НА ПЕРЕХРЕСТІ ЕКОЛОГІЇ, МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ Й ФІЗИКИ

І. О. Теплицький, С. О. Семеріков
Україна, м. Кривий Ріг, Криворізький національний університет

Постановка проблеми. Основи науки єдині. «Наука являє собою внутрішньо єдине ціле. Її поділ на окремі області обумовлений не стільки природою речей, скільки обмеженістю здібностей людського пізнання. Насправді ж не існує переривчастастого ланцюга від фізики і хімії через біологію та антропологію до соціальних наук. ... Велику внутрішню схожість мають і методи дослідження ... ». На перший погляд може здатися, що автор цих думок – представник «гуманітарного мислення», а насправді вони висловлені німецьким фізиком, лауреатом Нобелівської премії Максом Планком [1, 183].

Навчаючи школярів і студентів основ комп’ютерного моделювання, бажано постійно звертати увагу на той факт, що будь-яка більш-менш складна задача на складання й опрацювання математичної моделі, до якої предметної галузі ми б її не віднесли, як правило, вимагає залучення відомостей з ряду інших галузей. Дійсно, опрацьовуючи задачі з фізики, хімії, екології тощо, нам доводиться звертатись до математики, статистики, системного аналізу тощо, але, насамперед, ми зобов’язані обрати комп’ютерне середовище для моделювання (середовище розробки), тобто скористатись методами інформатики. Таку комплексну проблематику ілюструє пропонований нижче матеріал, який, на перший погляд, відноситься до предметної галузі «популяційна математична екологія».

Відомо, що популяції в природі існують, а точніше, співіснують як співтовариства різних видів, що перебувають у різноманітних стосунках. Тому природним є дослідження простих моделей співіснування двох популяцій. Класифікація таких моделей здійснюється відповідно до типу міжвидових стосунків: 1) модель «хижак – жертва»; 2) модель «паразит – хазяїн»; 3) модель конкуренції за обмежені спільні ресурси існування тощо.

Зазначимо, що математична екологія як наука почала формуватися у 20–30-х роках XX століття. Визначальною подією для подальшого розвитку цієї науки стала поява в 1931 р. книги відомого італійського математика і фізика, засновника сучасної математичної екології Віто Вольтерра «Математична теорія боротьби за існування» [7]. В цій книзі вперше були систематично розглянуті математичні моделі, що описують відношення між двома біологічними видами. Один із розділів був присвячений аналізу взаємин між хижаками і жертвами. Ці драматичні відносини ми й покладемо в основу подальшої роботи.

Аналіз останніх досліджень з вирішення загальної проблеми та виділення невирішених питань. У роботах [8; 9] висвітлено властивості систем Лотки-Вольтерри, у роботах [2–5] розглянуті основні елементи педагогічної технології комп'ютерного моделювання, систематично викладеної у навчальному посібнику [6]; наводяться численні приклади її застосування до побудови й дослідження детермінованих навчальних моделей у середовищі електронних таблиць.

Метою статті є розгляд системних зв'язків природничих наук у процесі навчання комп'ютерного моделювання.

Виклад основного матеріалу.

Метою дослідження поставимо питання про характер зміни чисельності представників кожного виду із плином часу.

I. Постановка задачі і побудова математичної моделі

Нехай у ставку з карасями (жертвами) з'являються щуки (хижаки).

На те і щука у ставку,
щоб карась не дрімав.

Припущення 1. За умови, що хижаки й жертви ізольовані одні від одних, а зовнішніх обмежень на ресурси середовища (їжа, простір, світло) для карасів немає, динаміку кожної популяції для достатньо малих проміжків часу Δt можна описати законом Мальтуса, де всі індекси «1» відносяться до жертв, а індекси «2» – до хижаків.

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1 \\ \dfrac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2 \end{cases}$$

Тут $k_1 = \dfrac{\Delta N_1}{N_1 \Delta t}$ і $k_2 = -\dfrac{\Delta N_2}{N_2 \Delta t}$ – відповідні відносні прирости чисельності жертв і хижаків за одиницю часу. Знак « – » у другому рівнянні означає, що ізольовані від жертв (їжі) хижаки матимуть від'ємний приріст, тобто їхня чисельність із плином часу зменшуватиметься, і вони вимиратимуть.

