розв’язування прикладних задач, опановуванню сучасних інформаційно-комунікаційні технології. Процес вирішення прикладних завдань з використанням окремих компонентів комп’ютерно-орієнтованої системи навчання стимулює учнів до розумової активності та сприяє розвитку проектно-дослідницької діяльності. Перспективною та своєчасною вважається подальша робота у напрямку продовження створення та удосконалення наявного методичного забезпечення системи динамічної математики GeoGebra з метою покращення ефективності процесу навчання природничо-математичних дисциплін, відповідно – створенню варіативних моделей з метою забезпечення ефективності навчального процесу в загальноосвітньому навчальному закладі в контексті теорії розв’язування дослідницьких задач. Особливості щодо використання теорії розв’язування дослідницьких задач ґрунтуються на формулюваннях структури проблем, редукуванні їх щодо продуманих та спрощених форм у вигляді бінарних протиріч, що зумовлюється діагностикою проблем, виявленням їх дійсної сутності; формулюванні ідеальних цілей, моделюванням необхідних функцій, яким відповідатиме шуканий розв’язок, що стимулює відсто占ронення від стереотипного впливу звичних рішень в об'єктах навколишнього середовища; використанні досвіду створення ефективних досліджень для знаходження розв’язків ситуаційних задач; застосуванні законів розвитку пропонованих систем задля стратегічного добору напрямку відшуковування доцільних ідей розв’язування, послуговуючись окремими компонентами комп’ютерно орієнтованої системи навчання та методики покрокового аналізу прикладних проблеми і синтезу ідеї розв’язування з використанням пропонованих алгоритмів розв'язування проектно-дослідницьких завдань.

Список використаних джерел:

1. Альтшуллер Г. Алгоритм изобретения / Г. Альтшуллер. – М.: Московский рабочий, 1973. – 296 с.
2. Гриб’юк О. Вплив інформаційно-комунікаційних технологій на психофізіологічний розвиток молодого покоління. “Science”, the European Association of pedagogues and psychologists. International scientific-practical conference of teachers and psychologists “Science of future”: materials of proceedings of the International Scientific and Practical Congress. Prague

(Czech Republic), the 5th of March, 2014/ Publishing Center of the European Association of pedagogues and psychologists “Science”, Prague, 2014, Vol.1. 276 p. - S. 190-207.

3. Grybyuk O.O. Mathematical modelling as a means and method of problem solving in teaching subjects of branches of mathematics, biology and chemistry // Proceedings of the First International conference on Eurasian scientific development. «East West» Association for Advanced Studies and Higher Education GmbH. Vienna. 2014. P. 46-53.

4. Гриб’юк О.О. Психолого-педагогічні вимоги до комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики в контексті підвищення якості освіти// Гуманітарний вісник ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» - Додаток 1 до Вип.31, Том IV (46): Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – Київ: Гнозис, 2013. – С. 110-123.

5. Гриб’юк О. Математичне моделювання при навчанні дисциплін математичного та хіміко-біологічного циклів: навчально-методичний посібник для учителів / О.О. Гриб’юк. – Рівне: РДГУ, 2010. – 207 с.

6. Гриб’юк О. Педагогічне проектування комп’ютерно орієнтованого середовища навчання дисциплін природничо-математичного циклу. / О. Гриб’юк // Наукові записки. – Випуск 7. – Серія: Проблеми методики фізико-математичної і технологічної освіти. Частина 3. – Кіровоград.: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015. – С. 38 – 50.

7. Гриб’юк О. Розв’язування евристичних задач в контексті STEM-освіти з використанням системи динамічної математики GeoGebra / О. Гриб’юк, В. Юнчик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 43 / Редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 206 - 218.

8. Гриб’юк О. Система динамічної математики GeoGebra як засіб активізації дослідницької діяльності учнів / О. Гриб'юк, В. Юнчик // Інформаційно-комунікаційні технологіїї в сучасній освіті: досвід, проблеми,перспективи : зб. наук. пр. - К.-Л., 2015. - Вип.4. - Ч.1. - С. 163-167.

9. Гриб’юк О. Формування дослідницьких компетентностей учнів в процесі навчання математики з використанням системи динамічної математики GeoGebra / О. Гриб’юк, В. Юнчик // Інноваційні технології навчання обдарованої молоді: матеріали VI-ї Міжнародної науково-практичної конференції, 3-4 грудня 2015 року, м. Київ. – Київ: Інститут обдарованої дитини, 2015 – С. 420–428.

10. Орлов М. А. Основы классической ТРИЗ. Практическое руководство для изобрета-тельного мышления. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: СОЛОН-ПРЕСС. 2006. – 432 с.

11. Юнчик В. Модель змішаного навчання математики з використанням системи GeoGebra / В. Юнчик // Гуманітарний відділ ДВНЗ «Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет імені Григорія Сковороди» - Додаток 1 до Вип. 36, Том IV (64) : Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – К.: Гнозис, 2015. – С. 559-568.

Anotation: The efficiency of using GeoGebra system in the process of solving mathematical problems is demonstrated. Attention is focused on the features of the theory of solving research problems. The algorithm for solving research problems and the basic stages of research activity are shown. Many examples which were solved by means of dynamic mathematics GeoGebra are cited. The guidelines (actual step by step problem solving) which give approximate basis of activity aimed at solving problems are added to each of the examples. The ways of forming informativ competence of the future specialists are demonstrated. The main components of informativ competence are shown. We consider algorithmic search strategy which is built on the basis of procedural development of the study in the form of an algorithm for sequencing operations , actions , processing etc.

Keywords: theory for solving research problems; algorithm for solving research problems; research activity; GeoGebra; diagnostics, reduction, transformation, verification, design and research activities.

Аннотация: В исследовании продемонстрирована эффективность использования системы GeoGebra в процессе решения математических задач. Приведены инновационные аспекты системы динамической математики GeoGebra. Внимание акцентируется на особенностях применения теории решения исследовательских задач. Продемонстрировано алгоритмы решения исследовательских задач и рассматриваются этапы процесса исследования. Приведен ряд задач, решенных с использованием системы динамической математики GeoGebra в контексте теории решения исследовательских задач. Акцентируется внимание на основных этапах решения исследовательских задач (диагностика и редукция, содержащие процедуры анализа проблемы; этапы трансформации и верификации, состоящие в синтезе идеи решения). В исследовании продемонстрированы основные этапы проектно-исследовательской деятельности.

Ключевые слова: теория решения исследовательских задач, алгоритм решения исследовательских задач, исследовательская деятельность, GeoGebra, диагностика, редукция, трансформация, верификация, проектно-исследовательская деятельность.