

**ЗАСТОСУВАННЯ МОБІЛЬНОГО МАТЕМАТИЧНОГО СЕРЕДОВИЩА
SAGE У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ
СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ ВНЗ**

У статті розглядається проблема застосування мобільного математичного середовища Sage як засобу навчання вищої математики студентів економічних ВНЗ.

Ключові слова: мобільні математичні середовища, вища математика, студенти економічних ВНЗ, Sage.

Постановка проблеми. Під час вивчення курсу вищої математики у студентів економічних спеціальностей виникає ряд труднощів, пов'язаних, по-перше, з низьким рівнем математичної підготовки вступників (адже зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО) з математики для студентів, які вступають до економічного вищого навчального закладу, часто замінюється ЗНО з історії); по-друге – з особливостями математики як предмета, що має достатньо складну логічну структуру означень, теорем і вимагає високого рівня розвитку абстрактного мислення; по-третє – останнім часом через брак аудиторного часу значний обсяг навчального матеріалу студенти повинні опрацювати самостійно.

Крім того, сучасні тенденції ринку праці вимагають від випускників економічних вищих навчальних закладів не тільки фундаментальних теоретичних знань та вмінь застосовувати їх на практиці, а й навичок розв'язування прикладних задач, пов'язаних з умінням прогнозувати певні економічні явища та ситуації, розробляти стратегії управління, проводити різні економічні дослідження та вміння зробити правильний висновок, аналізуючи результати моделювання.

Аналіз останніх досліджень. Важливу роль у подоланні зазначених проблем відіграють інформаційно-комунікаційні технології математичного призна-

чення, зокрема, системи комп'ютерної математики (СКМ). Використання СКМ в курсі вищої математики дозволяє: 1) більш наочно і зрозуміло подати теоретичний матеріал; 2) позбавити студентів від виконання рутинних обчислень, що вивільняє час для більш глибокого обміркування і засвоєння алгоритмів розв'язування задач та проведення навчальних досліджень; 3) забезпечити багаторівневий процес навчання, поступово переходячи від основних математичних понять через виконання практичних завдань до розв'язування задач прикладної спрямованості, задач з економічним змістом.

Використання СКМ є досить ефективним при вивченні дисциплін математичного циклу, про що свідчать роботи таких науковців, як М. І. Жалдак, С. А. Раков, Ю. В. Триус, Ю. С. Рамський, В. І. Клочко, Т. П. Кобильник, А. О. Черняк, В. П. Дьяконов та інших.

Проте, питання розробки методики впровадження діяльнісних математичних середовищ у навчальний процес вищої школи залишається ще недостатньо розробленим. Особливо гострою є потреба у розробці методики застосування мобільних Web-середовищ, за допомогою яких можна інтегрувати аудиторну й позааудиторну роботу у безперервний навчальний процес. До визначальних характеристик мобільних математичних середовищ відносяться:

- виконуваність на широкому спектрі комп'ютерних пристроїв, що дозволяє залучити до навчального процесу з вищої математики мультимедійні дошки, нетбуки та смартфони;

- виконання та зберігання математичних об'єктів на Інтернет-серверах, що дозволяє надати уніфікований мережний доступ до навчальних матеріалів як в аудиторії, так і за її межами;

- можливість природного застосування ефективних педагогічних технологій організації спільної роботи (соціального конструктивізму, коннективізму та конструкціонізму) над навчальними проектами у навчальних спільнотах (як аудиторних, так і розподілених);

- можливість організації в межах одного середовища повного циклу навчання: а) зберігання та подання навчальних матеріалів; б) математичних дослід-

джен; в) індивідуальної та колективної роботи; г) оцінювання навчальних досягнень.

Яскравим представником мобільних математичних систем є Web-СКМ Sage.

Метою статті є висвітлення можливостей мобільного математичного середовища Sage у процесі навчання вищої математики студентів економічних ВНЗ.

Основна частина. Sage не просто СКМ – він може виступати і як інтегратор різних математичних пакетів, надаючи їм спільний Web-інтерфейс.

За допомогою Sage можна:

1) виконувати будь-які обчислення, як аналітичні (дії з алгебраїчними виразами, розв'язування рівнянь, диференціювання, інтегрування тощо), так і чисельні (точні – з будь-якою розрядністю, наближені – з будь-якою, наперед заданою точністю);

2) подавати результати обчислень у зручній для сприйняття формі, будувати дво- та тривимірні графіки кривих та поверхонь, гістограми та будь-які інші зображення (в тому числі анімаційні);

3) поєднувати обчислення, текст та графіку на робочих листах з можливістю їх друку, оприлюднення в мережі та спільної роботи над ними;

4) створювати за допомогою вбудованої у Sage мови Python моделі для виконання навчальних досліджень;

5) створювати нові функції та класи мовою Python [1].