Але якщо хижаки й жертви опиняються поруч, зміни чисельності обох популяцій стають взаємозалежними. За цих умов приймемо

Припущення 2. Швидкість приросту жертв має залежати від розмірів популяції хижаків: вона зменшується зі зростанням чисельності хижаків. Для швидкості приросту хижаків справджується протилежне: швидкість приросту хижаків збільшуватиметься одночасно зі зростанням чисельності жертв.

Оскільки хижак з'їдає жертву лише при зустрічі з нею, приймемо

Припущення 3. Число зустрічей пропорційне як кількості жертв N_1, так і хижаків N_2, тобто добутку $N_1 \cdot N_2$.

Для опису стосунків між популяціями В. Вольтерра запропонував таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta N_1}{\Delta t} = k_1 N_1 - a_1 N_1 N_2 \\ \dfrac{\Delta N_2}{\Delta t} = -k_2 N_2 + a_2 N_1 N_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Тут N_1, N_2 – відповідно чисельності жертв і хижаків у деякий момент часу; k_1, a_1, k_2, a_2 – постійні коефіцієнти.

Завдання. Поясніть, чому вирази, що пропорційні добутку $N_1 \cdot N_2$, входять до рівнянь системи (1) з протилежними знаками?

Перепишемо наведену систему (1) у формі скінчених різниць:

$$\begin{cases} \Delta N_1 = N_1 (k_1 - a_1 N_2) \Delta t \\ \Delta N_2 = -N_2 (k_2 - a_2 N_1) \Delta t \end{cases} \qquad (2)$$

Система рівнянь (1) або (2) є математичною моделлю динаміки співіснування двох біологічних видів на основі відносин «хижак – жертва». У математичній екології ця модель відома під назвою «модель Лотки-Вольтерри».

В. Вольтерра згадував, що у 1925 році його знайомий розповів цікавий факт. Коли в роки першої світової війни та в перші повоєнні роки інтенсивність промислів на Адріатиці різко скоротилась, то в уловах почали спостерігати помітне зростання відносної долі хижих риб. Щоб пояснити цей факт, В. Вольтерра й запропонував модель (1).

Завдання. Поясніть, як система (1) або (2) враховує наведений факт.

При формалізації стосунків «хижак – жертва» приймемо далі

Припущення 4. Коефіцієнти моделі k_1, a_1, k_2, a_2 не залежать від того, яку саме частину кожної популяції ми бажаємо описати. Таку популяцію називають просторово однорідною. Дійсно, у випадку неоднорідного розподілу хижаків і жертв може скластися ситуація, коли частина хижаків знаходиться дуже далеко від жертв (a_2 малий), а решта – поблизу (a_2 великий). В такому разі опис кожної популяції системою рівнянь (1) стає неможливим.

Припущення 5. Будемо вважати, що коефіцієнти моделі є сталими в просторі і не змінюються з плином часу.

II. Комп'ютерна модель

Виявилося, що модель Лотки-Вольтерри не має точних аналітичних розв'язків, тобто неможливо виразити $N_1(t)$ і $N_2(t)$ через відомі елементарні функції. Тому єдине, що залишається в означеній ситуації – це скористатися чисельним розв'язуванням. То ж підготуємо таблицю за таким зразком:

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	N_1	N_2	ΔN_1	ΔN_2	Дано:	
2						$k_1 =$	
3						$k_2 =$	
4						$a_1 =$	
5						$a_2 =$	
6						$N_{01} =$	
7						$N_{02} =$	
8						$\Delta t =$	
…	...	...	...	...	...		

Комірки другого рядка (для моменту часу $t = 0$) матимуть такий уміст:

комірки	формули / числа
A2	0
B2	=$G$6
C2	=$G$7
D2	=B2*($G$2-$G$4*C2)*$G$8
E2	=-C2*($G$3-$G$5*B2)*$G$8

Заповнимо третій рядок, який далі скопіюємо у наступні n рядків, де $n = t_{\text{моделювання}}/\Delta t$:

комірки	формули
A3	=A2+$G$8
B3	=B2+D2
C3	=C2+E2
D3	=B3*($G$2-$G$4*C3)*$G$8
E3	=-C3*($G$3-$G$5*B3)*$G$8

Тепер можна розпочинати

ІІІ. Обчислювальний експеримент

1. Уведемо такі вхідні дані: $k_1 = 5$; $k_2 = 0{,}001$; $a_1 = 0{,}002$; $a_2 = 10$; $N_{01} = 15000$; $N_{02} = 2500$; $\Delta t = 0{,}01$. Візьмемо кількість рядків таблиці $n \approx 400$.