До основних напрямків застосування Sage в процесі навчання вищої математики відноситься:

- графічні інтерпретації математичних моделей та теоретичних понять;
- автоматизація рутинних обчислень;
- підтримка самостійної роботи.

I. В процесі навчання вищої математики з метою поглиблення розуміння сутності теоретичних положень доцільно використовувати графічні інтерпретації математичних моделей, дослідження яких дозволяє глибше усвідомити новий матеріал та створити змістову основу для розв'язання прикладних задач.

Покажемо, як можна застосувати Sage при вивченні теми «Наближене обчислення визначених інтегралів».

У відповідності до означення інтегралу, він є границею інтегральної суми, якщо число точок розбиття прямує до нескінченності а діаметр цього розбиття – до нуля. Якщо число точок розбиття не прямує до нескінченності, то замість інтегральної суми отримаємо її наближене значення.

Основна ідея наближеного обчислення визначеного інтеграла полягає в наступному:

1) поділити відрізок $[a;b]$ на n рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad k = 0,1,2,\dots,n.$$

2) знайти значення функції $f(x)$ в цих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

3) використати одну з квадратурних формул наближеного обчислення визначеного інтеграла – формулу прямокутників (лівих, правих або середніх), трапецій, Сімпсона тощо.

Доцільно на практичних заняттях розглянути завдання, в яких вимагається обчислити визначений інтеграл наближено за допомогою кількох формул та оцінити абсолютні похибки, отримані при розрахунках.

Наприклад, обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx$.

Даний інтеграл від біноміального диференціала є прикладом такого інтегралу, що в елементарних функціях не обчислюється. Обчислимо його наближено. Розіб'ємо відрізок $[0;1]$ на 10 рівних частин точками

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0,1, \quad x_2 = 0,2, \quad \dots, \quad x_9 = 0,9, \quad x_{10} = 1.$$

Знайдемо значення функції $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ в цих точках. Результати запишемо до таблиці:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
-------	---	-----	-----	-----	-----	-----

$f(x_i)$	1	1,00005	1,00080	1,00404	1,01272	1,03278
x_i	0,6	0,7	0,8	0,9	1	
$f(x_i)$	1,06283	1,11360	1,18727	1,28690	1,41421	

За формулою лівих прямокутників маємо:

$$I \approx \frac{1}{10} \sum_0^9 f(x_i) = \frac{1}{10} (1 + 1,00005 + 1,00080 + 1,00404 + 1,01272 + 1,03278 + 1,06283 + 1,11360 + 1,18727 + 1,28690) = 1,06990$$

Оскільки

$$f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} \quad \text{і} \quad \max_{x \in [0;1]} f'(x) = \sqrt{2},$$

то абсолютна похибка наближення

$$|\Delta_{10}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 10} = 0,03536.$$

Отже,

$$I = 1,06990 \pm 0,03536.$$

За формулою трапецій отримаємо

$$I \approx \frac{1}{20} \left(1 + 1,41421 + 2 \sum_1^9 f(x_i) \right) = \frac{1}{20} (1 + 1,41421 + 2(1,00005 + 1,00080 + 1,00404 + 1,01272 + 1,03278 + 1,06283 + 1,11360 + 1,18727 + 1,28690)) = 1,09061$$

Оскільки

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4 + 3)}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \quad \text{і} \quad \max_{x \in [0;1]} f''(x) = 2\sqrt{2},$$

то абсолютна похибка наближення

$$|\Delta_{10}| \leq \frac{\sqrt{2}}{12 \cdot 10^2} \approx 0,00236.$$

Отже,

$$I = 1,09061 \pm 0,00236.$$

За формулою Сімпсона ($2n = 10$)

$$I \approx \frac{1}{30} \left(1 + 1,41421 + 2 \sum_0^8 f(x_{2i+2}) + 4 \sum_0^9 f(x_{2i+1}) \right) = 1,08949.$$

Оскільки

$$f^{IV}(x) = \frac{12(1 - 14x^4 + 5x^8)}{\sqrt{(1 + x^4)^7}} \quad \text{і} \quad \max_{x \in [0;1]} f^{IV}(x) = 15\sqrt{2},$$

то абсолютна похибка наближення

$$|\Delta_5| \leq \frac{15\sqrt{2}}{2880 \cdot 5^4} \approx 0,000012.$$

Отже,

$$I = 1,08949 \pm 0,000012.$$

За оцінками похибок відмічаємо, що найменшою є похибка при наближеному обчисленні інтегралу за формулою Сімпсона, тобто формула Сімпсона є точнішою за формули прямокутників і трапецій.