2. Результати моделювання подані на рис. 1.

3. З таблиці й графіків на рис. 1 видно, що зміни чисельності, як хижаків, так і жертв, є коливаннями із майже однаковими періодами (переконайтесь за таблицею) та зі зростаючими амплітудами.

Питання

3.1. Чим, на вашу думку, обумовлене зростання амплітуд?

3.2. Як ви вважаєте, чому фази цих коливань не співпадають?

4. За графіками бачимо, що із самого початку коливання чисельності хижаків відбуваються навколо значення 10000, а жертв – 2500.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	N_1	N_2	ΔN_1	ΔN_2	Дано:	
2	0,00	15000	2500	0	125	$k_1 =$	5
3	0,01	15000	2625	-38	131	$k_2 =$	10
4	0,02	14963	2756	-77	137	$a_1 =$	0,002
5	0,03	14886	2893	-117	141	$a_2 =$	0,001
6	0,04	14769	3034	-158	145	$N_{01} =$	15000
7	0,05	14611	3179	-198	147	$N_{02} =$	2500
8	0,06	14413	3326	-238	147	$\Delta t =$	0,01
...	...	...	...	...	...		

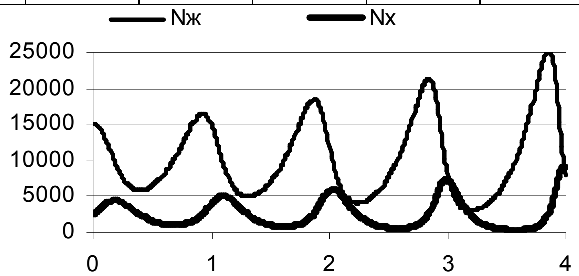


Рис. 1

Перевіримо, чи не відповідають ці значення рівноважному стану розглядуваного співтовариства. Узявши N_{01} = 10000, ми одразу одержуємо відповіді й, крім того, принципово важливий результат: модель Лотки-Вольтерри передбачає рівноважний стан (рис. 2).

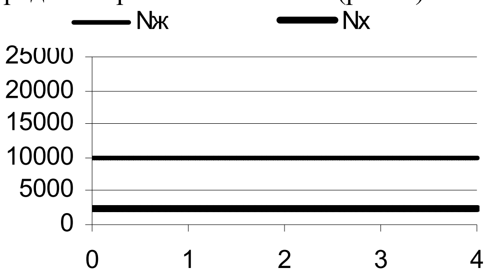


Рис. 2

Тут слід зазначити, що нам просто пощастило. Якби значення параметра N_{01}, що відповідає рівноважному стану, знаходилось не в точці 10000, то пошуки його шляхом обчислювальних експериментів могли б виявитись досить тривалими. Далі слід було б зафіксувати деяке значення параметру N_{01}, а експериментувати з параметром N_{02}. Та виявляється, в цьому немає потреби: оскільки рівноважному стану відповідає $\Delta N_1 = 0$ і $\Delta N_2 = 0$, то з (2) одразу видно, що нулю мають дорівнювати вирази в дужках: $k_1 – a_1 N_2 = 0$ і $k_2 – a_2 N_1 = 0$, звідки для будь-якого, зокрема й початкового моменту $t = 0$, маємо

$$N_{02} = k_1/a_1 \text{ і } N_{01} = k_2/a_2 \qquad (3)$$

Перевірка дає: $N_{02} = 5/0{,}002 = 2500$ і $N_{01} = 10/0{,}001 = 10000$.

Отже, рівноважні стани повністю визначаються значеннями параметрів k_1, a_1, k_2 і a_2 – коефіцієнтів моделі. При одержанні розв'язку (3) передбачалося, що чисельності N_1 і N_2 не змінюються з часом ($\Delta N_1 = 0$ і $\Delta N_2 = 0$). Це один із багатьох розв'язків – стаціонарний.

Коротко підсумуємо, що зроблено на цей момент.

4.1. На початку 30-х років XX ст. Віто Вольтерра поєднав математичне моделювання з популяційною екологією, і в результаті утворилося нове перехрестя наук – сучасна математична екологія.

4.2. Модель «хижак – жертва» не має аналітичних розв'язків, і єдиний вихід тут – це застосувати чисельне розв'язування, що зручно робити з використанням комп'ютера.

4.3. Залучення комп'ютера до розв'язування задач математичної екології привело на згадане перехрестя ще одну природничу науку – інформатику.

5. Залишився не з'ясованим той факт, що періоди коливань чисельності хижаків і жертв, по-перше, однакові між собою і, по-друге, ці періоди не залежать від значень, що їх набувають N_1 і N_2 у ході своєї зміни. Оскільки коливні процеси є предметом вивчення фізики, і ми навіть вже скористались деякими поняттями теорії коливань (амплітуда, період, фаза), фізика поки що не сказала свого вирішального слова.

5.1. Припустимо, що система «хижак – жертва» якимось чином (не має значення, яким саме) опинилась поблизу рівноваги. При цьому чисельності хижаків і жертв мало відрізняються від відповідних стаціонарних значень.

Нехай $N_1 = k_2/a_2 + n$ і $N_2 = k_1/a_1 + x$, де n, x малі у порівнянні з N_1, N_2.

Якщо ці вирази підставити в (1) і знехтувати добутком nx внаслідок його малості у порівнянні з рештою членів, то одержуємо

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta n}{\Delta t} = -k_2 \dfrac{a_1}{a_2} x; \\ \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = k_1 \dfrac{a_2}{a_1} n. \end{cases} \qquad (4)$$

Уведемо нову змінну $\upsilon = k_1 \dfrac{a_2}{a_1} n$. Після відповідної заміни система

(4) набуває такого спрощеного вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon\,; \\ \dfrac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = -k_1 k_2 x. \end{cases} \qquad (5)$$

5.2. Якби ми нічого не знали про модель Лотки-Вольтерри, і перед нами було б поставлене питання: «Що саме описує система рівнянь (5), де k_1 і k_2 – деякі постійні числа?», то рано чи пізно у цій системі ми б, напевно, впізнали рівняння, що описують рух вантажу на пружині за умови, що x – зміщення вантажу від положення рівноваги, υ – швидкість вантажу і вираз $k_1 \cdot k_2$ дорівнює відношенню жорсткості пружини до маси вантажу. Звідси випливає, що система (5) має такий самий розв'язок, як і задача про малі коливання вантажу на пружині – пружинного маятника.

Збіг рівнянь, що описують малі коливання пружинного маятника і чисельність особин у системі «хижак – жертва» поблизу зі стаціонарним станом, дозволяє стверджувати, що кількості хижаків і жертв повинні змінюватись за гармонічним законом із періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_1 k_2}}\,. \qquad (6)$$

Якщо далі пригадати, що коливання швидкості маятника випереджають коливання його координати на чверть періоду (на $\pi/2$ рад), то слід зробити висновок, що коливання чисельності хижаків також мають випереджати коливання чисельності жертв на чверть періоду.

5.3. Таким чином, розв'язком системи рівнянь Лотки-Вольтерри є коливання чисельності хижаків і жертв, зсунуті одне відносно одного за фазою, з періодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{k_{сх} \cdot k_{пж}}}$. Звісно, коли амплітуда цих коливань зростає, вони перестають описуватися законом косинуса або синуса, тобто перестають бути гармонічними, що видно з графіків на рис. 1, проте період залишається незмінним.

Вправа

5.3.1. Поясніть, чому період коливань не залежить від N_1 і N_2.

5.3.2. Обчисліть період T згідно (6) і порівняйте одержане значення з тим, що дає таблиця за рис. 1, на якій зображено не менше трьох періодів. За результатами порівняння зробіть висновки.

5.4. Завершимо експериментальне дослідження моделі Лотки-Вольтерри побудовою й аналізом графіків зміни чисельності обох популяцій в залежності від часу згідно спрощеної системи (5). Будемо мати на увазі, що система (1) автоматично переходить до спрощеного вигляду за умови, визначеної у п. 1, тобто коли початкові кількості особин кожного виду N_{01} і N_{02} мало відрізняються від своїх стаціонарних значень (10000 і 2500 відповідно). Надамо їм, наприклад, значення: N_{01}=10040 і N_{02}=2520.

Результат, поданий на рис. 3, виявляється надзвичайно невиразним (перевірте!). Причиною є те, що на кожній з координатних осей ми вирішили показати несумірні пари чисел 10000 і 40 та 2500 і 20.