Крім завдань такого змісту, на наш погляд, доцільним було б запропонувати студентам розглянути модель, яка демонструє різні способи наближених обчислень інтегралів, залежність результату обчислень від кількості інтервалів розбиття тощо. Важливим є те, що студент має можливість сам задавати кількість інтервалів, підінтегральну функцію, встановлювати межі інтегрування та обирати формулу, за якою здійснюються обчислення, тобто у студента є можливість виконати навчальне дослідження. На рис. 1 показано інтерфейс користувача пропонованої моделі наближеного обчислення інтегралу. Зауважимо також, що побудовану модель можна застосувати й у процесі введення поняття визначеного інтегралу.

II. Також застосування Sage дозволяє автоматизувати обчислювальний процес розв'язування задач прикладної спрямованості, зосередившись на побудові моделі та інтерпретації результатів обчислювального експерименту.

Так, під час вивчення теми «Матриці та дії над ними» пропонуємо студентам розв'язати наступну задачу:

Підприємство випускає m видів продукції з використанням n видів сировини. Норми витрат сировини задані матрицею A , в якій на позиції (i, k) знаходиться число рівне кількості сировини, що витрачається (кг) k -го виду на виробництво одиниці продукції i -го виду. План об'єму випуску продукції задано вектором-рядком Q , в якому i -й елемент дорівнює кількості одиниць продукції i -го виду.

Вектор-рядок S задає собівартість одиниці сировини кожного виду, а вектор-рядок T задає транспортні витрати на одиницю сировини кожного виду (k -ті елементи цих векторів відповідають k -му виду сировини). Користуючись тільки множенням матриць, знайти: 1) кількість сировини кожного виду для виконання планового випуску продукції; 2) виробничі та транспортні витрати на сировину, що витрачається на виробництво одиниці продукції кожного виду; 3) витрати на сировину, необхідну для виконання плану.

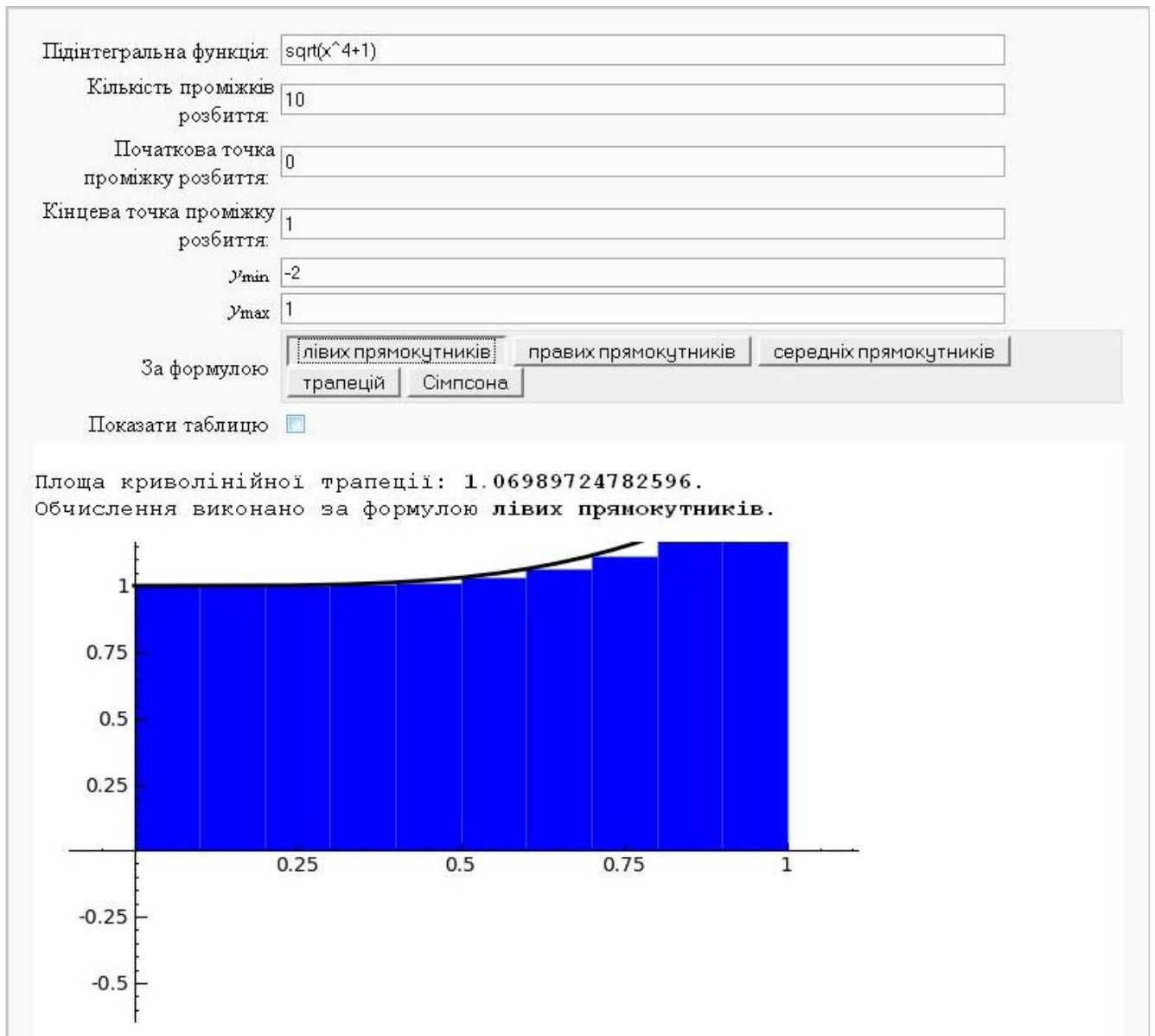


Рис. 1. Інтерфейс користувача моделі для наближеного обчислення інтегралів

Математичною моделлю задачі є наступні матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 8.2 & 3 & 5.3 & 13.2 & 25 & 1.1 \\ 1.5 & 8.2 & 2 & 7.1 & 15.8 & 21 & 0.9 \\ 7 & 8 & 6 & 11 & 2.4 & 8 & 0.5 \\ 4 & 9.1 & 2 & 5 & 3.2 & 15 & 0.3 \\ 3 & 8.5 & 12 & 3.5 & 1.8 & 17 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$Q = (160 \quad 125 \quad 140 \quad 311 \quad 83)$$

$$S = (150 \quad 22 \quad 13 \quad 15 \quad 81 \quad 211 \quad 400)$$

$$T = (8 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1)$$

Аналізуючи умову задачі, доходимо висновку, що для знаходження кількості сировини кожного виду за умов виконання планового випуску продукції необхідно перемножити дві матриці Q та A . Оскільки, серед елементів матриці A є й дробові числа, а розмірність матриці для ручних обчислень «велика», доцільним є автоматизація засобами Sage.

Для цього спочатку потрібно задати матриці Q і A та виконати операцію множення:

```
Sage: A=matrix([[2.5,8.2,3,5.3,13.2,25,1.1],[1.5,8.2,2,7.1,\
15.8,21,0.9],[7,8,6,11,2.4,8,0.5],[4,9.1,2,5,3.2,15,0.3],[3,8.5,\
,12,3.5,1.8,17,0.4]]);A
```

```
Sage: Q=matrix([160,125,140,311,83]);Q
```

```
Sage: Q*A
```

```
Sage: (3060.5      6992.6   3188.0   5121.0   5567.6   13821.0   485.0)
```

Для обчислення виробничих витрат треба норми витрат сировини помножити на собівартість одиниці сировини кожного виду, тобто перемножити матриці A та транспоновану матрицю S :

```
Sage: S=matrix([150,22,13,15,81,211,400]);S
```

```
Sage: [150, 22, 13,15,81,211,400]
```

```
Sage: M=A*S.transpose();M
```



```
Sage:  $\begin{pmatrix} 7458.1 \\ 6608.7 \\ 3551.4 \\ 4445.4 \\ 4738.3 \end{pmatrix}$ 
```

Для розрахунку транспортних витрат необхідно знайти добуток матриць T та S^T :

```
Sage: T=matrix([8,2,3,3,2,4,1]);T
Sage: [8, 2, 3, 3, 2, 4, 1]
Sage: N=T*S.transpose();N
```

```
Sage:  $\begin{pmatrix} 188.8 \\ 172.2 \\ 160.3 \\ 137.9 \\ 159.3 \end{pmatrix}$ 
```

Для знаходження витрат на сировину, необхідну для виконання плану, транспонуємо матрицю M і множимо на матрицю N :

```
Sage: K=M.transpose()
Sage: K*N
Sage: (4422678.2)
```

III. Останнім часом невід'ємною частиною навчального процесу є самостійна робота студентів.

Основною формою організації самостійної роботи було обрано *модульні домашні завдання*, у вигляді робочих зошитів, що містять листи Sage (рис. 2). Вони складаються з прикладів розв'язування типових завдань по темі модуля та задач для самостійного опрацювання трьох типів. Завдання першого типу призначені для відпрацювання навичок «ручного» розв'язування задач. Під час виконання цих завдань студенти мають можливість застосування Sage для перевірки не тільки остаточного результату обчислень, а й проміжних значень. Завдання друго-

го типу є комп'ютерно-орієнтованими. До них відносять задачі витрати часу на ручне розв'язання яких, невиправдано перевищують час створення моделі. Завдання третього типу відносять до творчих, які передбачають виконання дослідження математичної моделі засобами Sage.