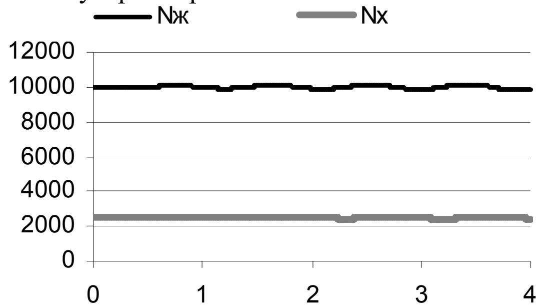


Рис. 3

Чисельне розв'язування системи (2) привело до висновку, що чисельності популяцій обох видів із плином часу здійснюють складні коливання зі зростаючою амплітудою (рис. 1). У спрощеній системі (5) ці коливання набувають гармонічного характеру, але безпосередньо побачити цей факт досить складно: результат на графіку, поданому на рис. 3, виявляється непереконливим, і наступний матеріал доцільно вивчати після розгляду теми «Фазова площина» [3] нашого навчального посібника [6].

Щоб отримати переконливу інформацію про досліджуваний процес, зобразимо його на фазовій площині в координатах N_1, N_2, що, як ми бачили, є аналогами зміщення x, і швидкості його зміни υ, тобто виведемо на екран графіки залежності $N_2 = f(N_1)$ – рис. 4.

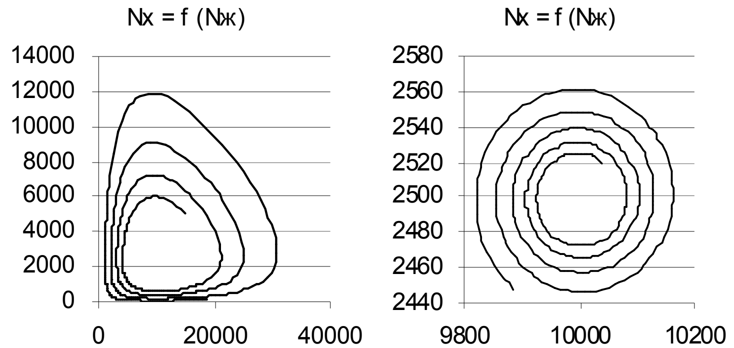
З рис. 4*а* видно наступне:

– процес дійсно є коливальним;

– амплітуда коливань постійно зростає.

Згущення траєкторії зображуючої точки біля координатних осей обумовлене тим, що величини N_1 і N_2 за своєю природою є додатними числами і не можуть набувати від'ємних значень, а тому вони «вимушені» групуватись у вузьких смугах біля осей.

У порівнянні з рис. 1 ніяких принципово нових відомостей тут немає, а от фазовий портрет процесу, поданий на рис. 4*б*, повністю усуває недоліки, перелічені при аналізі рис. 3.



(*а*) N_{01} = 15000; N_{02} = 5000 (*б*) N_{01} = 10040; N_{02} = 2520

Рис. 4

Вправа

5.4.1. Проаналізуйте рис. 4б.

5.4.2. За таблицею рис. 1 з’ясуйте, чи утворюють послідовності максимумів функцій $N_1 = N_1(t)$ і $N_2 = N_2(t)$ прогресії. Якщо так, то які саме: арифметичні чи геометричні?

6. І все ж погодьтесь, не дуже віриться, що система «хижак – жертва» є таким своєрідним генератором незатухаючих коливань!

6.1. Якщо ж із цим погодитись, то як у такому разі в системі реалізується позитивний зворотний зв’язок, необхідний для переходу системи в режим генерації?

6.2. Висловіть свої міркування стосовно джерела енергії, за рахунок якої можуть здійснюватись такі коливання (до того ж із зростаючими амплітудами).

6.3. За яких умов, на вашу думку, може відбутись загасання цих коливань?

7. Запропонуйте додаткові версії моделі, пов’язані з виловом жертв (карасів) та жертв і хижаків (карасів і щук) одночасно. Розробіть план таких досліджень і реалізуйте його.

Висновки

1. Модель Лотки-Вольтерри передбачає процеси, що відбуваються лише в просторово однорідних системах і нічого не говорить про можливий розвиток подій у випадках просторових неоднорідностей. Тому вона, хоч і дає до деякої міри адекватний розв’язок, але є досить спрощеною та грубою і дозволяє отримати тільки «усереднене розуміння» того, як із плином часу змінюється кількість елементів системи.