матриці і визначники (Sage) - Mozilla Firefox

Файл Правка Вид Журнал Закладки Інструменти Справка

http://192.168.63.128/home/admin/78/

Самые популярные Начальная страница Лента новостей

```
A=matrix([[2,-1,-3],[8,-7,-6],[-3,4,2]])
B=matrix([[2,-1,-2],[3,-5,4],[1,2,1]])
C=matrix([[0,-5,-2],[2,-5,4],[1,2,1]])
K=A+B
D=K.transpose()-5*C
det(D)
```

ВЫЧИСЛИТЬ

5592

Перший варіант обчислення є більш наочним і дає можливість легко знаходити помилки.

Примітка: Слід зазначити, що для того щоб матриці були зображені у звичному для нас вигляді використовуємо команду *show*.

ЗАДАЧА 2

Знайти значення матричного многочлена

$$f(X) = 2X^3 + 3X + 5E,$$

де $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, E - одинична матриця третього порядку.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Спочатку знайдемо матрицю X^2 . Для цього потрібно матрицю X три рази помножити на саму себе. Отже,

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 8 + (-3) \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-7) & 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-6) \\ 8 \cdot 2 + (-7) \cdot 8 + (-6) \cdot (-3) & 8 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-7) & 8 \cdot (-3) + (-7) \cdot (-6) \\ (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot (-3) & (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot (-7) + 2 \cdot (-3) & (-3) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

Готово

Рис. 2. Робочий лист до теми «Матриці і визначники»

Зауважимо, що ефективність впровадження у навчання СКМ забезпечується педагогічно виваженим добором змісту, методів і засобів навчання, зокрема комп'ютерних програм, форм і методів їх використання та систематичністю роботи студентів із комп'ютером [3].

Висновки:

1. Одним із сучасних засобів навчання математики є мобільні математичні середовища, застосування яких дозволяє: виконувати будь-які обчислення, як аналітичні, так і чисельні; подавати результати обчислень у зручній для сприйняття формі, будувати дво- та тривимірні графіки кривих та поверхонь, гістограми та будь-які інші зображення (в тому числі анімаційні); поєднувати обчислення, текст та графіку на робочих листах з можливістю їх друку, оприлюднення в мережі та спільної роботи над ними; створювати за допомогою вбудованої у Sage мови Python моделі для виконання навчальних досліджень; створювати нові функції та класи мовою Python.

2. В процесі навчання вищої математики мобільні математичні середовища доцільно застосовувати за трьома напрямками: графічні інтерпретації математичних моделей та теоретичних понять; автоматизація рутинних обчислень; підтримка самостійної роботи.

3. Для організації самостійної роботи студентів з вищої математики доцільно використовувати модульні робочі зошити, що складаються з прикладів розв'язування типових завдань та задач на самостійне опрацювання, реалізованих в математичному середовищі Sage.

ЛІТЕРАТУРА

1. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. – 2009. – 316 с.
2. Словак К. І. Організація контролю самостійної роботи студентів в умовах модульно-рейтингової технології навчання / Словак К. І. // Вісник Черкаського університету : Серія «Педагогічні науки». – Вип. 150. – Черкаси: Вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2009. – С. 117 – 122.
3. Шавальова О. В. Реалізація компетентнісного підходу у математичній підготовці студентів медичних коледжів в умовах комп'ютеризації навчання : автореф. дис. на здобуття наукового ступеня канд. пед. наук за спеціальністю 13.00.02 «Теорія і методика навчання математики» / Шавальова О. В. ; Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова. – Київ, 2007.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается проблема применения мобильной математической среды Sage как средства обучения высшей математике студентов эко-

номических ВУЗов.

Ключевые слова: *мобильные математические среды, высшая математика, студенты экономических ВУЗов, Sage.*

SUMMARY

The problem of using mobile mathematical environment Sage as the method of studying by students of economic higher education establishment is examined in the article.

Key words: *mobile mathematical environment, higher mathematics, students of economic higher educational establishment, Sage.*