2. У методі моделювання широко використовують два принципово

різні підходи. При першому підході створюється математична модель процесу і виконується аналітичне або чисельне її розв'язування, яке за можливості супроводжується графічними побудовами. Тут комп'ютер використовується здебільшого як високоефективний обчислювальний засіб. Саме у такий спосіб ми здійснили описане вище дослідження. Другий підхід – комп'ютерне імітаційне моделювання складної системи. Воно дозволяє одержати більш докладні уявлення про процеси (в моделі Лотки-Вольтерри було б урахування просторових неоднорідностей), але такий підхід потребує значно складніших алгоритмів. Розв'язуючи подібні задачі, дослідники активно використовують якісний аналіз, моделюють системи у спеціалізованих сучасних середовищах, розробляють «правила гри» і розмірковують над тим, які з цих «правил» найбільш повно відповідають реальній системі. У цих моделях дуже часто характеристикам процесу надають випадкових значень, і такі моделі прийнято називати імітаційними. До речі, в середовищі моделювання, створеному мовою програмування С++, авторами розроблена імітаційна модель системи «хижак – жертва», яка працює за іншим алгоритмом, але дає схожі результати.

3. Виявляється, що з неменшим успіхом моделлю Лотки-Вольтерри можна скористатись і для з'ясування питань про кінетику (тобто розвиток процесу в часі) хімічних та ядерних реакцій. Тут частинки реагентів унаслідок дифузії рухаються, зустрічаються, вступають у реакції, в результаті яких вони «гинуть», продукуючи нові частинки і т.п. Розмноженню риб відповідає, наприклад, ланцюгова ядерна реакція, їхній загибелі – поглинання частинок (нейтронів) у реакторі. Для розв'язання таких задач зазвичай складають рівняння, схожі на рівняння системи (1) і дістають попередні грубі й усереднені дані – відомості про досліджуваний процес. Схожі результати з'являються і при вивченні багатьох інших конкуруючих взаємообумовлених процесів.

4. Таким чином, наше дослідження, яке починалося розв'язанням задачі математичної екології, отримало несподіване продовження і виявилося проявом системного підходу при використанні комп'ютерної технології моделювання як інтегруючої основи сучасного природознавства.

Перспективи подальших досліджень: розробка методичних основ навчання комп'ютерного моделювання фізичних процесів у хмароорієнтованому середовищі.

Список використаних джерел:

1. Планк М. Единство физической картины мира : сборник статей / Макс Планк ; Академия наук СССР. – М. : Наука, 1966. – 285 с.

2. Теплицький І. О. Факультативний курс «Основи комп'ютерного моделювання» / І. О. Теплицький // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту: Серія педагогічна. Випуск 8: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. пед. ун-т, ІВВ, 2002. – С. 210-217.

3. Теплицький І. О. Методика ознайомлення школярів з поняттям фазового простору в курсі фізики / І. О. Теплицький, С. О. Семеріков // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Випуск 9: Методологічні принципи формування фізичних знань учнів і професійних якостей майбутніх учителів фізики та астрономії. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. ун-т, ІВВ, 2003. – С. 163-165.

4. Теплицький І. О. Комп'ютерне моделювання руху тіл під дією сили всесвітнього тяжіння / І. О. Теплицький, С. О. Семеріков // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна. Випуск 10: Дидактики дисциплін фізико-математичної та технологічної освітніх галузей. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. ун-т, ІВВ, 2004. – С. 166-172.

5. Теплицький І. О. Комп'ютерне моделювання абсолютних та відносних рухів планет Сонячної системи / І. О. Теплицький, С. О. Семеріков // Зб. наук. праць Кам'янець-Подільського держ. ун-ту: Серія педагогічна: Дидактика фізики і підручники фізики (астрономії) в умовах формування європейського простору вищої освіти. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. ун-т, ІВВ, 2007. – Вип. 13. – С. 211–214.

6. Теплицький І. О. Елементи комп'ютерного моделювання : навчальний посібник / І. О. Теплицький. – Видання друге, виправлене і доповнене. – Кривий Ріг : КДПУ, 2010. – 264 с., іл.

7. Volterra V. Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie / Vito Volterra. – Paris : Gauthier-Villars et cie., 1931. – 214 p.

8. Takeuchi Y. Global Dynamical Properties of Lotka-Volterra Systems / Y. Takeuchi. – Singapore : World Scientific, 1996. – 302 p.

9. Lotka A. J. Elements of Physical Biology / Alfred J. Lotka. – Baltimore : Williams & Wilkins Company, 1925. – 495 p.